АНТИЧНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В. Зеннхаузер

Настоящая книга представляет собой исследование роли математики в творчестве Платона. Она затрагивает, с одной стороны, понимание Платоном природы математического знания, связи математики и диалектики, роли математики в процессах воспитания истинных философов и граждан Каллиполиса. С другой стороны, автор исследует собственно математические представления и идеи Платона, место математики в его объяснении Космоса, человека, государства. Особое место в работе занимает исследование т. н. «математического платонизма», явления очень важного для истории и современного состояния математики. Завершают книгу приложения, где даются упражнения, позволяющие лучше понять значение математики для философского способа мышления.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся Платоном, античной философией, историей и современным состоянием математики.

РХГА
Издательство РХГА
Санкт-Петербург
2016

ISBN 978-5-88812-786-5
9 785888 127865

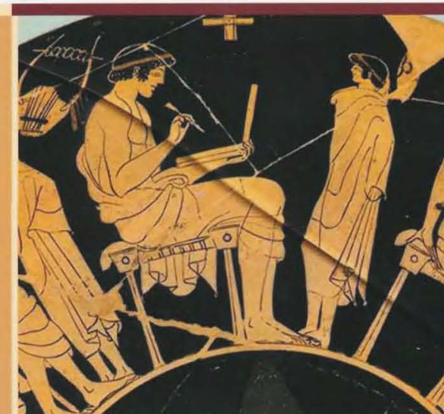
ПЛАТОН И МАТЕМАТИКА

В. ЗЕННХАУЗЕР

АНТИЧНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В. ЗЕННХАУЗЕР

ПЛАТОН И МАТЕМАТИКА



РУССКАЯ ХРИСТИАНСКАЯ ГУМАНИТАРНАЯ АКАДЕМИЯ

Вальтер Зеннхаузер

ПЛАТОН
И
МАТЕМАТИКА

Издательство РХГА
Санкт-Петербург
2016

УДК 1:51
ББК 87.3:22.1
З-56

Рекомендовано к публикации
Редакционно-издательским советом
Русской христианской гуманитарной академии

Рецензенты:
д. ф. н., проф. *Никоненко С. В.* (Санкт-Петербургский государственный университет),
д. ф. н., проф. *Иванов О. Е.* (Русская христианская гуманитарная академия)

Зеннхаузер В.
З-56 Платон и математика. – СПб.: Издательство РХГА, 2016. — 614 с. : ил. — (Античные исследования).
ISBN 978-5-88812-786-5

Настоящая книга представляет собой исследование роли математики в творчестве Платона. Она затрагивает, с одной стороны, понимание Платоном природы математического знания, связи математики и диалектики, роли математики в процессах воспитания истинных философов и граждан Каллиполиса. С другой стороны, автор исследует собственно математические представления и идеи Платона, место математики в его объяснении Космоса, человека, государства. Особое место в работе занимает исследование т. н. «математического платонизма», явления очень важного для истории и современного состояния математики. Завершают книгу приложения, где даются упражнения, позволяющие лучше понять значение математики для философского способа мышления.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся Платоном, античной философией, историей и современным состоянием математики.

УДК 1:51
ББК 87.3:22.1

ISBN 978-5-88812-786-5

Содержание

Предисловие

Мое первое знакомство с Платоном, произошедшее в школе, было неудачным. Диалоги казались мне слишком длинными, часто непонятными и даже скучными. К тому же я не видел в них настоящих диалогов между равноценными собеседниками, меня раздражала унизительная роль друзей Сократа, которым оставались лишь такие реплики, как: «Ты совершенно прав», «Как же иначе!», «Да, конечно». В дальнейшем, к счастью, картина постепенно стала раскрываться во всем богатстве своих деталей, и я начал понимать, почему некоторые авторы называют Платона «началом философствования» или даже «божественным». Тем не менее я был удивлен, когда узнал, что та *математика*, которую преимущественно изучают в наших школах и университетах, называется, согласно Паулю Бернайсу, «математическим *платонизмом*». Почему «платонизм»? Какие философские идеи Платона дают нам право неразрывно связывать имя древнего мыслителя с современной математикой? И тогда у меня возникло желание прочитать труды Платона именно под этим углом зрения.

Первые результаты моих исследований показались директору издательства РХГА профессору Р. В. Светлову заслуживающими внимания, и он предложил мне продолжить работу с целью возможной публикации. Я благодарен ему за эту поддержку, но написать целую книгу на русском языке, которым я владею только ограниченно, оказалось настоящим приключением! И все получилось лишь благодаря неутомимым усилиям моей жены Ирины Викторовны и особенно ее дочери Марии Ларионовой, которые задавали «неудобные», но всегда полезные вопросы и терпеливо исправляли стилистические ошибки, — благодаря им текст стал более понятным и зазвучал «по-русски». Кроме того, хотелось бы сказать огромное спасибо редактору Всеволоду Королеву: он не только занимался многочисленными деталями, но и внимательно прочитал весь текст, предложив целый ряд мыслей по его улучшению. Наша переписка и возникавшие в ее ходе дискуссии были очень интересны и полезны.

Эту книгу не обязательно читать от начала до конца: читатель вполне может ограничиться теми отрывками и упражнениями, которые сочтет интересными для себя. По этой причине я иногда допускал повторение той или иной важной для меня мысли, — думаю, тот, кто прочтет весь текст, согласится с высказыванием платоновского Сократа: «Есть хорошая пословица, что дважды и трижды нужно повторять прекрасное».

Я надеюсь, что данная работа послужит шагом к возобновлению и углублению дискуссий между философами и математиками. Подобные дискуссии были характерны для Академии Платона, но были бы весьма полезны для обеих сторон и в наше время.

Введение.
Цели и проблемы исследования

В данной работе рассматривается отношение Платона к математике[1]. Мы собрали и проанализировали самые важные для нашей темы места из диалогов Платона[2], для того чтобы получить ответы на следующие вопросы: какую роль играла математика в философии Платона? В чем Платон видел сущность и важность математики и как он ее использовал? Какую роль играл сам Платон в развитии математики? В двух словах, мы исследуем влияние математики на философию Платона, а также раскроем несколько пунктов влияния платоновских взглядов на формирование математики. Такое исследование имеет, по нашему мнению, значение, которое не ограничивается сферой античной философии и науки — «античная мысль потому и не утратила по сей день своей живейшей актуальности, что ее содержание выходит за рамки всякой культурной и исторической ограниченности и непосредственно касается тех проблем, которые волновали людей на протяжении многих веков до

---

1 Греческое слово μάθημα означает «то, что изучается», а также «процесс учения». Архит Тарентский первым объединил геометрию, арифметику, астрономию и музыку под названием «математика», так как «они являются родственными» (Diels. Vorsokratiker 35. B. 1). В «Теэтете» (145 c–d) Платон также упоминает четыре отрасли, которые следует знать: геометрию, искусство счета, гармонию и астрономию. И в седьмой книге «Государства» Платон требует, чтобы стражи тщательно изучали «искусство счета, геометрию, астрономию и музыку». В данной работе мы следуем Архиту и объединяем эти предметы под названием «математика».

2 Самые важные цитаты из диалогов Платона даются здесь полностью, чтобы читателю не требовалось их искать специально. Эти цитаты даны мелким шрифтом, чтобы их можно было пропустить, если речь идет только о первом кратком знакомстве с темой. В дальнейшем для облегчения чтения некоторые цитаты размещаются в примечаниях.

нас и продолжают волновать нас сегодня»[3]. Мы увидим также, что основные аспекты научного подхода Платона являют собой неустаревающий образец; его идеи и научные требования по-прежнему актуальны. Чтобы показать это более наглядно, в Приложении А мы описываем особенности так называемого «математического платонизма»; в приложении Б показываем, почему из различных направлений ученые обычно выбирают именно эту «платоническую» форму математики; в Приложении В приводим некоторые темы для философско-математических дискуссий; и в Приложении Г предлагаем в качестве примера ряд задач, которые можно использовать в курсе математики для гуманитариев.

Бертран Рассел в своем знаменитом труде «История западной философии» сравнил Платона с Аристотелем в следующей краткой формуле: «Платон был математиком, а Аристотель биологом»[4]. Это выражение может показаться на первый взгляд непривычным, особенно учитывая тот факт, что Платон был не профессиональным математиком и астрономом, а «философом-художником, философом-поэтом», как назвал его Асмус[5]. Однако дальнейшие рассуждения покажут, что, по крайней мере, первое утверждение Рассела в определенном смысле соответствует действительности[6].

Правда, оценить знания и заслуги Платона в области математики не так просто по следующим причинам:

---

3 Гайденко. История греческой философии в ее связи с наукой. С. 7.

4 Таков смысл в немецком переводе: «Plato war Mathematiker, Aristoteles Biologe» (Russell. Philosophie des Abendlandes. S. 190). В подлиннике мы читаем: «Plato was mathematical, Aristotle was biological» (Russell. History of Western Philosophy. P. 192). Русский перевод звучит немного более сдержанно: «Платон проявлял склонность к математике, а Аристотель к биологии» (Рассел. История западной философии. С. 223).

5 Асмус. Платон. С. 159.

6 Ср. описание Бурбаки: «...Декарт и Лейбниц (оба — прекрасные математики), Платон (который был, по крайней мере, в курсе математики своей эпохи), Аристотель или Кант (о которых этого не скажешь)» (Бурбаки. Очерки по истории математики. С. 21).

1. Р. В. Светлов, назвавший Платона «началом философствования»[7], считает его творчество «универсальным, более универсальным, чем творчество какого-либо иного из европейских мыслителей»[8]. Прокл называл его «ὁ θεῖος Πλάτων»[9], Шопенгауер коротко и ясно говорил о «божественном Платоне»[10], а К. Олер использовал следующее сравнение, чтобы охарактеризовать величие и глубину платоновского учения: при чтении платоновских диалогов «часто чувствуется, что мы имеем дело с айсбергом, бóльшая часть которого невидима»[11]. Л. Витгенштейн, прочитав в какой-то книге изречение: «К смыслу "сущего" философы ныне не ближе, чем Платон», воскликнул: «Какое странное положение вещей. Сколь поразительно вообще, что Платон смог зайти так далеко! Или же, что мы не умели пойти дальше! В том ли причина, что Платон был столь умен?»[12] Математик, логик и философ Уайтхед считал, что «самая надежная характеристика европейской философской традиции состоит в том, что она представляет собою ряд примечаний к Платону»[13]. Наконец, можно процитировать физика-теоретика фон Вайцзеккера: «Платон является... единственным философом, с которым я чувствую себя как дома... Платон

---

7 Светлов. Русский Платон. С. 11.

8 Там же. С. 8.

9 Procli Diadochi in primum euclidis elementorum librum commentarii. Ex recognitione Gogofredi Friedlein. Lipsiae M.DCCC.LXXIII. P. 116.

10 Шопенгауэр. Мир как воля и представление. 1819. Предисловие к 1 изд.

11 Oehler. Der entmythologisierte Platon. P. 415. (Цитата из Fritz: Schriften zur griechischen Logik. Band 1. S. 216).

12 Витгенштейн. Культура и ценность. С. 426.

13 Whitehead. Process and Reality. P. 39. Более подробно: «The safest general characterization of the European philosophical tradition is that it consists of a series of footnotes to Plato. I do not mean the systematic scheme of thought which scholars have doubtfully extracted from his writings. I allude to the wealth of general ideas scattered through them. His personal endowments, his wide opportunities for experience at a great period of civilization, his inheritance of an intellectual tradition not yet stiffened by excessive systematization, have made his writings an inexhaustible mine of suggestion».

мыслит о том, о чем Гете умалчивает, и круг его интересов шире, чем у Гете. Политика и этика, искусство и страсти, математическое естествознание, логика, онтология и мистика — все они имеют отношение к Платону»[14]. Если это так, встает вопрос: кто из нас в принципе способен понять мыслителя такого масштаба и достоверно интерпретировать его творчество? Такие попытки, по-видимому, являются всегда рискованным предприятием — на это решительно указывал Наторп в своем большом комментарии к Платону[15], и это, кстати, верно не только для нас, живущих в другой культуре, но и для самих греков: они, по мнению Никоса Диму, в подавляющем большинстве были подобны «сыновьям знаменитого философа, которые не могут понять его произведения, однако видят, что знатоки воздают им честь и хвалу». И Диму добавляет: «Это страшно, когда вы не только не можете превзойти работы своего отца, но даже не в состоянии понять их»[16].

2. Платон не писал специальных трудов по математике; поэтому его точка зрения должна реконструироваться на основе разрозненных фрагментов. К тому же эти отрывки не могут полностью передать всю глубину знаний автора — ведь нам хорошо известны сомнения Платона в способности письменного слова адекватно выразить истину[17].

---

[14] Weizsäcker. Selbstdarstellung. S. 587.

[15] Наторп пишет о текстах Платона: «У нас есть только небольшая стопка текстов, возникновение и смысл которых всегда были связаны с определенными историческими ситуациями, о чем их автор — художник, несравненной силой своего духа создавший целый мир — не оставил никаких сомнений. Кто мог бы быть столь самонадеянным, чтобы утверждать, что ему удалось воссоздать в себе этот мир, непосредственно предстоявший взору творца? "Ты можешь только то понять, что твоему уму под стать", — пожалуй, мог бы прозвучать ответ» (Natorp. Platos Ideenlehre. S. 461).

[16] Dimou. Über das Unglück, ein Grieche zu sein. Nr. 53–54.

[17] О проблеме адекватного выражения мысли в устной и письменной формах речи см. параграф 4.4. Говоря в дальнейшем об «истине», мы будем иметь в виду философскую, «классическую» концепцию истины; другие

3. Еще одна проблема заключается в том, что само по себе наличие письменных документов вовсе не гарантирует нам ясности в их понимании. Тот, кто видел древние рукописи, может представить себе, как трудно их расшифровывать и как сомнительны бывают иногда результаты такой расшифровки. Даже хорошо сохранившиеся тексты не гарантируют наличия в них достоверной исторической информации: Алис Свифт-Ригинос, например, проанализировала 148 анекдотов о жизни Платона и пришла к выводу, что «они ненадежны в качестве источников информации об историческом Платоне... Очевидно, что почти все анекдоты являются продуктами двух противоположных тенденций — к прославлению философа и к его очернению»[18]. Что касается наших представлений конкретно о математических взглядах и достижениях древних, то Д. Фаулер, проведя обширное исследование источников, пишет: «Наши знания о деталях доэвклидовой математики настолько отрывочны, что ее различные интерпретации больше похожи на религиозные убеждения, чем на позиции, которые можно доказать вне рамок веры»[19].

концепции, особенно используемые в математике (истина как согласованность, истина как средство, ведущее к успеху, и истина как соответствие), мы коротко рассмотрим в главе 6.

18 Swift Riginos. Platonica. P. 199.

19 Fowler. The Mathematics of Plato's Academy. P. 404. И, как замечает Фаулер, эти околорелигиозные убеждения бывают очень твердыми: «Хотя создание исторических мифов может быть делом нетрудным, искоренить их бывает иногда невозможно, особенно когда они притягательны, заманчивы и заполняют неизбежные пробелы в нашем знании; истории о Пифагоре и Евклиде — прекрасная тому иллюстрация» (P. 405). К примеру, согласно общему мнению, открытие иррациональности «вызвало первый в истории кризис оснований математики» (Гайденко), и в параграфе 2.8 мы расскажем историю о гибели человека, который проболтался о существовании иррациональных соотношений. Но, может быть, такие рассказы и представления — это не больше чем «мифы»? Фаулер спрашивает: «Почему очевидные для нас затруднения, вытекающие из проблемы несоизмеримости, не фигурируют ни в одном из ранних свидетельств? Следует подчеркнуть: то, что является затруднениями *для нас*, вовсе не обязательно

4. Есть также проблемы, происхождение которых объяснимо, пожалуй, только психологически, но именно они часто приносят наибольшие трудности в сферу платоноведения. Светлов указывает на «стереотипы», «мистификации» и «заблуждения», которые сплошь и рядом встречаются в комментариях к платоновскому учению[20]. И они характерны вовсе не только для второразрядных исследователей Платона, — по Наторпу, даже Аристотель «совсем не понял основ учения Платона»![21] Шлейермахер написал о диалоге «Горгий» следующее: «Как и во всех доныне представленных крупных диалогах Платона, основная его мысль была почти повсеместно неправильно понята»[22]. Как мы видим, недоразумения и предубеждения присутствуют не только в обыденной жизни, но даже и в мире ученых. Гуссерль, например, с горечью говорил о недобросовестности некоторых рецензентов и критиков, полностью исказивших его учение[23]. Можно также привести слова Гете: «Отзывы моих друзей нисколько не отличались снисходительностью, и автору с многолетним опытом пришлось снова испытать, что как раз подаренные экземпляры приносят неприятности и огорчение»[24]. Баал-шем, основатель хасидизма, воскликнул одна-

---

представляет затруднение для авторов этих свидетельств; возможно, они мыслили совершенно отличным от нашего образом» (P. 365).

20 Светлов. Русский Платон. С. 17.

21 Natorp. Platos Ideenlehre. S. 429.

22 Шлейермахер во введении к своему переводу диалога «Горгий».

23 «Как неаккуратно относятся некоторые авторы к моим трудам с их пренебрежительной критикой, с какой "добросовестностью" они читают, в каком вздоре они имеют смелость подозревать меня и феноменологию, мы можем увидеть на примере Морица Шлика...» (Husserl. Logische Untersuchungen. Bd. II/2. P. VI).

24 Гете. Судьба печатного текста. С. 87. Гете говорит здесь о группе друзей, которые читали его новую книгу: «В одном... городе образовался кружок ученых, которые сделали немало хорошего на теоретическом и практическом пути. В этом кругу усердно читалась и моя книжечка в качестве своеобразной новинки. Однако каждый был ею недоволен, и все уверяли: нельзя понять, что это значит?» (Там же. С. 82).

жды, увидев записи своего ученика: «Здесь нет ни одного слова, сказанного мной!»[25] Подобная ситуация была известна уже Платону. Однажды он высказал по этому поводу следующее: «Вот что вообще я хочу сказать обо всех, кто уже написал или собирается писать и кто заявляет, что они знают, над чем я работаю, так как либо были моими слушателями, либо услыхали об этом от других, либо, наконец, дошли до этого сами: по моему убеждению, они в этом деле совсем ничего не смыслят... И вот что еще я знаю: написанное и сказанное мною было бы сказано наилучшим образом, но я знаю также, что написанное плохо причинило бы мне сильнейшее огорчение»[26].

5. Не стоит забывать и о сложностях перевода. Как убедительно писал Алексей Федорович Лосев в предисловии к своему труду «Критика платонизма у Аристотеля», «когда профан берет в руки критическое издание какого-нибудь греческого или римского классика или научный перевод его на тот или иной язык, ему и в голову не приходят те трудности, которые пришлось преодолеть издателю или переводчику. Взять ли издательскую и редакционную задачу с ее трудной, кропотливой и тонкой работой по сличению рукописей и установлению правильного текста, взять ли переводческий труд с необходимо требуемым здесь хорошим знанием языка и терминологии писателя и умением найти соответствующие аналогии в другом языке — все это чрезвычайно ответственные вещи, и в особенности — относительно античных текстов»[27]. Примером таких трудностей может послужить только что процитированное предложение Платона, переведенное на разные языки. Греческий подлинник звучит: «...καὶ μὴν ὅτι γεγραμμένα κακῶς οὐχ ἥκιστ᾿ ἂν ἐμὲ λυποῖ». Немецкий перевод: «...und da muss es mich denn doch sehr arg schmerzen, dass meine Gedanken entstellt in

[25] Buber. Die Geschichten des Rabbi Nachman. S. 21.

[26] VII Письмо. 341c–d.

[27] Цит. по: Паршин. Идеальные числа Платона.

die Welt hinausgeschrieben worden sind»[28]. Французский перевод: «...et que, à coup sûr, si l'écrit était mauvais, ce n'est pas moi qui en éprouverais le moins de peine»[29]. Английский перевод: «...and further, that if they should be badly stated in writing, it is I who would be the person most deeply pained»[30]. Русский перевод: «...но я знаю также, что написанное плохо причинило бы мне сильнейшее огорчение»[31]. Возникает вопрос: какой перевод лучше соответствует греческому подлиннику? Был ли у Платона такой прискорбный опыт (как много столетий позже у Гуссерля) на самом деле, или же он мысленно придумал эту ситуацию?[32] Конечно, мы знаем, что каждый перевод в определенной степени является интерпретацией, зависящей не только от особенностей языка, но и от временных и культурных реалий. Иногда трудно определить подлинный смысл не только текста в целом, но и одного-единственного слова. Как перевести такие фундаментальные философские понятия, как *λόγος*[33], *νοῦς* или *ὄν*? Можно ли быть уверенным, что Платон понимал эти термины точно так же, как мы?[34] Но проблемы перевода возникают также и с математическими терминами. Как перевести, например, греческое слово *ὅροι*, которое играет важную роль в математических дискус-

---

[28] Platon. Sämtliche Werke. Dritter Band / Пер. Wilhelm Wiegand.

[29] Platon. Lettres / Пер. Luc Brisson.

[30] Plato. VII / Пер. R. G. Bury.

[31] Платон. Собрание сочинений в 4-х томах. Том 3. Часть 2.

[32] Данные переводы грамматически корректны, но, по-моему, немецкий перевод лучше других, так как только в нем указывается, что Платон судил «обо всех, кто уже написал» (341c).

[33] Теон Смирнский различал 12 значений слова λόγος у перипатетиков и 4 значения у Платона! (Теон Смирнский. Изложение математических предметов, полезных при чтении Платона. 73).

[34] Штенцель обращал внимание на то, что даже такое простое понятие, как «число», допускает совершенно различные интерпретации. «Прежде всего, насколько это возможно, должно быть уточнено, *какое понятие числа в античной — и в современной! — полемике является предметом обсуждения*» (Stenzel. Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles. S. 146).

сиях: «члены пропорции», «пределы интервалов», «предпосылки», «дефиниция» или «термин»?[35] Или другой пример: *ὑπόθεσις* интерпретируется по-разному Солмсеном и Фрицем, что ведет к серьезным расхождениям в понимании не только платоновской математики, но и учения Платона об идеях вообще[36]. Наконец, возьмем конкретный пример: что означает *δυνάμεις* в рассуждениях Теэтета об исследованиях Теодора, касающихся иррациональных соотношений? Этот вопрос заставил попотеть бесчисленное количество толкователей, однако все их усилия не принесли желаемого результата[37].

6. Число публикаций, посвященных Платону, так велико, что для неспециалиста практически невозможно знать всю релевантную литературу по этой теме. «Литература о Платоне неисчислима. Количество статей и книг на тему "Платон и математика" можно подсчитать, но их все еще слишком много...»[38] В моем случае положение осложняется ограниченным знакомством с русскоязычными изданиями и необходимостью опираться в значительной степени на

---

[35] Об этом подробно писал фон Фриц, высказав интересные мысли о важности не только «филологического», но и «критического» перевода (Fritz. Philologische und philosophische Interpretation philosophischer Texte. S. 11–22).

[36] Фон Фриц писал: «Самое трудное... — это, без сомнения, правильная интерпретация понятия ὑπόθεσις. То, что ὑπόθεσις не означает углы и треугольники рисованных фигур, как считает Солмсен, сразу понятно, так как Платон называет в качестве примера ὑποθέσεις наряду с σχήματα и γωνιῶν τριττὰ εἴδη также περιττόν и ἄρτιον, которые нельзя изображать. Также я считаю неправильным понимание этого термина у Наторпа, Штенцеля и т. д. — если называть только самых важных авторов. При этом мне совершенно ясно, что мое понимание противоречит всем прежним истолкованиям этого понятия. Речь идет здесь о самых трудных проблемах, которые ведут в центр платоновского учения об идеях...» (Fritz. Platon, Theaetet und die antike Mathematik. S. 40–41).

[37] См. об этом: Burnyeat. The philosophical sense of Theaetetus' mathematics. P. 489–513, особенно p. 495–502.

[38] Artmann, Mueller. Plato and mathematics. P. 2.

немецкоязычную литературу, из которой лишь немногие труды были переведены на русский язык.

7. Существуют и особые трудности: Штенцель говорил о текстах Платона как о «нелегко поддающихся интерпретации источниках»[39], Асмус утверждал, что «учение Платона не только очень богато содержанием, очень сложно, но и очень противоречиво»[40], а Андре Пишо обращал внимание на следующий простой, но решающий факт: «Почти 25 столетий отделяют нас от этих (платоновских) писем, и европеец XX столетия думает, без сомнения, иначе, чем грек V столетия до Рождества Христова»[41]. Сложность понимания древних текстов особенно ярко проявляется в математической области. Освальд Шпенглер на основе обширных математических знаний выявил обусловленные культурой различия в математическом мышлении. Он говорил о «фундаментальной противоположности античных и западных чисел»[42], считая, что современный человек едва ли может представить себе математическое мышление древних. Шпенглер писал: «Здесь следует еще упомянуть соответствующее, очень глубокое и ни разу по достоинству не оцененное различие между античной и западноевропейской математикой. Античное числовое мышление воспринимает вещи *как они есть*, как *величины*, без отношения ко времени, чисто в настоящем. Это привело к Эвклидовой геометрии, математической статике и завершению системы учением о конических сечениях. Мы воспринимаем вещи с точки зрения их *становления* и *взаимоотношения*, как функции. Это привело к динамике, аналитической геометрии и от нее — к дифференциальному счислению»[43]. Опасность одностороннего подхода совре-

---

39 Stenzel. Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles. S. III.

40 Асмус. Платон. С. 217.

41 Pichot. Die Geburt der Wissenschaft. S. 484.

42 Шпенглер. Закат Европы. I, 1, 13.

43 Там же. I. Введение, 5. Проблема касается, естественно, не только математики, но и мышления и понимания в целом: «Русским философам, как,

менных ученых к древней математике подчеркивает А. В. Родин. Он критикует знаменитых математиков — особенно Давида Гильберта (автора «Оснований геометрии») и Николаса Бурбаки (автора «Элементов математики») — за то, что «в русле [их] прогрессистской методологии все старые математические тексты оцениваются по стандартам, принятым в современной математике, и при этом не учитывается, что этим текстам соответствуют свои, отличные от современных, математические стандарты... [Такая] методология предполагает весьма примитивный способ исторической реконструкции»[44]. Подобные трудности приводят к появлению в исследовательской литературе самых различных мнений по дан-

---

например, Соловьеву, непонятен космический солипсизм, лежащий в основе Кантовой "Критики разума" (каждая теория, как бы она ни была абстрактной, есть только выражение определенного мироощущения) и делающий ее самой истинной из всех систем для западноевропейского человека, а для современного китайца или араба с их совершенно иначе устроенным интеллектом учение Канта имеет значение исключительно курьеза» (I. Введение, 6). «Понадобилась вся религиозно-философская, художественно-историческая, социально-критическая работа XIX века, не столько чтобы, наконец, научить нас пониманию драм Эсхила, учения Платона, религии Аполлона и Диониса, Афинского государства и цезаризма, — нет, от этого мы еще очень далеки, — но чтобы заставить нас, наконец, почувствовать, как неизмеримо далеко и чуждо нам все это, пожалуй, более чуждо, чем мексиканские боги и индийская архитектура» (I. Введение, 10). Заключение таково: «Истины существуют только по отношению к определенному человечеству» (I. Введение, 15).

44 Родин. Математика Евклида в свете философии Платона и Аристотеля. С. 6. В противоположность «примитивному» подходу, Родин предлагает «опосредовать старые математические тексты главным образом другими, нематематическими старыми текстами из изучаемого историко-культурного ареала. Самая реальная альтернатива прогрессистскому подходу состоит в возможности сопоставлять старые математические тексты со старыми философскими текстами. В философских текстах мы можем найти прежние объяснения того, что такое математика, какой она должна быть и к чему должна стремится, и, наконец, что гораздо важнее, старые философские тексты дают нам в наиболее чистом виде само "старое понимание", так как в отличие от специальных наук философия имеет понимание в качестве своего предмета» (Там же. С. 7).

ному вопросу. По словам М. Я. Выгодского, виднейшие историки математики считают, «что арифметические знания и умения греков, в противоположность их геометрическим построениям, представляют собой нечто совсем примитивное»[45], но его собственные исследования показывают, напротив, «что греки были умелыми вычислителями»[46]. Можно привести и такой пример, касающийся непосредственно Платона: Ф. Солмсен утверждал, что Платон оказал решающее влияние на процесс превращения математики в точную науку, а К. фон Фриц оспаривал это мнение[47]. Такие конфликты показывают, что даже эксперты, при всей их тщательности, интерпретируют платоновские тексты по-разному. Для Причарда эта ситуация досадна, но объяснима. Иногда это просто «неуместный энтузиазм по отношению к бесспорно великому уму Платона, сочетающийся с романтическим темпераментом. Чаще, однако, причиной является вполне объяснимое незнание истории математических идей — объяснимое потому, что те, кто пишет об этом аспекте мысли Платона, являются либо математиками, но не историками, либо специалистами по Античности, незнакомыми с историей математики. Но основная причина еще более понятна: это убеждение, что понятие числа является чем-то данным, не изменяющимся от культуры к культуре и от эпохи к эпохе»[48].

---

[45] Выгодский. Арифметика и алгебра в древнем мире. С. 301.

[46] Там же. С. 300.

[47] См.: Fritz. Platon, Theaetet und die antike Mathematik. Фон Фриц особенно яростно оспаривает тезис Солмсена, о том, что Платон оказал определяющее влияние на Евдокса, преобразователя и новатора в сфере античной математики. Фон Фриц не отрицает определенного влияния Платона на античную математику, но это влияние, по мнению фон Фрица, совсем другого рода, чем утверждает Солмсен (S. 23).

[48] Pritchard. Plato's Philosophy of Mathematics. P. 1–2. В своем труде Причард подробно объясняет, почему платоновская философия математики является философией IV в. до н. э. и отличается от наших представлений не меньше, чем взгляды египтян и вавилонян. «В частности, мы должны всегда помнить, что понятие arithmos довольно сильно отличается от нашего понятия числа, не только потому, что мы считаем отрицательные

8. Способ математического мышления древних греков сильно отличался от нашего. Они, например, не знали алгебры и трактовали проблемы и задачи в геометрической форме[49]. Математик и историк математики Д. Мордухай-Болтовской констатирует, что «очень трудно проникнуть в ход мыслей античного человека. Историк в большей или меньшей мере проектирует в прошлое настоящее» и дает следующий математический пример: «Лежандр, упрощая Евклида, не сознает, что это упрощение достигается только изменением самого понимания геометрического доказательства»[50].

9. Некоторые ключевые для нашей темы места в платоновских диалогах могут быть непонятны читателям, не владеющим достаточными математическими знаниями. Это проблема касается даже ученых, специально занимающихся Платоном: фон Фриц, например, упрекает своего противника Солмсена в том, что тот имеет «совсем неверное представление о математическом производстве»[51] и, следовательно, недостаточно владеет математикой, чтобы получить корректные результаты из сложной конструкции правильных тел, представленной в диалоге «Тимей» (53–55). Можно обратиться к диалогу «Теэтет» (147d–148a), где обсуждается вопрос: что такое познание? В ходе этого обсуждения Теэтет, один из участников беседы, вспоминает о математическом исследовании его учителя Теодора о соизмеримости, которое помогло Теэтету создать новую теорему. Если мы хотим понять то, что Платон излагает в

целые числа, рациональные, действительные и комплексные числа в равной степени числами, но потому, что даже общее понятие натурального числа не следует отождествлять с понятием arithmos» (P. 17–18).

49 В конце параграфа 2.8 мы приводим пример чисто геометрического решения квадратного уравнения. Читатель получит, таким образом, хотя бы какое-то впечатление о древнегреческих методах. См. также: Приложение Г2 («Один кусочек из Евклида») — современный читатель, наверное, с трудом справится с этими геометрическими изложениями.

50 Мордухай-Болтовской. Философия — Психология — Математика. С. 388.

51 Fritz. Platon, Theaetet und die antike Mathematik. S. 25.

указанном отрывке устами Теэтета, нам необходимо обладать основательными историко-математическими знаниями[52]. Только в этом случае можно увидеть, насколько достоверно описывает Платон теорию Теодора и открытия Теэтета, в какой степени эти новые теории были ему известны и как он использовал их в своей философии[53].

---

52 Эта теорема Теэтета звучит так: «Отрезки прямой линии, производящие квадрат, площадь которого является целым, но не квадратным числом, не имеют общей меры с единицей длины». Подробные комментарии к данному отрывку см.: Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. На страницах 227–230 автор показывает, что математические объяснения и дефиниции Платона совершенно правильны.

53 По мнению Ван дер Вардена, упомянутый математический пример Теэтета не слишком подходит к обсуждаемому в диалоге вопросу. Он пишет: «Правда, этот пример несколько притянут за уши: он должен служить предисловием к философской дискуссии, но не очень подходит для этого. Для этого, на мой взгляд, имеется только одно объяснение: Платон хотел взять такой вопрос, которым математик Теэтет действительно занимался сам, а поэтому мы и можем пользоваться этим диалогом как историческим источником для реконструкции математических работ Теэтета» (Там же. С. 227–228). Все же в своем примечании к этому отрывку А. А. Тахо-Годи видит достаточно явную связь между математическим примером и философской темой. Она пишет: «Текст 147d–148b у многих комментаторов вызывал разного рода сомнения, которые можно преодолеть, только если принять во внимание следующее главное обстоятельство. Как бы ни понимать употребляемые здесь Платоном термины, во всяком случае ясно одно: если разных знаний много, то это значит, что есть некое знание вообще; если в геометрии имеются квадраты и прямоугольники, то это возможно только потому, что есть некая четырехугольная фигура вообще, и если существуют разные типы чисел, то это значит, что есть число вообще. Числа и фигуры привлечены здесь для иллюстрации этой мысли Платона относительно знания. Впрочем, здесь, возможно, содержится намек на некий способ доказательства несоизмеримости отрезка длиной $\sqrt{n}$ (где n — неквадратное число) с единичным отрезком. Термин δύναμις, который использует здесь Платон, имеет несколько математических значений: квадрата, квадратного корня, стороны квадрата, степени. Об употреблении этого термина Платоном см. книгу французского исследователя Ж. Суйе (Souilhé J. Étude sur le terme dynamis dans les dialogues de Platon. Paris, 1919)» (Платон. Диалоги. М.: Мысль, 1986. С. 478).

10. Необходимо помнить и еще об одной трудности: при интерпретации старинных текстов надо иметь в виду, что наши представления об эпохе, существенно влияющие на восприятие текста, могут быть односторонними, а то и вовсе ошибочными. Например, бытует распространенное представление, что греки достигли великолепных результатов в философии и теоретической геометрии, но не имели особых достижений в области экспериментирования и технических разработок по причине слабого к ним интереса. То, что это не совсем так, показал уже Ф. М. Фелдхауз, подробно описавший технические достижения греков, в том числе и живших задолго до Архимеда: сверло, рольганги, подъемные машины, часы, орудия и многое другое[54]. Что касается экспериментов, то Ван дер Варден упоминает Птолемея, который занимался точными исследованиями «бинокулярности [видения двумя глазами], а также преломления лучей света при переходе границы между воздухом и водой, между воздухом и стеклом, а также между водой и стеклом. На основании этих тщательно проведенных экспериментов он составил таблицы рефракции»[55]. Но прежде всего здесь необходимо упомянуть созданный в эпоху Архимеда Антикитерский механизм — он был первым в истории человечества аналоговым компьютером, способным выполнять различные функции, в том числе показывать расположение известных тогда пяти планет. В последние несколько лет этот механизм, обнаруженный археологами в 1900 г. и хранящийся в Национальном музее Афин, был подробно исследован. Оказалось, что его изготовление требовало комбинации глубоких астрономических знаний и поразительной ремесленной техники. До этой находки ни один эксперт даже не предполагал, что греки были способны построить подобный механизм. Поэтому Ксенофон Мусас из университета города Салоники, опубликовавший в июне 2006 г. в Интернете[56]

---

[54] Feldhaus. Die Maschine im Leben der Völker. S. 78–96.

[55] Van der Waerden. Das Erbe der Antike: Naturwissenschaften. S. 207–208.

[56] URL: http://www.antikythera-mechanism.gr

сведения об Антикитерском механизме, считает, что в свете новых данных нам необходимо пересмотреть наши представления о некоторых эпохах в истории математики и астрономии. Этот пример показывает, что добиться идеально корректных представлений о научных знаниях и технических достижениях античности практически невозможно — это касается и интерпретации текстов Платона в данной работе[57].

***

Если мы задумаемся над такого рода трудностями, помня при этом о многочисленных спорах и противоречивых высказываниях самых именитых платоноведов, зачастую бескомпромиссно защищающих полностью противоположные точки зрения, может возникнуть вопрос, не является ли и наше исследование платоновского учения весьма спорным и уязвимым для критики?[58] К счастью, даже самые

---

57 Фаулер принципиально констатировал, что наши источники очень часто можно подвергнуть сомнению. «Доказательства многих рассказов не прослеживаются ранее времени, отстоящего на пятьсот, шестьсот, семьсот или даже восемьсот лет от самого события, и зачастую у нас мало информации о том, являются ли эти рассказы подлинными, правдоподобными или вводящими в заблуждение» (Fowler. The Mathematics of Plato's Academy. P. 204). Что же касается его собственной интерпретации, то Фаулер считает ее хорошо обоснованной, но все же добавляет: «Я сознаю, что какими бы правдоподобными и привлекательными ни были мои предположения, они могут быть столь же неуместными или неправильными, как и многие до них» (Ibid. P. 401).

58 С другой стороны, у этой ситуации есть и некоторые плюсы: она дает мне определенную свободу и беспристрастность. Я, безусловно, ограничен в моих представлениях, знаниях и интеллектуальных возможностях, но, по крайней мере, не обязан защищать чью-то точку зрения на философию Платона. Я принимаю к сведению авторитетные мнения с большим интересом (см., например, многочисленные сноски), однако не чувствую себя обязанным полностью соглашаться с ними. В этом смысле, я также не хочу быть «платоником» того или иного рода, а просто нахожу в высшей степени интересным читать диалоги Платона, особенно имея в виду математический аспект.

знаменитые авторы заявляли об ограниченности своих трудов; так, Фаулер начал свою книгу «The Mathematics of Plato's Academy» цитатой из еще более знаменитого Нейгебауэра — цитатой, достойной быть переведенной и напечатанной здесь:

> «В "Клойстерс", филиале Метрополитен-музея в Нью-Йорке, висит великолепный гобелен, рассказывающий нам сказку о Единороге. В конце концов мы видим, как чудесное животное, грациозно склонившееся перед своей судьбой, попадает в плен и покорно стоит за небольшим аккуратным забором. Эту картину можно сравнить с тем, что мы попытались осуществить здесь. Мы искусно возвели из немногих доступных нам свидетельств ограду, а внутри нее заключили то, что может нам показаться живым существом. Реальность, однако, может быть совершенно отличной от нашего воображения; возможно, пытаясь восстановить прошлое, мы напрасно надеемся на нечто большее, чем просто создание некой картины, приятной для творческого, созидающего разума»[59].

---

[59] Neugebauer. The exact sciences in Antiquity, Chapter 6. // Fowler. The Mathematics of Plato's Academy. P. vi.

Глава 1.
Отношение Платона к математике

1.1. «Негеометр да не войдет!»

Вспомним надпись над воротами Академии Платона: Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω — «Негеометр да не войдет»[1]. Предпосылками для приема студента в Академию являлись хорошо развитые математические навыки. Платон был убежден, что без такой подготовки серьезные занятия философскими вопросами вряд ли возможны[2]. Характерно, что платоновский Сократ[3] желал беседовать не просто с кем-нибудь, а спрашивал, «есть ли там [в Кирене. — *В. З.*] среди юношей кто-нибудь, кто бы ревностно предавался геометрии или какой-нибудь другой премудрости»[4]. Нередко для

---

[1] С точки зрения истории наличие этой надписи не является абсолютно достоверным. Тем не менее даже если она появилась в более поздние времена, то весьма удачно описывает дух платоновской Академии.

[2] Эту схему — сначала математика, потом философия — мы обнаруживаем через тысячу лет в западноевропейском Средневековье, где каждый студент философии должен был в первую очередь изучить арифметику, геометрию, музыку и астрономию — так называемый *квадривиум*.

[3] Сам Сократ, вероятно, «привык говорить и на площади у меняльных лавок», как описывает Платон (Апология Сократа. 17c). Но в диалогах Платона мы не находим эту ситуацию.

[4] Теэтет. 143d–e. Другой пример: в диалоге «Гиппий Больший» (285b–c) говорится, что, если у слушателей нет предварительных зна́ний, нельзя обучать их на более высоком уровне: «*Сократ:* Но ради богов, Гиппий, что же именно они рады бывают слушать и за что тебя хвалят? Очевидно, за то, что ты лучше всего знаешь, — за науку о звездах и о небесных явлениях? — *Гиппий:* Нисколько; такой науки они и вовсе не выносят. — *Сократ:* А о геометрии они рады бывают слушать? — *Гиппий:* Никоим образом, потому что и считать-то, собственно говоря, многие из них не умеют. — *Сократ:* Значит, они далеки от того, чтобы слушать твои речи о вычислениях? — *Гиппий:* Очень далеки, клянусь Зевсом».

изложения своих взглядов Платону требовалось, чтобы его собеседники обладали весьма значительными математическими знаниями, например, при обсуждении количества элементов, из которых построена Вселенная, и их вида:

> Теперь мне следует попытаться пояснить вам устройство и рождение каждого из четырех родов. Рассказ мой будет непривычен, но, раз вы сроднились с теми путями научения, без которых не обойтись моим речам, вы последуете за мной[5].

В дальнейшем мы обратимся к более детальному рассмотрению математических познаний самого Платона, а также постараемся выяснить, в чем он видел пользу математики и какие требования предъявлял студентам в частности, и философам вообще[6].

1.2. Математические знания Платона

Платон познакомился с математикой сравнительно поздно. С удивлением и стыдом, не понимая, как он мог так долго жить без математического образования, Платон говорит о себе в диалоге «Законы» устами Афинянина:

> Я и сам был удивлен, что так поздно узнал о том состоянии, в котором все мы находимся [в состоянии невежества в области математики. — *В. З.*]. Мне показалось, что это свойственно не человеку, но скорее каким-то свиньям. И я устыдился не только за самого себя, но и за всех эллинов[7].

---

5 Тимей. 53b–c.

6 Само собой разумеется, что Платон, не ограничиваясь математикой, обращался и к другим областям знаний. Например, в VIII и IX книгах «Государства» при рассмотрении различных форм государственного устройства и характера правителей он демонстрирует достаточно глубокие познания в индивидуальной и социальной психологии.

7 Законы. 819d.

Но позднее Платон постарался наверстать упущенное, чтобы как можно скорее «превратиться из свиньи в человека». Он изучил математику, по его собственным словам, «в достаточной мере»[8]. Справедливость такой самооценки и осведомленность Платона в современных ему математических теориях находит подтверждение во многих местах его диалогов, например в точном описании так называемых платоновских тел (правильных многогранников): куба, додекаэдра, икосаэдра, октаэдра, тетраэдра[9]. Диалог «Теэтет» (54e–55a) показывает, что Платон даже знал доказательство Теэтета, согласно которому может иметься только 5 таких тел[10]. Ему также удавалось плодотворно внедрять новейшие результаты математического исследования в свои собственные теории; поэтому он мог позволить себе с радостью, гордостью и уверенностью говорить о совершенном им открытии и даже просить о том, чтобы его новую теорию опровергли:

> Что ж, если кто-нибудь выберет и назовет нечто еще более прекрасное, предназначенное для того, чтобы создавать эти [четыре тела], мы подчинимся ему не как неприятелю, но как другу; нам же представляется, что между множеством треугольников есть один, прекраснейший, ради которого мы оставим все прочие, а именно тот, который в соединении с подобным ему образует третий треугольник — равносторонний... Если бы кто изобличил нас и доказал обратное, мы охотно признали бы его победителем[11].

---

8 Теэтет. 145d.

9 Тимей. 54d–55c. Об этих многогранниках мы в дальнейшем поговорим более подробно. Они, кстати, называются «платоновскими телами», потому что в большинстве случаев философы знают их только из платоновского диалога «Тимей»; в действительности же не Платон открыл эти тела: три из них описаны уже пифагорейцами, а оставшиеся два — Теэтетом.

10 Подробнее см.: Sachs. Die fünf platonischen Körper. S. 210.

11 Тимей. 54a–b.

Другой пример — это увеличение куба, математическая проблема, которую Платон признавал особенно важной. Ван дер Варден разъясняет это следующим образом: «Платон называет планиметрией то, что является главным образом геометрической алгеброй пифагорейцев. И теперь уже не удивительно, что под стереометрией он понимает обобщение геометрической алгебры на пространство трех измерений, т. е. геометрическую интерпретацию вычислений с произведениями из трех множителей. Первая новая задача, которая здесь возникает, есть решение простого уравнения третьей степени

$$x^3 = V,$$

т. е. построение куба заданного объема. Таким образом, с логической точки зрения это представляет центральную задачу стереометрии. Конечно, это не единственная задача: существуют уравнения вида

$$x^2(x+a) = V$$

и другие в том же роде. Поэтому Платон к словам "увеличение кубов" прибавляет еще "и всего, что имеет глубину", оставляя тем самым место для дальнейших задач»[12].

Следующая цитата показывает, что Платон разбирался также и в телах вращения; заметим, что рассмотрение геометрических фигур и тел не только давало ему планиметрические и стереометрические знания, но и привлекало его с эстетической стороны:

> Под красотой очертаний я пытаюсь теперь понимать не то, что хочет понимать под ней большинство, то есть красоту живых существ или картин; нет, я имею в виду прямое и круглое, в том числе, значит, поверхности и тела, рождающиеся под токарным резцом и построяемые с помощью линеек и угломеров, если ты меня понимаешь. В самом деле, я называю это прекрасным не по отношению к чему-либо, как это можно сказать о других вещах, но вечно прекрасным самим по себе, по своей природе и возбуждающим некие

---

[12] Ван дер Варден. Пробуждающаяся Наука. С. 196.

> особые, свойственные только ему удовольствия, не имеющие ничего общего с удовольствием от щекотания[13].

Это эстетическое ощущение можно с полным правом назвать отличительным признаком настоящего математика.

1.3. Астрономические знания Платона

Платону также были известны различные астрономические теории, при этом сначала он придерживался учения о том, что Земля является шаром, неподвижно находящимся в центре Вселенной[14], в то время как планеты передвигаются по «спиралеобразным», «блуждающим» орбитам вокруг нее (теория эпициклов)[15]. Конечно, Платон не сам изобрел эту систему, но, как сообщают некоторые источники, он сыграл важную роль в этом процессе. Согласно исследованиям Ван дер Вардена, история развивалась так: пифагорейцы первыми пытались объяснить аномалии движения планет с помощью равномерных циркуляций, обосновывая их теологически; Платон был знаком с теорией пифагорейцев, однако не соглашался с ними в этом вопросе; поэтому он предложил астрономам рассмотреть эту проблему, и первым, кто нашел решение поднятого Платоном вопроса, был Евдокс. Сегодня это решение обозначается как «примитивная теория эпициклов». Она могла удовлетворительно объяснить лишь движения внутренних планет, и Платон об этом знал. Поэтому в отношении внешних планет он надеялся на появление в будущем новых сведений:

---

13 Филеб. 51с. См. также: Государство 528d, где Платон говорит не столько о пользе, сколько о *привлекательности* геометрии тел.

14 См.: Федон. 108–109а.

15 Подробнее см. описание в диалогах «Тимей» (38c–d) и «Государство» (616–617). Астрономические взгляды Платона подробно представлены и рассмотрены в книге: Van der Waerden. Die Astronomie der Griechen. Ван дер Варден подчеркивает, что эта система мира была пригодна для объяснения усредненных движений семи планет. При этом Платон знал, что объяснение движения Венеры требует дополнительной подсистемы.

> Что касается прочих [планет] и того, где именно и по каким именно причинам были они там утверждены, то все это принудило бы нас уделить второстепенным вещам больше внимания, чем того требует предмет нашего рассуждения. Быть может, когда-нибудь позднее мы займемся как следует и этим, если представится досуг[16].

В «Тимее» (38–39) можно найти объяснения некоторым астрономическим явлениям. Например, Платон пишет, что планеты, по прошествии очень длинного периода, вновь возвращаются на свои изначальные позиции, завершая таким образом один мировой цикл; отсюда период прецессии оси вращения Земли (примерно 25700 лет) получил название «платоновский год»[17].

Платон интересовался астрономией и в преклонном возрасте; при этом он был готов изменить взгляды, которых придерживался много лет, — так, он полностью пересмотрел свои астрономические представления к концу жизни:

> Друзья мои, это мнение о блуждании Луны, Солнца и остальных звезд неправильно. Дело обстоит как раз наоборот. Каждое из этих светил сохраняет один и тот же путь; оно совершает не много круговых движений, но лишь одно[18].

Это значит, что поздний Платон отказался от теории эпициклов и от представления, что неподвижная Земля находится в центре Вселенной. Интересно сравнить с помощью рисунков[19] старые и новые взгляды Платона:

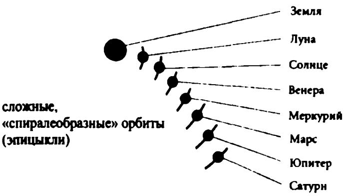
---

16 Тимей. 38d–e.

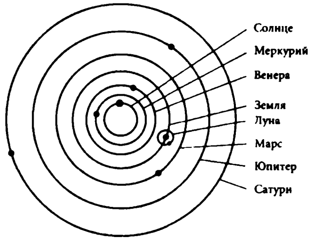
17 Сам Платон вряд ли имел в виду прецессию; больше по теме «платоновский год» см.: Krojer. Astronomie der Spätantike, die Null und Aryabhata. S. 49–61.

18 Законы. 822a.

19 Второе изображение можно найти в книге: Van der Waerden. Die Astronomie der Griechen. S. 108. Там, на страницах 106–108, также обсуждаются происхождение и особенности астрономических взглядов позднего Платона.



астрономические взгляды раннего Платона



астрономические взгляды позднего Платона

Земля имеет форму шара, Солнце находится в центре системы, планеты движутся в правильной последовательности — второе, новое представление Платона о движении планет удивительно близко современной картине Солнечной системы[20].

Интересно также, что Платон в ходе своих астрономических рассуждений сформулировал закон, который в наше время записывается как

$$v = a \cdot r$$

где v — линейная скорость, a — угловая скорость, r — радиус. Как писал Платон,

[20] Сферическая форма Земли была известна в средневековой Европе и редко кем-либо оспаривалась. Однако в то время господствовало геоцентрическое мировоззрение Птолемея, в котором совпадали библейские и аристотелевские взгляды. Лютер, к примеру, указывал на то, что, согласно Нав. 10, 12–13 («Иисус воззвал к Господу в тот день, в который предал Господь Аморрея в руки Израилю, когда побил их в Гаваоне, и они побиты были пред лицем сынов Израилевых, и сказал пред Израильтянами: стой, солнце, над Гаваоном, и луна, над долиною Аиалонскою! И остановилось солнце, и луна стояла, доколе народ мстил врагам своим»), останавливалась не земля, а именно солнце! Тем не менее и гелиоцентрическая система мира не была предана забвению; ее знал Николай Кузанский, а Коперник представлял ее в виде арифметической модели (1543: «De Revolutionibus Orbium Coelestium»). Позже, с 1610 г., наблюдения Галилея показали, что гелиоцентрическая модель соответствует физической реальности, — известно, что по этой причине Галилей вступил в конфликт с церковью.

> мы понимаем, что при таком вращении одно и то же движение, вращая одновременно и самую большую, и самую малую окружность, распределяется соответственно величине этих кругов[21].

Это доказывает, что «Платон, очевидно, обладал интуитивным пониманием одного из возможных прочтений современной формулы: линейная скорость и радиус прямо пропорциональны»[22].

1.4. Тяжелый труд учения

В VII Письме Платон говорит о трудностях обучения философии и сожалеет о том, что есть люди, которые «набиты ходячими философскими истинами», но «имеют лишь налет кажущегося знания, как люди, кожа которых покрыта загаром» — «таким людям надо показать, что из себя представляет философия в целом, какие сложности она с собой несет и какой требует затраты труда»[23]. Таких же «затрат труда» требует и математика. В «Государстве» мы находим следующие знаменательные высказывания о геометрии тел: Сократ спрашивает, почему эта область почти не исследована, хотя «правильнее было бы после второго измерения рассмотреть третье», и сам же на это отвечает:

> Причина тут двоякая: нет такого государства, где наука эта была бы в почете, а исследуют ее слабо, так как она трудна. Исследователи нуждаются в руководителе: без него им не сделать открытий. Прежде всего, трудно ожидать, чтобы такой руководитель появился, а если даже он и появится, то при нынешнем положении вещей те, кто исследует эти вещи, не стали бы его слушать, так как они слишком высокого мнения о себе. Если бы все государство в целом уважало

---

21 Законы. 893c.

22 Mourelatos. Knowledge, speculation, and myth in Plato's accounts of the order and the distances of celestial bodies. P. 89.

23 VII Письмо. 340.

> такие занятия и содействовало им, исследователи подчинились бы, и их непрерывные усиленные поиски раскрыли бы свойства изучаемого предмета[24].

Из собственного опыта Платон знает, что высшее геометрическое знание дается нелегко. Геометрия — «трудная» наука: лишь «непрерывные усиленные поиски» при поддержке опытного руководителя и государства могут дать результат. И даже этого недостаточно — истинный философ дожен обладать особым характером[25].

Подробнее увидеть, как Платон стремился усваивать актуальные для своего времени знания, какие трудности ему приходилось при этом преодолевать, а также его готовность к восприятию новых сведений и научных открытий, можно на примере астрономии. В диалоге «Федон» есть отрывок, демонстрирующий этот путь поиска и обучения. Сначала Платон старался усваивать знания

> о Солнце, Луне и звездах – о скорости их движения относительно друг друга, об их поворотах и обо всем остальном, что с ними происходит: каким способом каждое из них действует само или подвергается воздействию... С величайшим рвением принялся я за книги Анаксагора, чтобы поскорее их прочесть и поскорее узнать, что же всего лучше и что хуже[26].

Притом он констатировал, что нелегко получить надежный результат, так как в этой области существуют совершенно различные теории:

> Один изображает Землю недвижно покоящейся под небом и окруженною неким вихрем, для другого она что-то вроде мелкого корыта, поддерживаемого основанием из воздуха[27].

---

[24] Государство. 528b–c.

[25] Например: «Прежде всего у того, кто за нее [философию. — *В. З.*] берется, не должно хромать трудолюбие, что бывает, когда человек трудолюбив лишь наполовину, а наполовину ленив» (Государство. 535d).

[26] Федон. 98a–b.

[27] Федон. 99b.

Платон сознает, что он не может принять решение в этой ситуации, поскольку не является астрономом. Он мог бы подробно описать астрономическую теорию,

> но доказать, что так именно оно и есть, никакому Главку, пожалуй, не под силу. Мне-то, во всяком случае, не справиться, а самое главное, Симмий, будь я даже на это способен, мне теперь, верно, не хватило бы и жизни на такой длинный разговор[28].

Но что касается Земли, здесь Платон с уверенностью может сказать следующее:

> Вот в чем я убедился. Во-первых, если Земля кругла и находится посреди неба, она не нуждается ни в воздухе, ни в иной какой-либо подобной силе, которая удерживала бы ее от падения, — для этого достаточно однородности неба повсюду и собственного равновесия Земли, ибо однородное, находящееся в равновесии тело, помещенное посреди однородного вместилища, не может склониться ни в ту, ни в иную сторону, но останется однородным и неподвижным[29].

По-видимому, математико-астрономические исследования нелегко давались Платону, и это, кстати, неудивительно, в свете того, что мы знаем о Гауссе, «короле математиков» — иногда ему приходилось трудиться много лет, чтобы найти верное решение[30]. Тем более замечательно, что Платон приступил к этим исследованиям уже на старости лет и, как мы уже говорили, не боялся отвергать свои прежние представления, если новая теория казалась ему более ясной и убедительной.

---

28 Федон. 108d.

29 Там же. 108e–109a.

30 В своем письме к Бесселу от 23 декабря 1816 г. Гаусс писал об исследованиях в сфере высшей арифметики, что они «мучают меня уже почти двенадцать лет. Они принадлежат к таким проблемам, где невозможно заранее предсказать, что будешь делать завтра, где к цели, возможно, приведет, после 999 неудачных попыток, удачная тысячная» (Gauss. Werke X/1. S. 76).

В связи с этим можно отметить, что Платон сравнительно поздно вступил в тесный контакт с математикой, почти не обращаясь к ней в своих ранних диалогах. Первым, кто посвятил Платона в точные науки, был знаменитый пифагорейский математик Архит из Тарента[31].

1.5. Платон как наставник и вдохновитель

Мы говорили, что Платон обладал довольно глубокими математическими познаниями и, согласно Целлеру, «наряду с философией он преподавал также и математику и принадлежал к первым ее знатокам своего времени»[32]. Фаулер выражается несколько сдержаннее, но и он считает Платона знатоком в этой области: «Хотя основные интересы Платона были сосредоточены на диалектике, по отношению к которой математика рассматривалась лишь как подготовительная ступень, он демонстрирует не менее глубокое знание важнейших особенностей и проблем технической математики, и у нас нет никаких свидетельств того, что он не мог общаться на равных с математиками, которые, видимо, преобладали в кругу друзей и единомышленников, сложившемся вокруг него, если не составляли этот круг полностью»[33].

Другой вопрос, являлся ли сам Платон творческим математиком? На это непросто ответить, так как в диалогах мы не находим настоящих математических исследований в узком смысле этого слова. По мнению Бурбаки, Платон был просто «одержим математикой», но не привнес «ничего нового в эту область»[34]. Нейгебауэр также оспаривал значение роли Платона в сфере математики[35].

---

[31] См.: Ван дер Варден. Пробуждающаяся Наука. С. 209–210.

[32] Целлеръ. Очеркъ истории греческой философии. § 39.

[33] Fowler. The Mathematics of Plato's Academy. P. 104.

[34] Бурбаки. Очерки по истории математики. С. 11.

[35] «Мне кажется очевидным, что роль Платона была сильно преувеличена. Его собственный непосредственный вклад в математику, очевидно, равен

Ознакомимся, однако, со следующими преданиями, которые сообщают о самостоятельной математической работе Платона. В «Послезаконии» (Epinomis) Филиппа Опунтского есть сведения, что Платон занимался проблемой увеличения куба в определенной пропорции (обобщение Делийской проблемы) и, вероятно, использовал собственную стереометрическую конструкцию[36]. Во введении к своему комментарию к первой книге «Начал» Евклида Прокл говорит, что Платон заложил основу теоремы о делении прямых линий, которая в дальнейшем была подробно разработана другими[37]. В том же самом труде Прокл пишет и о задаче нахождения трех натуральных чисел, которые определяют прямоугольный треугольник: «Специальные методы были выведены для поиска таких треугольников, один из них приписывают Платону, другой Пифагору... Метод Платона выводится из четных чисел. Он принимает данное четное число за одну из сторон, прилегающих к прямому углу, делит его на две части и половину возводит в квадрат, и теперь, добавив к получившемуся квадрату 1, получает гипотенузу, а вычитая из квадрата 1, получаем вторую из сторон,

---

нулю. То, что в течение некоторого времени математики ранга Евдокса принадлежали к его кругу, не является доказательством влияния Платона на математические исследования. Весьма примитивный характер тех математических процедур, которые используют в своих примерах Платон и Аристотель, не позволяют предположить, что Теэтет или Евдокс могли чему-то научиться у Платона. Часто встречающееся представление, что Платон "режиссировал" исследования, к счастью, не подтверждается фактами» (Neugebauer. The exact sciences in antiquity, 1951. P. 146).

36 Подробные рассуждения об этом см. у Ван дер Вардена. Пробуждающаяся наука. С. 194–197.

37 Прокл Диадох. Комментарий к первой книге «Начала» Евклида. Введение, часть II, глава 4 (согласно изданию: Morrow. Proclus: A commentary on the first book of Euclids Elements. P. 55: «...and multiplied the number of propositions concerning the "section" which had their origin in Plato...»; в русском издании часть II, глава 8: «Евдокс Книдский был немного младше Леонта и был дружен с окружением Платона; он первый увеличил число так называемых общих теорем, прибавил к трем пропорциям еще три и — взяв у Платона основу — разработал множество видов сечения»).

прилегающих к прямому углу»[38]. В наших современных алгебраических терминах инструкция Платона выглядит так: первый катет a (четное число), второй катет $b = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1$, гипотенуза $c = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$. Например, если a = 4; 6; 8; 10; 12, то мы получим прямоугольные треугольники со сторонами, соответственно (3, 4, 5); (6, 8, 10); (8, 15, 17); (10, 24, 26); (12, 35, 37). Факт, что по этому методу a^2+b^2 всегда равно c^2, легко доказывается алгебраически:

$$a^2 + \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1\right]^2 = a^2 + \frac{a^4}{16} - 2\cdot\frac{a^2}{4} + 1 = 4\cdot\frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{16} - 2\cdot\frac{a^2}{4} + 1 = \frac{a^4}{16} + 2\cdot\frac{a^2}{4} + 1 = \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1\right]^2$$

Далее, существуют высказывания, подтверждающие стремление Платона найти пригодные для геометрии определения (definitio). Определение 2 в «Началах» Евклида, например[39], «легко могло бы быть приписано школе Платона, если не самому Платону»[40]. Определению 4 у Евклида[41] предшествует высказывание Платона: «Прямое — то, центр чего не дает видеть оба края»[42]. А определение 15[43] звучит у Платона так: «Круглое ведь есть то, края

---

[38] Прокл Диадох. Комментарий к первой книге «Начала» Евклида. Пропозиции. Ч. II. С. 428–429. Томас Хит подробно излагает, каким образом Платон мог бы найти свою формулу; см.: Heath. The thirteen books of Euclid's elements. Vol. 1. P. 356–360, 384–385.

[39] «Линия же — длина без ширины».

[40] Heath. The thirteen books of Euclid's elements. Vol. 1. P. 158. Хит ссылается на критическое замечание Аристотеля: «Далее [допускают ошибку], если род делят через отрицание, как, например, те, кто определяет линию как длину без ширины… а это допускают те, кто признает идеи» (Аристотель. Топика. VI 6, 143b11, 143b29).

[41] «Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней».

[42] Парменид. 137e. Смысл таков: если мы посмотрим из одного края на другой, мы не увидим его, мы увидим только центральный пункт линии.

[43] Определение 15 у Евклида гласит: «Круг есть плоская фигура, содержащаяся внутри одной линии, на которую все из одной точки внутри фигуры падающие прямые равны между собой».

чего повсюду одинаково отстоят от центра»[44]. Наконец, по Диогену Лаэртскому, Платон первым употребил такие понятия, как *противостояние*, *продолговатое число* или *открытая плоскость граней*[45].

Существует также предание, что Платон «первый подсказал Леодаманту Фасосскому *аналитический* способ исследования»[46] — один из важнейших и значительных методов научного познания[47]. Слово «подсказал» [εἰσηγήσατο] «обычно понимают так, что Платон *изобрел* этот метод»[48], но, даже если это не так[49], высказывание

44 Парменид. 137e.

45 Диоген Лаэртский. О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов. III, 24.

46 Там же.

47 См., например, рассуждения Пойа о роли анализа и синтеза не только в математике, но и в повседневной жизни: Pólya. Schule des Denkens. S. 163–170. На с. 168 он кратко описывает эти методы таким образом: «Анализ — это выдумка, синтез — воплощение; *анализ — это придумывание плана, синтез — осуществление плана*».

48 Heath. The thirteen books of Euclid's elements. Vol. 1. P. 134. Примеч. 1.

49 На этот счет существуют определенные сомнения. Хит пишет об этом так (Op. cit. С. 134. Примеч. 1): «Но Тэннери настойчиво подчеркивает, как трудно объяснить, в чем же могло состоять открытие Платона, если понимать *анализ* в том смысле, которое придает ему Папп, где мы видим не более чем ряд последовательных *редукций* проблемы, пока она, наконец, не сводится к известной проблеме. С другой стороны, слова Прокла о том, что обдумываемая проблема сводится к уже "определенному принципу", предполагают, что мы имеем в виду не что иное, как процесс, описанный в конце VI книги "Государства", в которой диалектик (в отличие от математика) использует гипотезы как ступени на пути к закону, ни в коей мере не являющемуся гипотетическим, а затем может начать обратный спуск, шаг за шагом проверяя каждую из гипотез, с помощью которых он совершал восхождение. Это описание, конечно, не относится к математическому анализу, но оно, возможно, зародило идею, что анализ был открыт Платоном, поскольку *анализ* и *синтез*, следующие друг за другом, связаны тем же образом, что и восходящее и нисходящее движение в интеллектуальном методе диалектика. И возможно, достижение Платона заключалось в том, что он с точки зрения логической строгости заметил

Диогена свидетельствует хотя бы о том, что Платон играл важную роль наставника. И действительно, настоящие заслуги Платона в сфере математики состоят не столько в результатах собственных исследований, сколько в его роли наставника и вдохновителя. Прокл пишет: «За ними был Платон, стараниями которого геометрия — как и остальные науки — получила величайшее развитие: известно, сколь часто он использует в своих сочинениях математические рассуждения и повсюду пробуждает в преданных философии восторженное отношение к математическим наукам»[50]. В своем комментарии к «Государству» (528a–d) математик и историк древней науки Ван дер Варден также отмечает, что «Платон здесь, так сказать, имеет в виду руководство своей Академией. Он хотел, чтобы математики в Академии занимались стереометрией более систематически под его руководством...»[51]. Руководство Платона также подтверждается следующим сообщением, которое заслуживающий доверия Симпликий заимствует у астронома Созигена: «По Евдему, Платон поставил перед астрономами задачу: при помощи каких равномерных упорядоченных круговых движений можно "спасти", т. е. объяснить, планетные явления. Первым, кто дал решение этой задачи, был Евдокс»[52]. Интересен также отрывок из «Платоника» (диалог Эратосфена в форме платоновского диалога), который цитирует Ван дер Варден: «Сам Платон порицал друзей Евдокса, Архита и Менехма, которые хотели свести удвоение куба[53]

важность того, что утверждающий синтез следует за анализом и, таким образом, возвел в абсолютно неопровержимый метод частичный и неясный анализ, от которого зависели работы его предшественников».

50 Прокл. Указ. соч. Ч. II. Гл. 4 [8].

51 Ван дер Варден. Пробуждающаяся Наука. С. 194.

52 Там же. С. 244–45.

53 Задача об удвоении куба («делийская задача») заключается в построении циркулем и линейкой стороны куба, объем которого вдвое больше объема данного куба. Название «делийская задача» связано с преданием, по которому жители острова Делос, чтобы избежать чумы, должны были исполнить повеление дельфийского оракула: удвоить объем жертвенника, не меняя при этом его кубической формы.

к механическим построениям, ибо они думали получить две средние пропорциональные не из теоретических соображений; но ведь таким образом уничтожается и гибнет благо геометрии, и этим путем геометрия возвращается обратно к чувственному, вместо того чтобы подыматься выше этого и твердо держаться вечных, нематериальных образов, пребывающий в коих бог есть вечный бог»[54]. Даже если историчность этого сообщения подлежит сомнению, все же оно описывает роль Платона впечатляющим образом: он мог давать задания своим коллегам-математикам и оценивать их решения. В общем, можно описать роль Платона в Академии словами Чернисса: «Кажется, что роль Платона была не ролью "учителя" или даже "директора научного общества", распределяющего темы исследовательских работ или конкурсных эссе, но ролью самостоятельного мыслителя, чьи проницательность и навыки в формулировании проблем позволяли ему давать общие рекомендации и отпускать критические замечания в адрес других мыслителей, которые уважали его мудрость и могли находиться под его влиянием, но считали себя, по крайней мере, столь же компетентными в отдельных вопросах специальных дисциплин, как и сам Платон»[55].

---

[54] Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 224. Автор на основании своих исследований описывает ситуацию следующим образом: «По-видимому, в "Платонике", возражая Архиту, Евдоксу и Менехму, Платон сказал: "Вы нашли механические решения? В этом нет никакого искусства; даже и я, совсем не геометр, могу это сделать: для этого нужен только схематический чертеж, даже нет надобности в предварительном геометрическом решении задачи. Вот, взгляни… Но если поступать так, то все благо геометрии совершенно разрушается, так как внимание от чистой геометрии отвращается к материальным предметам"» (С. 226).

[55] Cherniss. The Riddle of the Early Academy. P. 65. См. также: Cherniss. Plato as mathematician. P. 395–425, где Чернисс оспаривает мнение Маглера о Платоне как плодотворном математике: «С вероятностью, какой обладает любая догадка подобного рода, можно предположить, что, независимо от поощрения как новых предложений, так и критики, которые он [Платон], возможно, оказывал знакомым специалистам в математике, и несмотря на его заинтересованность в их рассуждениях и энтузиазм по поводу пропе-

Платон не только всячески содействовал развитию математики[56], но и поддерживал тесные дружеские отношения с некоторыми из самых значительных математиков того времени, среди которых можно упомянуть Архита Тарентского, Евдокса Книдского[57], Теэтета из Афин. Архит обучил Платона основам математики, а Евдокс и Теэтет часто принимали участие в научной жизни Академии. Некоторые математики даже «жили вместе в Академии, сообща занимаясь своими исследованиями»[58]. Ван дер

девтической ценности их дисциплины, он все же настаивал бы на том, что сферой его собственной деятельности была диалектика, а не математика. Вероятно, он отверг бы попытки стереть различия между этими сферами, подобные тем, что предпринял доктор Маглер, или же перевернуть выстроенную им иерархию важности этих дисциплин, даже если бы такие попытки преследовали благую цель повышения репутации Платона в наших глазах, что могло бы случиться, если бы он притворился, что был не только философом, но и, в первую очередь, продуктивным математиком» (P. 425).

56 Например: «Филипп Мендейский, ученик Платона, обращенный им к математическим наукам, проводил свои изыскания под руководством Платона» (Прокл. Комментарий. Ч. II. Гл. 4 [8]).

57 «Евдокс Книдский был немного младше Леонта и был дружен с окружением Платона; он первый увеличил число так называемых общих теорем, прибавил к трем пропорциям еще три и — взяв у Платона основу — разработал множество видов сечения» (Прокл. Там же. Ч. II. Гл. 8).

58 Прокл. Там же. Ч. II. Гл. 4 (цит. согласно изданию Morrow. Proclus: A Commentary on the First Book of Euclids Elements. P. 51: «These men lived together in the Academy, making their inquiries in common»; в русском издании текст находится в части II главы 8, и перевод представлен в укороченном варианте: «Все они вместе занимались научными изысканиями в Академии». Греческий текст подтверждает английский вариант: διῆγον οὖν οὗτοι μετ' ἀλλήλων ἐν Ἀκαδημίᾳ κοινὰς ποιούμενοι τὰς ζητήσεις. Эта деталь имеет особое значение: она показывает тесное и непрерывное сотрудничество философов и математиков в Академии). То, что крупнейшие ученые пленились Академией Платона, объясняется важной причиной, о которой упоминает Дент: «Не случайно собирались вокруг Платона οἱ περὶ ταῦτα ἐσπουδακότες [те, кто всерьез, увлеченно чем-то занимаются] (Eudemos fr. 148). Философия "абстрактных сущностей" — если можно выразиться таким образом — должна была выглядеть захватывающей для науки, образ

Варден обобщает: «В центре научной жизни стояла фигура Платона. Он возглавлял и воодушевлял научную работу как внутри, так и вне своей Академии. Великие математики Тээтет и Евдокс и все другие, перечисленные в каталоге Прокла, были друзьями Платона, его учителями в области математики и его учениками в области философии»[59]. Очевидно, что Платон стремился собрать вокруг себя близких людей, обладавших ясным научным мышлением. Эти друзья, в отличие от некоторых учеников Платона, интерпретировавших его учение, по словам Евы Сакс, в духе «запутанного мистицизма», были «светлыми и ясными умами, с которыми, как мы видим, Платон близко общался в старости. Это чудесно, что Платон и в преклонном возрасте сохранил стремление привлекать к себе все важное и новое. Демокрит и его атомистика, математика Тээтета и Евдокса, астрономия Евдокса и медицинская наука его преподавателя Филистиона, наука о вращении Земли вокруг оси, обязанная своим существованием Гераклиду Понтийскому, — все это почти 70-летний философ воспринял по-новому: не только с пониманием, но и как стимул к дальнейшим достижениям мысли, как, например, его учение об элементах»[60].

Платон был бесспорным руководителем Академии, но тем не менее в ней царила атмосфера свободных научных дискуссий и приветствовались самые разные точки зрения. Правда, «сотрудники» и ученики высоко почитали своего учителя и даже приписали ему после смерти божественное происхождение. Но сам Платон не искал и не требовал такого уважения; согласно античной традиции,

---

мыслей которой преимущественно формален и абстрактен» (Dönt. Platons Spätphilosophie und die Akademie. S. 64).

59 Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 205. Гайденко замечает, что Платон «был непосредственно связан с крупнейшими математиками своего времени: Тээтетом, Евдоксом и особенно Архитом, его близким другом и учеником, а потому их взаимное влияние друг на друга было прямым и весьма ощутимым для обеих сторон» (Гайденко. Обоснование научного знания в философии Платона. С. 98).

60 Sachs. Die fünf platonischen Körper. S. 234.

пишет И. Н. Мочалова, «по характеру Платон был человеком застенчивым и склонным к уединению. В частности, Гераклид, характеризуя Платона, говорит, что "в юности он был так стыдлив и вел себя так сдержанно, что никто не видел, чтобы он смеялся" (DL. III, 26). Диоген Лаэртский пишет, что "желанием его было оставить по себе память в друзьях или в книгах. Сам же он по большей части сторонился людей" (DL. III, 40). Поэтому, несмотря на интерес к политике, Платон не любил публичных лекций и, вероятно, старался избегать выступлений перед широкой аудиторией...»[61]. К тому же Платон создал в Академии атмосферу «коллективности»[62], антидогматический дух, который Гегель чувствовал и в его диалогах: «Благодаря тому, что сам Платон никогда не выступает под собственным именем, а всегда вкладывает свои мысли в уста других лиц, он избегает даже вида проповеди, догматичности...»[63]

Ван дер Варден подчеркивал этот аспект, приводя конкретный пример отношений Платона с математиком и астрономом Евдоксом: «Отсюда видно, что, хотя философские воззрения Евдокса были очень близки к платоновским, все же в ряде вопросов он являлся противником Платона. Рассказ Диогена Лаэрция о том, что Евдокс и Платон были врагами, наверно, преувеличен, точно так же как и противоположное сообщение Страбона, что Евдокс был любимцем Платона. Насколько мы знаем из лучших источников, к характеру обоих этих людей скорее подходило бы то, что они

---

[61] Мочалова. Метафизика ранней академии и проблемы творческого наследия Платона и Аристотеля. С. 253–254. Мочалова также говорит о «Мусической простоте» и скромности сисситий в Академии (Там же. С. 239).

[62] «Общность этико-политической проблематики, повторяемость названий работ говорят о том, что нередко подобные λόγοι были результатом устных дискуссий между Платоном и его ближайшими друзьями, что лишало работы индивидуального авторства, делая их коллективным трудом Академии. У Аристотеля мы находим множество подтверждений этому: будучи членом Академии, он предпочитает употреблять местоимение "мы", ссылаться на "изданные наши сочинения" (Arist. Poet. 1454 b 18; Met. 1, 9)» (Там же. С. 241).

[63] Гегель. Лекции по истории философии. С. 135.

уважали друг друга, спорили между собой и вместе работали на благо дорогих им обоим наук»[64].

Эту атмосферу, царящую в Академии, Чернисс описывал на примере дискуссии о правильном понимании диалога «Тимей»: «Так как Аристотель и его товарищи по Академии горячо обсуждали сравнительно простой вопрос о том, понимать ли концепцию творения в "Тимее" буквально или нет, то очевидно, что, во-первых, они интересовались этим вопросом достаточно, чтобы спросить ответ у Платона, и, во-вторых, что они либо воздержались от такого обращения, либо он отказался отвечать. Во всяком случае, несомненно, что он и не сказал им, что он имел в виду, и не обсудил с ними сам этот философский вопрос, но позволил им интерпретировать, каждому в соответствии со своими способностями и безо всякой помощи, написанный им текст»[65].

Интересный пример того, что Платон действительно ставил своей целью развитие современной ему математики, можно найти в «Государстве» (528). Там Платон обсуждает план занятий для будущих стражей: они должны учить арифметику, геометрию, и «вращение тел» (т. е. динамику — суть астрономии). Внезапно он прерывает рассуждения и требует, чтобы между геометрией и астрономией стояла наука, для которой у него нет еще имени. Сегодня она называется «стереометрия» — дополнение двухмерной

---

[64] Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 244–245. Мы не хотим сказать, что Платон был единственным философом, допускавшим и даже поддерживавшим мнения, не совпадавшие с его собственными. Уже «ученики Сократа развивали его взгляды в столь различных направлениях — ведь взгляды эти не составляли единого учения и не были письменно зафиксированы» (Жмудь. Наука, философия и религия в раннем пифагореизме. С. 335). Подобным образом и «среди старших платоников существовали разногласия по самым кардинальным вопросам. Никто из значительных учеников Платона, будь то Гераклид, Спевсипп, Ксенократ или Аристотель, не принял платоновскую теорию идей. Более того: никто из академиков, включая и Платона, не считал, по-видимому, что она должна быть принята в качестве доктринальной основы» (Там же).

[65] Cherniss. The Riddle of the Early Academy. P. 75.

геометрии в третьем измерении. Платон знает, что в этой области уже были получены первые результаты, однако построение целостной теории еще не было завершено: для этого требуется хороший руководитель и энергичная поддержка со стороны государства. В дальнейшем важно убедить тех математиков, которые ничего не хотят знать о новой области, в ее пользе и склонить их к сотрудничеству. При этом Платон, очевидно, видит себя в роли такого покровителя и подстрекателя, и это дает нам понимание, зачем он снова и снова вводит математические рассуждения в свои труды: «Он был большим организатором, который постоянно призывает, присматривает, даже с определенной твердостью вмешивается, если ему кажется что-то ошибочным. Он хочет принудить своих читателей изучать математику, которую рассматривает в качестве наилучшей подготовительной школы к более высокой философии, и поощряет своих учеников закончить чудесную систему элементарной геометрии, созданную, дабы существовать вечно. И это удалось ему наконец, несмотря на то что он уже не увидел, как Евклид, ученик его внука, заложил фундамент этой системы, основываясь в том числе на трудах двух самых значительных математиков из круга Платона: учении о пропорции Евдокса, учении об иррациональном, созданном Теэтетом, и стереометрии, общем произведении обоих»[66].

---

[66] Sachs. Die fünf platonischen Körper. S. 159.

Глава 2.

Сущность математики и ее функции

Как Платон понимал сущность математики, в чем видел ее пользу и какую роль отводил ей в своих философских построениях? Ответить на эти вопросы нелегко, учитывая тот факт, что Платон нигде не представил свою философию в виде четкой и завершенной конструкции[1]. Поэтому исследователям приходится упорядочивать упоминания о математике, разбросанные по разным диалогам, чтобы увидеть общую картину. Однако имеется несколько текстов, которые могут помочь нам выделить наиболее важные аспекты платоновского понимания сущности математики и ее функций; их мы и приведем в дальнейшем, снабдив своими комментариями.

2.1. Как достичь математического знания?

В «Меноне» (80е) Сократ обсуждает со своими собеседниками истинность следующей логической уловки софистов: «...человек, знает он или не знает, все равно не может искать. Ни тот, кто знает, не станет искать: ведь он уже знает, и ему нет нужды в поисках; ни тот, кто не знает: ведь он не знает, что именно надо искать». Сократ опровергает этот софизм. Действительно, в процессе изучения математики мы всегда находимся, так сказать, *между* «Я вижу, я знаю» и «Я не имею никакого представления». Мы способны «искать», поскольку уже обладаем некоторым первоначальным знанием. Но откуда оно у нас?

---

1 У Платона были сильные сомнения в возможности письменной фиксации философских мыслей. Об этом мы будем говорить в параграфе 4.4.

Чтобы лучше понять, как возможно «обретение знания», вспомним о том, что греки различали пять видов познания[2]. Первые четыре происходят из непосредственного жизненного опыта, а именно: σοφία — практическое мастерство (от σοφός — «знаток»); γνώμη — распознавание глазом; σύνεσις — распознавание ухом; ἱστορία — узнавание с помощью очевидцев. Посредством этих четырех способов знание и приобретается — либо самостоятельно, либо в процессе наглядного обучения при участии мастера или преподавателя. Однако имеется еще и пятый вид, μανθάνειν — он применим лишь к чему-то такому, что не зависит от индивидуального жизненного опыта, существуя отдельно от него. Тот факт, что нечто в этом роде поистине существует и при этом его возможно познать, является для нас загадкой, так как совершенно неясно, какой из органов чувств должен быть для этого задействован. Платон первым описал и истолковал эту загадку, придя к выводу, что отсутствующий орган познания — это воспоминание[3] о том, что «прежде душе было известно»:

> А раз душа бессмертна, часто рождается и видела все и здесь, и в Аиде, то нет ничего такого, чего бы она не познала; поэтому ничего удивительного нет в том, что и насчет добродетели, и насчет всего прочего она способна вспомнить то, что прежде ей было известно. И раз все в природе друг другу родственно, а душа все познала, ничто не мешает тому, кто вспомнил что-нибудь одно, — люди называют это познанием — самому найти и все остальное, если только он будет мужествен и неутомим в поисках: ведь искать и познавать — это как раз и значит припоминать[4].

Применительно к математике это означает следующее: математические истины известны нам еще до того, как преподаватель нам

---

2 Ср. Becker. Mathematische Existenz. S. 677.

3 «Мы ничего не познаем, а то, что мы называем познанием, есть припоминание» (Менон. 81e).

4 Там же. 81c–d.

о них расскажет. Наша душа познакомилась с ними во время своего пребывания в идеальном мире, и теперь это знание дремлет в ней, обитающей в земном теле. Например, такое математическое понятие, как «тождественность», мы не узнали из практического опыта: оно стало известно нам раньше, еще при нашем рождении. Мы не знаем, откуда и как, но оно пребывает в нас:

> Мы признаем, что существует нечто, называемое равным, — я говорю не о том, что бревно бывает равно бревну, камень камню и тому подобное, но о чем-то ином, отличном от всего этого, — о равенстве самом по себе... Ну, стало быть, мы непременно должны знать равное само по себе еще до того, как впервые увидим равные предметы... Но отсюда следует, что, прежде чем начать видеть, слышать и вообще чувствовать, мы должны были каким-то образом узнать о равном самом по себе — что это такое, раз нам предстояло соотносить с ним равенства, постигаемые чувствами: ведь мы понимаем, что все они желают быть такими же, как оно, но уступают ему[5].

Поэтому задача преподавателя состоит лишь в том, чтобы ученик ясно осознал уже имеющиеся у него знания: «Теперь, когда это сказано, мне так кажется»[6]. То, что дело действительно обстоит таким образом, Платон пытается показать в диалоге «Менон» (82–85): Сократ беседует с мальчиком, который, как всем было известно, никогда не посещал школу, и ведет его к пониманию того, что удвоение площади квадрата может быть достигнуто с помощью построения диагонали. После проведенного урока Сократ обращается к своим собеседникам:

> *Сократ:* Если [это знание] всегда у [мальчика] было, значит, он всегда был знающим, а если он его когда-то приобрел, то уж никак не в нынешней жизни. Не приобщил же его кто-нибудь к геометрии? Ведь тогда его обучили бы всей

[5] Федон. 74a, 75a, 75b.

[6] Софист. 226d.

> геометрии, да и прочим наукам. Но разве его кто-нибудь обучал всему? Тебе это следует знать хотя бы потому, что он родился и воспитывался у тебя в доме. — *Менон:* Да я отлично знаю, что никто его ничему не учил[7].

Таким образом, в процессе обучения мы вспоминаем то, что наша душа созерцала в мире чистых идей задолго до нашего рождения. Учение, по Платону, — это припоминание того, что мы однажды знали, но забыли при рождении[8]. Когда мы знакомимся с соответствующими чувственными предметами, забытое знание вновь

---

7 Менон. 85d–e.

8 Федон. 75е. Было бы интересно исследовать, как современные математики относятся к вопросу о предсознательном знании. Подойдет ли пример с сократовским рабом, если мы попробуем рассмотреть процесс преподавания и обучения в области математики в наше время? Вот что пишет по этому поводу Л. Б. Султанова: «Согласно теории неявного знания, такие идеи невозможно чисто механически "пересадить" из одной головы в другую. Эта операция является просто механической вербализацией и ничего общего с подлинным пониманием не имеет. В свете теории неявного знания очевидно, что подлинное наше понимание невозможно без наведения связей с нашим личностным знанием, быть может, через какие-то ключевые термины, имеющие значение в рамках нашего личностного знания. Т. е. все чужие идеи или чужое знание должны укорениться в почве нашего личностного знания, стать частью нашего познавательного опыта. Относительно математики это значит, что новое математическое знание должно стать частью нашего личного опыта математического мышления. Однако, поскольку математика отличается строгой общезначимостью символов и терминов, а также предельным дедуктивизмом, по крайней мере в плане теоретического обоснования, понимание в области математики предполагает сведение личностного фактора к минимуму и не допускает интерпретативных отклонений от общезначимой теории. Следствием недопустимости личностной интерпретативности математической теории является необходимость серьезных личностных затрат на практическое освоение теории в целях решения задач. Наверное, каждый человек, имеющий хотя бы школьный опыт практического освоения математики, согласится, что математика – особый предмет, требующий углубленного изучения и дающийся не всем» (Султанова. Роль интуиции и неявного знания в формировании стиля математического мышления. С. 73).

актуализируется (ἀνάμνησις). Другими словами, Платон открывает *априорный характер* знания[9].

Безусловно, эту формулировку можно назвать несколько смутной. Высказывание «априорный характер знания» вряд ли проясняет больше, чем наглядное выражение: «то, что душа видела раньше». Оба они просто пробуют объяснить тайну этого процесса. Гегель, наверное, был прав в том, что не воспринимал картину, нарисованную Платоном, буквально, но его толкование тоже является лишь попыткой понять, что же происходит на самом деле: «Если Платон говорит о науке как о вспоминании, то он определенно сознает, что он говорит это лишь в притчах и уподоблениях;

---

9 Математические положения, по Канту, являются «априорными синтетическими суждениями». Синтетическое суждение происходит из опыта, априорное суждение — нет. Обе формы суждения одинаково необходимы в математике. «На первый взгляд может показаться, что положение 7 + 5 = 12 чисто аналитическое [суждение], вытекающее по закону противоречия из понятия суммы семи и пяти. Однако, присматриваясь ближе, мы находим, что понятие суммы 7 и 5 содержит в себе только соединение этих двух чисел в одно и от этого вовсе не мыслится, каково то число, которое охватывает оба слагаемых. Понятие двенадцати отнюдь еще не мыслится от того, что я мыслю соединение семи и пяти; и сколько бы я ни расчленял свое понятие такой возможной суммы, я не найду в нем числа 12. Для этого необходимо выйти за пределы этих понятий, прибегая к помощи созерцания, соответствующего одному из них, например своих пяти пальцев или (как это делает Зегнер в своей арифметике) пяти точек, и присоединять постепенно единицы числа 5, данного в созерцании, к понятию семи. В самом деле, я беру сначала число семь и затем, для получения понятия пяти, прибегая к помощи созерцания пальцев своей руки, присоединяю постепенно к числу 7 с помощью этого образа единицы, ранее взятые для составления числа 5, и таким образом вижу, как возникает число 12. То, что 5 должно было быть присоединено к 7, я, правда, мыслил в понятии суммы = 7 + 5, но не мыслил того, что эта сумма равна двенадцати. Следовательно, приведенное арифметическое суждение всегда синтетическое. Это становится еще очевиднее, если взять несколько большие числа, так как в этом случае ясно, что, сколько бы мы ни манипулировали своими понятиями, мы никогда не могли бы найти сумму посредством одного лишь расчленения понятий, без помощи созерцаний» (Кант. Критика чистого разума. Введение. V).

он не спрашивает, как это обыкновенно и серьезно делают теологи, существовала ли душа до своего рождения, причем теологи даже задаются вопросом, где именно она пребывала в то время. Мы не имеем никакого права говорить о Платоне, что у него была такая вера, и у него нет об этом и речи в том смысле, в каком об этом идет речь у теологов. Так же мало у него идет речь о падении, о переходе из совершенного состояния в несовершенное, так что человек должен рассматривать эту жизнь как пребывание в темнице и т. п. Платон высказывает как истину лишь то положение, что сознание в самом человеке есть в разуме божественная сущность и жизнь, что человек созерцает и познает эту божественную сущность в чистой мысли и что само это познание и есть небесная обитель и движение»[10].

Но как бы то ни было, надо отметить, что концепция знания как воспоминания (или как раскрытия чего-то априорного, или как процесса чистого мышления) ни в коем случае не означает, что получить его можно легко, «автоматически». По Платону, душа бессмертна, много раз рождается, а значит, видела все «и здесь, и в

---

[10] Гегель. Лекции по истории философии. С. 157. Ср. также: «Он [Платон], таким образом, представляет себе это в-себе-бытие духа в форме предсуществования во времени, представляет дело так, как будто истина уже существовала для нас в былое время. Но мы должны вместе с тем заметить, что он это дает не как философское учение, а в форме сказания, которое он якобы получил от жрецов и жриц, знающих толк в божественном. Подобного же рода мифы сообщают, говорит он, также и Пиндар, и другие божественные мужи. Согласно этим сказаниям душа человека бессмертна; это она лишь перестает теперь существовать, что мы называем смертью, снова возвращается к существованию, но отнюдь не погибает. "Если же душа бессмертна и часто снова появляется" (переселение душ), "и есть то, что находится как здесь, так и в Гадесе" (в бессознательном), "и все видело, то нет больше места учению: душа лишь вспоминает то, что она некогда уже созерцала". Этот намек на египетские воззрения, который ведь, в сущности, отсылает к некоторому чувственному представлению, подхватывается историками философии, и они говорят: Платон утверждал, что и т. д. Но Платон ничего такого не утверждал; это — вовсе не философское утверждение, и, сверх того, это — также и не его утверждение» (Там же. С. 152–153).

Аиде»[11] и способна вспомнить то, что прежде ей было известно. Но это «припоминание» происходит только в случае, если человек «мужествен и неутомим в поисках: ведь искать и познавать — это как раз и значит припоминать»[12]. Душа не получает знание даром, ей приходится активно использовать свой рассудок, чтобы сводить различные чувственные восприятия к идее[13] — припоминание «того, что там», т. е. в Аиде, происходит «на основании того, что есть здесь»[14]. В этом смысле душа не пассивна: она неизбежно играет свою роль в процессе приобретения знания, как помогающую, так и препятствующую. Некоторые души

> «лишь короткое время созерцали… то, что там; другие, упав сюда, обратились под чужим воздействием к неправде и на свое несчастье забыли все священное, виденное ими раньше. Мало остается таких душ, у которых достаточно сильна память. Они всякий раз, как увидят что-нибудь, подобное тому, что было там, бывают поражены и уже не владеют

---

11 Менон. 81с.

12 Менон. 81с–d. «Мужество в поисках» — это важное, хотя довольно редко упоминаемое качество мыслителя. Здесь вспоминается знаменитое высказывание Кеплера: «Отсутствие мужества — это смерть философии!» (Kepler. Weltharmonik. S. 265).

13 «Ведь человек должен постигать [истину] в соответствии с идеей, исходящей от многих чувственных восприятий, но сводимой рассудком воедино» (Федр. 249b). См. также размышления А. Родина: «Когда мы переводим у Платона "αἴσθησις" как "чувственное восприятие", то здесь нужно сделать акцент не на "чувственном", а на "восприятии": мнение определяется восприятием чего-то "иного", аффектом; "восприятие" это не активное, а пассивное подчинение внешнему аффикатору. Наоборот, логос связан с некоторой собственной активностью, собственной деятельностью, которую Платон называет *мышлением* (νόησις)» (Родин. Математика Евклида в свете философии Платона и Аристотеля. С. 16).

14 Федр. 250а.

> собой, а что это за состояние, они не знают, потому что недостаточно в нем разбираются»[15].

Если же речь идет о сложнейшем математическом познании, то тем более без серьезного мыслительного труда не обойтись. Здесь необходим долгий путь возрастания в мудрости: «Зрение рассудка становится острым тогда, когда глаза начинают уже терять свою зоркость»[16]. Сам Платон, как мы видели, не всегда с легкостью осваивал теории в этой сфере. Поэтому, когда платоновский Сократ говорит:

> О сын Гиппоника Гермоген! Стара пословица: прекрасное дело трудно, когда ему нужно учиться. Так вот, оказывается, и об именах немалая есть наука. Конечно, если бы я успел прослушать у Продика пятидесятидрахмовый урок, после чего, по его словам, можно и самому стать учителем, ничто не помешало бы тебе тотчас досконально узнать всю истину о правильности имен. Да вот такого-то урока я не слыхал, а прослушал всего лишь драхмовый. Поэтому я и не знаю, что будет истинным в делах такого рода[17], —

эти слова являются ироническим примечанием к широко распространенному мнению, будто достаточно найти хорошего (а лучше — высокооплачиваемого!) преподавателя, и знания будут легко получены и усвоены.

---

[15] Федр. 250а. Есть, конечно, и другие требования, например «философский характер», описываемый Платоном в «Государстве» (486). Можно вспомнить и слова Диотимы, указывающие на необходимость любви к исследуемому предмету: «Кто, наставляемый *на пути любви*, будет в правильном порядке созерцать прекрасное, тот, достигнув конца этого пути, вдруг увидит нечто удивительно прекрасное по природе, то самое, Сократ, ради чего и были предприняты все предшествующие труды, — нечто... вечное» (Пир. 210е). Хорошим примером людей, имеющих подобные черты характера, являются те математики в Академии, которые не только занимались своим предметом и учили других, но и интенсивно участвовали в философских лекциях и беседах с Платоном.

[16] Пир. 219а.

[17] Кратил. 384a–b.

Что касается именно математического познания, можно вспомнить историю, рассказанную неоплатоником Проклом: царь Египта Птолемей I однажды спросил Евклида, «есть ли более короткий путь изучения геометрии, нежели "Начала"; а тот ответил, что нет царского пути к геометрии»[18]. Можно вспомнить о «короле математиков» Гауссе — многие думали, что решения приходят к нему легко и практически без усилий, но однажды он написал: «Определение радикала долго мучило меня. Его отсутствие портило мне все остальное, что я находил; за последние 4 года редко бывала неделя, когда я не делал ту или иную напрасную попытку развязать этот узел, — и особенно деятельно в последнее время. Но все размышления, весь поиск оказались совершенно напрасными, каждый раз я в печали должен был отложить перо. Наконец, несколько дней назад, я преуспел...»[19]

С другой стороны, без хорошего учителя, играющего роль «повитухи»[20] в сократовском смысле, также вряд ли можно получить настоящее знание. «Если бы мальчик, — пишет А. В. Родин, — с которым беседует Сократ, оказался вундеркиндом и без лишних слов сразу "по наитию" правильно удвоил квадрат, это тоже не было бы знанием»[21]. «Задавая свои вопросы, Сократ не просто создает условие для того, чтобы душа собеседника "проснулась" и "вспомнила", что она уже знает, но знание само предполагает беседу, в которой собеседники находятся друг к другу в отношении свободного теоретического касания: то же самое умение удвоить квадрат... которым прекрасно владели и вавилонские математики-практики... вне такой беседы имеет статус мнения, а не знания»[22].

---

18 Прокл Диадох. Комментарий к первой книге «Начал» Евклида. Введение. Ч. II. Гл. 8.

19 Письмо Гаусса к Олберсу от 3 сентября 1805 г. (Gauss. Werke X/1. S. 25).

20 Теэтет. 150b.

21 Родин. Математика Евклида в свете философии Платона и Аристотеля. С. 21.

22 Там же. При этом Родин подчеркивает, что Платон, в противоположность софистам, настаивал на *свободной* дискуссии (что ограничивает сравнение

Плодотворное отношение между учителем и учеником можно описать следующим образом. Учитель необходим как человек, обладающий большими познаниями. Важна и его личность[23], но ученик должен не просто верить ему на слово (об этом мы будем говорить ниже), но удостовериться, что действительно понял объясняемое. В определенном смысле, критическое отношение ученика к учителю — единственный путь, на котором ученик и учитель могут стать «собеседниками», которые «находятся друг к другу в отношении свободного теоретического касания»[24]. Поэтому задача учителя состоит в том, чтобы поощрять самостоятельное, критическое мышление ученика. Вот как поступает платоновский Сократ: во время беседы с Гермогеном тот слишком доверчиво и слишком быстро выражает согласие. Поэтому Сократ спрашивает с

с акушеркой). «Единственной речевой формой, в которой может высказываться знание, служит непринужденная *беседа*, тогда как завораживающая речь софиста способна только внушить то или иное мнение» (Там же. С. 20). «Когда последователи Поппера противопоставляют "гуманистический релятивизм" софистов "тоталитарному абсолютизму" Платона, то забывают, что софистический релятивизм связан с практикой убеждения, которую, как мы только что сказали, лишь весьма условно можно назвать либеральной, а платоновский "абсолютизм" — с его концепцией знания, достигаемого в свободной дискуссии» (Там же. С. 20).

23 Так полагает, например, Паже: «Философия начинается тогда, когда студент поражен голосом преподавателя, его словами» (Pagès. Frühstück bei Sokrates. S. 162).

24 «Свободное теоретическое касание» — удачная формулировка А. В. Родина, который ссылается на несколько отрывков из диалогов Платона, например на «Софиста» (229e–230c), где Платон противопоставляет обучение «убеждением» обучению «касанием». Последнее является «теоретическим» в том смысле, что оно направлено на получение не практического, а научного знания, и «свободным» в том смысле, что оно не принуждает ученика к чему-то, а позволяет ему, с помощью учителя, идти своим путем, на котором ум ученика постепенно прикасается к изучаемой области знания: «Именно в свете проблематики теоретического "касания" следует, как представляется, понимать известное учение Платона о "припоминании" знания, которым душа человека, согласно излагаемому Платоном мифу, уже обладает с самого его рождения» (Родин. Указ. соч. С. 19).

наигранным удивлением: «Так в чем же тут дело? Ведь сам-то я здесь ничего не пойму, Гермоген. А ты понимаешь?» На этот вопрос Гермоген вынужден честно ответить: «Клянусь Зевсом, тоже нет»[25].

В то же время важно и критическое отношение учеников к самим себе. Дело в том, что человек легко переоценивает себя и делает ложные выводы. Об этом остроумно говорит платоновский Сократ: тот, кто всегда крутит головой, рано или поздно приходит к выводу, что мир вращается вокруг него:

> *Сократ:* И правда, клянусь собакой, я, кажется, неплохой гадатель, а пришло мне в голову вот что: самые древние люди, присваивавшие имена, как и теперь большинство мудрецов, от непрерывного вращения головой в поисках объяснений вещам всегда испытывали головокружение, и поэтому им казалось, что вещи вращаются и несутся в каком-то вихре. И разумеется, и те и другие считают, что причина такого мнения не внутренний их недуг, но таковы уж вещи от природы: в них нет ничего устойчивого и надежного, но все течет и несется, все в порыве и вечном становлении[26].

И наконец, последнее требование: необходимо иметь достаточно свободного времени для учебы. Вспомним, что ни Платон, ни его помощники не были вынуждены зарабатывать на жизнь физическим трудом. Аристотель сказал по этому поводу, что математические знания были приобретены «прежде всего в тех местностях, где люди имели досуг»[27].

---

25 Кратил. 392e.

26 Там же. 411b–c.

27 Аристотель. Метафизика. 981b22. Правда, Нейгебауэр подвергает сомнению правильность этого тезиса Аристотеля. «Наши фактические знания о развитии научной мысли и социальном положении людей, ответственных за него, настолько фрагментарны, что мне кажется совершенно невозможным проверить любую такую гипотезу, однако она может показаться правдоподобной современному человеку» (Neugebauer. The exact sciences in antiquity, 1951. P. 145).

Заголовком этого параграфа был следующий вопрос: как достичь математического знания? Резюмируя сказанное, мы приходим к следующему выводу: припоминание (ἀνάμνησις) играет в этом важнейшую роль, но оно не происходит просто так, с легкостью и при любых условиях. Необходимо серьезно, тщательно, настойчиво и критически стремиться к знанию, не позволяя себе затеряться в водовороте повседневных мелочей, отвлекающих нас от цели. Для этого, в частности, надо иметь достаточно свободного времени. Кроме того, здесь не обойтись без хорошего «акушера», который ободряет и поощряет ученика, но при этом допускает критическое отношение к себе.

Замечание. Не только в процессе преподавания, но и во всех вопросах, рассмотренных нами выше, существенную роль играет *язык*[28]. Не менее важно и другое: является ли язык *conditio sine qua non* абстрактного математического мышления? Или же математика — это чисто ментальная конструкция, а язык — всего лишь костыль для обмена мыслями, постоянно выступающий причиной недоразумений? Именно такого мнения придерживается школа математических интуиционистов, главных оппонентов платоновского направления математики (о них мы будем говорить ниже). Возможно, Платон согласился бы с ними, хотя бы частично? Что на самом деле означает припоминание, ἀνάμνησις? Каковы механизмы его действия? Ниже мы, в соответствии с общепринятой традицией, представим интуиционистов как непосредственных противников платоников, но было бы интересно исследовать, есть ли у них общие черты. Ведь реальность зачастую намного сложнее, чем наши классификации...

---

[28] См. несколько размышлений о роли языка в философии и математике в параграфе 4.4.

2.2. Математик как охотник, философ как повар

Если мы верим, что душа созерцала математические сущности и законы в *идеальном мире*, то можем заключить, что они не созданы человеком, а существуют там *вечно* и *неизменно*. Например, прямоугольный треугольник не был придуман неким математиком с целью измерения земельных участков — эта фигура в ее чистой форме, как идея, существовала и существует независимо от людей. Теорема Пифагора также является не изобретением математиков, а вневременным идеальным фактом. Для подтверждения концепции припоминания Платон ссылается на старинный миф, согласно которому не человек, а Тевт, один из богов, был первым, кто «изобрел число, счет, геометрию, астрономию»[29]. Конкретно о числах Платон рассуждает в чисто философской манере:

> *Чужеземец:* Всякое число ведь мы относим к области бытия? — *Теэтет:* Если только вообще что-нибудь следует признать бытием. — *Чужеземец:* Так нам поэтому не должно и пытаться прилагать к небытию числовое множество или единство[30].

Итак, математик занимается «божественными предметами». Значит ли это, что он напрямую созерцает нечто божественное, некий «мир идей»? Всегда существовали математики, считавшие это возможным, по крайней мере, в значительной степени[31]. Но, по Платону,

---

[29] Федр. 274c–d.

[30] Софист. 238a–b. См. также: Парменид 144a — «*Парменид:* Следовательно, если существует одно, то необходимо, чтобы существовало и число. — *Аристотель:* Необходимо. — *Парменид:* Но при существовании числа должно быть многое и бесконечная множественность существующего. В самом деле, разве число не оказывается бесконечным по количеству и причастным бытию? — *Аристотель:* Конечно, оказывается».

[31] Например, математик и физик Герман Вейль сказал: «Математические исследования сами по себе поднимают человеческий дух ближе к божественному, чем все другие способы» (цитата из: Pickover. Die Mathematik und das Göttliche. S. 15). Математик Пауль Хенклер писал, что исследования бесконечных рядов показали ему «совершенную математическую

такое созерцание доступно только философу, использующему диалектику. Тем не менее он считает, что математические исследования необходимы в качестве важнейшего этапа философского размышления. Чтобы наглядно продемонстрировать это, Платон применяет следующее сравнение. В диалоге «Евтидем» он использует образ *охоты*, выступающей первым, но незаменимым шагом к истинному познанию. Охотник ищет и убивает[32] дичь: этим его задача исчерпывается[33]. Затем он передает свою добычу *повару* для дальнейшей обработки. Следовательно, Платон считает, что искусство повара (философа) «выше» искусства охотника (математика), так как только повар в состоянии распорядиться добычей с пользой. С другой стороны, без охотника даже самый умелый повар остался бы с пустыми руками и не смог бы приготовить трапезу. Стоит процитировать это место из диалога «Евтидем»:

> Никакое охотничье искусство не идет далее того, чтобы схватить, изловить. А после того как дичь, за которой охотятся, схвачена, звероловы и рыбаки уже не знают, что с

духовность», которую он мог бы приравнять к Богу (Mathesius [Paul Henkler]. Weg zu Gott. S. 264). Физик-теоретик Вальтер Хайтлер придерживался точки зрения, что математика вводит нас в духовный мир и раскрывает высоты, «которые позволяют нам предположить существование божественного с не меньшей силой убежденности, чем та, которую мы находим в человеческом знании вообще» (Heitler. Die Natur und das Göttliche. S. 130). Крайне интересно также, что выдающийся логик и математик Курт Гедель попробовал возродить онтологический аргумент существования Бога с помощью математической логики (см. об этом: Muck. Eigenschaften Gottes im Licht des Gödelschen Arguments. S. 60–86).

32 Выражение «убивает дичь» намекает на процесс абстрагирования, после осуществления которого рассматриваемый объект перестает восприниматься как «живое существо».

33 Этот платоновский образ использует современный математик Бэрроу. Он показывает на примере доказательства теоремы четырех цветов с помощью компьютера, что математиков часто интересует не столько конечный результат, сколько способ его получения и доказательства. Бэрроу резюмирует: «Математики, как правило, больше заинтересованы в охоте, чем в добыче» (Barrow. Ein Himmel voller Zahlen. S. 359).

> нею делать, но передают свою добычу поварам; а геометры, астрономы и мастера счета, которые тоже ведь охотники, ибо не создают сами свои задачи, чертежи и таблицы, но исследуют существующие, — они (поскольку не знают, как этим пользоваться, а занимаются лишь охотой), если только не совсем лишены разума, передают диалектикам заботу об использовании своих находок[34].

Здесь мы находим в сжатой форме три существенных положения: а) математик — это охотник, а не изобретатель или конструктор; б) математик не знает, что делать со своей добычей; в) добыча математика — если мы хотим придать ей высший смысл — передается философу, который принимает ее и приготавливает по всем правилам искусства. Остановимся на этом немного подробнее:

а) Математик — это охотник, а не изобретатель или конструктор. Эта точка зрения стала преобладающей в сфере математики, а придерживающееся ее направление получило название «математического платонизма». Для него характерно рассмотрение математических объектов (точек, линий, плоскостей, тел, чисел, структур и т. д.), а также математических законов как существующих в идеальном мире. Они существовали всегда, еще до возникновения нашей Вселенной, и они существуют независимо от того, думает ли о них какой-нибудь математик или нет. Эти объекты и законы являются частью нематериальной, неизменной реальности. Например, простые числа[35] как обособленная группа натуральных чисел, так же как и законы, определяющие их специфичность, в соответствии с математическим платонизмом считаются не созданием математиков[36], а вечно существующими в идеальном мире вещами. Если,

---

34 Евтидем. 290c.

35 Простое число — это натуральное (т. е. целое положительное) число, имеющее только два натуральных делителя — 1 и самого себя (например, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 и т. д.).

36 Вместе с тем, естественно, не исключено, что математик в своей «охоте» применяет средство, им же самим изобретенное. В ограниченном смысле

например, Евклид в «Началах» (IX, § 20) доказал, что ряд простых чисел бесконечен, то он лишь сделал этот идеальный факт ясным для нас. То же самое можно сказать и о гипотезах, которые ученые до сих пор не могут подтвердить или опровергнуть, — например, о гипотезе Гольдбаха, согласно которой всякое целое число, большее или равное шести, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел, или гипотезе о существовании бесконечного множества простых чисел-близнецов (это пары простых чисел, отличающихся на 2), — в идеальном мире они решены изначально. Это значит, что в конечном итоге математик, в результате всех своих усилий, «получает» свой результат из какого-то «высшего» мира, или даже «от Бога», как это описывал Карл Фридрих Гаусс. Мы уже цитировали его слова: «Определение радикала долго мучило меня...», но сейчас стоит прочитать продолжение: «Наконец, несколько дней назад, я преуспел, — но не благодаря моим тяжелым поискам, а только милостью Бога — так я хотел бы сказать. Ответ пришел внезапно подобно удару молнии, и загадка была разрешена; я сам не смог бы выявлять связующую нить между тем, что я знал раньше, моими последними попытками и тем,

---

он также является конструктором. Венгерский математик А. Реньи написал «платоновский диалог», в котором его Сократ излагает это следующим образом: «Математик больше похож на открывателя. Он — смелый мореплаватель, плавающий по неизвестному морю и исследующий его побережья, острова и водовороты. Я хотел бы только добавить, что математик в некотором роде также изобретатель, в особенности когда он вводит новые понятия. Ведь каждый открыватедь должен быть в какой-то мере изобретателем. Например, если мореплаватель хочет достичь мест, до него никем не достигнутых, он должен построить корабль, который был бы лучше других кораблей. Новые понятия, введенные математиками, подобны новым кораблям, которые поддерживают исследователя в великом море мыслей. Прежде всего математик является открывателем; изобретателем он является лишь постольку, поскольку им должен быть открыватель» (Реньи. Диалоги о математике. С. 33–34). Притом ясно, что «изобретения» математика обусловлены соответствующей объективной необходимостью.

вследствие чего попытка удалась»[37]. Современные представители математического платонизма, конечно же, не имеют обыкновения ссылаться на молнию, ударившую из идеального мира, или на милость Бога — ведь это нежелательная метафизика! — но они могут, по крайней мере, повторить слова блестящего математика и лауреата Нобелевской премии Джона Нэша: «Если мы узнаем что-то в математике, то мы имеем дело с истиной, которая уже существовала, прежде чем мы обнаружили ее. В математике мы совершаем не изобретения, а только открытия»[38]. Охотниками, а не изобретателями чувствуют себя и современные русские математики; так, Е. М. Вечтомов пишет: «Математики открывают новое знание, а не изобретают его. Нет французской математики, но есть математика во Франции». В целом он утверждает, что и сегодня платонизм, — или, лучше сказать, умеренный платонизм, — «признается подавляющим большинством действующих математиков и преподавателей математики»[39].

---

37 Письмо Гаусса к Олберсу от 3 сентября 1805 г. (Gauss. Werke X/1. S. 25).

38 Nash. Sonntags-Interview. S. 4. Антиплатоники выражаются прямо противоположным образом: «Математические объекты не найдены человеком в природе, а сконструированы учеными. Конструктор как программа задает элементы и правила действия с ними» (Сычева. Философия математики на пути от философии к науке. С. 160). Или, без обиняков: «Математик — изобретатель, а не открыватель» (Витгенштейн. Замечания по основаниям математики. I, 167). Следовательно: «Математика есть часть человеческой культуры» (Шапошников. Натурализм и современная философия математики. С. 163).

39 Вечтомов. Математическая реальность и действительность. С. 26. Это, разумеется, не значит, что «математический платонизм» является строго определенной и навечно зафиксированной областью; по мнению Л. Г. Антипенко, например, «фундаментальная онтология Хайдеггера вносит в математический платонизм существенную поправку. Отныне высший мир платоновских идей или эйдосов приобретает статус существования под эгидой времени. Творческий характер времени позволяет по-новому взглянуть на творческие процессы в математике» (Антипенко. Сущность математического творчества в свете фундаментальной онтологии Хайдеггера. С. 7).

б) Математик ничего не умеет делать с добычей. В догреческие времена математика представляла собой лишь свод практических правил; греческие математики, наоборот, интересовались только — или хотя бы преимущественно — теоретическими рассуждениями[40]. Конечно, в повседневной жизни людей математические правила (счет, геометрические измерения, правило «золотого сечения» в архитектуре и т. д.) продолжали играть значительную роль, и Платон одобрял это, требуя даже применения этих навыков на практике[41]. Но на высшем уровне познания эти навыки не работают и как подчеркивал Платон, здесь математик ничего *не может*, он *не в состоянии* сделать что-то стоящее и «умное» со своими результатами.

в) *Добыча математика — если мы хотим придать ей высший смысл, — передается философу, который принимает ее и приготавливает по всем правилам искусства.* Дичь, зверь в лесу, является, так сказать, существом жизненного мира; в этом мире может возникнуть только обыденное, а не «истинное» знание. Математик-охотник убивает зверя, извлекая его из мира жизни и чувств, то есть совершает операцию абстрагирования. Это важное действие, но на нем возможности охотника заканчиваются. Лишь философ-диалектик в состоянии сделать последний, завершающий шаг[42].

---

40 Это доказывают «Начала» Евклида, которые являются чистой математикой (прежде всего геометрией). Эту мысль также подтверждает исторический анекдот: некий человек спросил Евклида, в чем состоит польза математики. Вместо ответа Евклид приказал своему слуге: «Дай этому человеку немного золота, он хочет изучать математику только для получения прибыли!»

41 См., напр.: Государство. 526d — «Поскольку геометрия применяется в военном деле, ясно, что подходит. При устройстве лагерей, занятии местностей, стягивании и развертывании войск и разных других военных построениях как во время сражения, так и в походах, конечно, скажется разница между знатоком геометрии и тем, кто ее не знает».

42 См., напр.: Евтидем. 290c — «Никакое охотничье искусство, — отвечал он [Клиний. — *В. З.*], — не идет далее того, чтобы схватить, изловить. А

Гобелен. Неизвестный художник[43]

после того как дичь, за которой охотятся, схвачена, звероловы и рыбаки уже не знают, что с нею делать, но передают свою добычу поварам; а геометры, астрономы и мастера счета, которые тоже ведь охотники, ибо не создают сами свои задачи, чертежи и таблицы, но исследуют существующие, — они (поскольку не знают, как этим пользоваться, а занимаются лишь охотой), если только не совсем лишены разума, передают диалектикам заботу об использовании своих находок». Или: Государство. 525a–b: «Но ведь арифметика и счет целиком касаются числа? — Конечно. — И оказывается, что как раз они-то и ведут к истине. — Да к тому же превосходным образом. — Значит, они принадлежат к тем познаниям, которые мы искали. Воину необходимо их усвоить для войскового строя, а философу — для постижения сущности, всякий раз как он вынырнет из области становящегося, иначе ему никогда не стать мыслителем».

43 Этот гобелен, разумеется, не имеет отношения к трудам Платона, но служит здесь иллюстрацией. Мы можем в шутку спросить: кто эта третья фигура? Быть может, сам Платон?..

«Числа и круги, которые используют математики, становятся идеями только в руках диалектиков; только философы познают, что идеи образуют существующий мир»[44]. По этой причине Платон считал, что философия по своей природе выше математики[45], а повар — выше охотника: «Диалектика — это единственно правильный и универсальный метод постижения высшего блага, прочие науки изучают только чувственно-вещественное его проявление в осязаемом, видимом мире»[46].

2.3. Распределение арифметики

Платон выделял такие области, как: 1) искусство счета; 2) геометрия; 3) астрономия; 4) музыка — области, которые мы, как уже говорилось[47], объединяем под общим названием «математика». Платоновское понимание первой из этих областей меняется от диалога к диалогу: например, в тексте, приведенном нами чуть ниже, Сократ отделяет «искусство счета и измерения», необходимое при постройке домов и в торговле, от «геометрии и вычислений», применяемых в философии. Таким образом, мы видим стремление Платона провести дополнительное разграничение в области «искусства счета», или, как мы сегодня бы, наверное, сказали, в «арифметике»[48].

---

44 Speiser. Platons Ideenlehre und die Mathematik. S. 49.

45 Ср.: Тимей. 47b, где о философии сказано следующее: «Лучше… не было и не будет подарка смертному роду от богов». Также см. ниже наши рассуждения в параграфе 4.7 «Математика и философия».

46 Тахо-Годи в примечании к отрывку (Платон. Диалоги. М.: Мысль, 1986).

47 Введение. С. 9. Примеч. 1 настоящего издания.

48 Наши термины тоже не единообразны; мы можем, например, говорить о математике и геометрии как о чем-то различном, а в другой раз включить их обе в категорию «математики».

В диалоге «Горгий» Платон разделяет ее еще на две сферы, называя их «искусством арифметики» и «искусством счета»[49]. Искусство арифметики есть «познание четных и нечетных чисел, какова бы ни была их величина» (ср.: Евклид. Начала. VII), а искусство счета «старается установить величину саму по себе и в ее отношении к другим величинам» (ср.: Евклид. Начала. IX).

Платон также делит арифметику на практическую и теоретическую (научную) части. Практики довольствуются приблизительными вычислениями; при этом, например, архитекторы считаются более точными, чем землемеры. В противоположность этому, теоретики обращаются с числами точнейшим образом.

> *Сократ:* Во-первых, об арифметике. Не следует ли одну ее часть назвать искусством большинства, другую же — искусством философствующих? — *Протарх:* На основании какого же признака можно установить различие между двумя этими частями арифметики? — *Сократ:* Различие здесь немалое, Протарх. Одни ведь подвергают счету и нарицательные единицы того, что можно подсчитывать, например: два лагеря, два быка и два самых малых или же два величайших предмета. Другие же никогда не последуют за ними, если только не будет допущено, что между многими тысячами [подлежащих счету] единиц не существует никакого различия. — *Протарх:* Ты прекрасно изображаешь немаловажное различие, существующее между людьми, корпящими над числом; так что есть достаточное основание различать две арифметики. — *Сократ:* Ну а что ты скажешь относительно искусства счета и измерения, применяемых при постройке домов и в торговле, в отличие от геометрии и вычислений, применяемых в философии: нужно ли назвать то и другое одним искусством или же допустить два? — *Протарх:* Следуя прежнему, я, со своей стороны, подал бы

---

[49] Горгий. 451a–c. Платон часто говорит также не о числах, а о прямом и непрямом: «Счетное искусство имеет дело с четными и нечетными числами и с вопросом о том, каково их количество само по себе и по отношению друг к другу» (Хармид. 166a).

> голос за то, что они представляют собой два искусства. — *Сократ:* Правильно[50].

При этом для Платона различие между практической и теоретической математикой (мы используем здесь этот термин в общем смысле) состоит не только в степени точности, но и в самой их сущности. Математики-практики занимаются вещами, подверженными постоянным изменениям, поэтому они принципиально не могут достичь абсолютно верного результата. Математики-теоретики, напротив, имеют дело с неизменными сущностями, поэтому они могут высказывать всеобщие положения[51].

Ван дер Варден, резюмируя платоновскую классификацию математики, пишет: «Платон различает практическую и теоретическую логистику совершенно так же, как он различает практическую и теоретическую арифметику (Горгий. 451а–с). К теоретической логистике относится, прежде всего, изучение чисел в их взаимном отношении друг к другу, которое как раз рассматривается в книге VII [Евклида], в то время как теоретическая арифметика рассматривает "четное и нечетное и какую долю каждое из них составляет в данном отдельном случае". Таким образом, древнее пифагорейское учение о четном и нечетном (книга IX) Платон, по-видимому, относит к теоретической арифметике, а учение о числовых соотношениях (кн. VII и VIII) — к теоретической логистике. Эти теоретические науки он противопоставляет практической арифметике — счету, и практической логистике — вычислениям, и прежде всего вычислениям с дробями»[52].

В двух местах (Горгий. 508, Законы. 757) Платон проводит еще одно различие: между арифметическим и геометрическим равенст-

---

50 Филеб. 56d–57a.

51 Филеб. 59с: «Устойчивое, чистое, истинное и то, что мы называем беспримесным, может быть направлено либо на это, то есть на вечно пребывающее тождественным себе и совершенно несмешанным, либо на то, что наиболее сродно с ним; все прочее надо назвать второстепенным и менее значительным».

52 Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 162.

вом. Речь идет о справедливом распределении каких-либо вещей или должностей; «демократическое» распределение совершается путем жребия, оно представляет собой равенство меры, веса и числа, т. е. арифметическое равенство. Оно необходимо в некоторых ситуациях, но является менее ценным по сравнению с истинным и наилучшим геометрическим равенством, «суждением Зевса», которое наделяет большего — большим, меньшего — меньшим, даруя каждому то, что соразмерно его природе. В представлении Платона, очевидно, геометрия описывает природу самого мира, а арифметика относится к обыденной, торговой жизни: это в чем-то напоминает суждение Хайдеггера, что ἀριθμεῖν означает не «считать», а «считаться с чем-то, быть расчетливым»[53].

2.4. Сущность математических объектов

Что же это такое — число? Вопрос непростой. Однажды голландский математик Давид ван Данциг спросил[54]: когда я пишу на доске:

$$10^{10^{10}}$$

то я знаю, конечно, что имеется в виду. Необходимо возвести число 10 в 10-ю степень, а затем проделать эту операцию еще раз с полученным результатом. Но что, если я в нем сомневаюсь: можно ли сказать, что этому термину соответствует «натуральное число», и можно ли вообще говорить о «результате»? Ведь если мы понимаем натуральные числа как ряд, где каждое новое число конструируется из предыдущего путем добавления единицы ($0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, …, $3004 + 1 = 3005$, и т. д.), то мы никогда не получим степень $10^{10^{10}}$ — она слишком велика для этого. А если кто-то скажет: «Я не вижу границы, я *всегда могу* добавить 1», то ему можно ответить в духе Витгенштейна: «Я не смогу этого сделать, если я умру перед совершением нужного шага — и из-за

53 Heidegger. Platon — Sophistes. S. 18.

54 Dantzig. Is $10^{10^{10}}$ a finite number? P. 273–277.

многих других причин»[55]. Можно, конечно, возразить: «Но я *написал* это число — вот оно: $10^{10^{10}}$!», и тут, видимо, возникает противоречие: «Невозможно последовательно выстраивать настолько большие натуральные числа, как $10^{10^{10}}$, но при этом $10^{10^{10}}$ все-таки является натуральным числом! Противоречие, однако, только выглядит таковым, поскольку при таком шаге неосознанно изменился сам смысл термина "натуральное число"»[56].

Мы не станем подробно останавливаться на том, как эти проблемы были представлены на протяжении двух последних веков[57], но хотим подчеркнуть, что вопрос о характере «существования» чисел совсем не прост. То же самое можно сказать и о геометрических фигурах: точке, линии, треугольнике и т. д., — что они представляют собой в идеальном смысле? Эта проблема касается как математики, так и философии: «Вопрос о характере бытия математических объектов, особенно чисел, был всегда философской проблемой первостепенной важности»[58].

Платон несколько раз поднимал такие вопросы. При этом он различал две математические области: арифметику — науку о числах, и геометрию — науку о фигурах. Им соответствуют два вида объектов: числа и геометрические объекты. По Платону, они имеют разный статус: «Числа — чисто идеальные сущности, а

---

[55] Витгенштейн писал: «"Но я все же знаю и то, что, какое число мне ни предложи, я смогу дать следующее на ним безо всяких колебаний". — Разумеется, если этому не воспрепятствует моя смерть или множество иных происшествий. Но моя уверенность в том, что я смогу продолжить ряд, безусловно, очень важна» (Витгенштейн. Философские работы. Ч. II. С. 5). См. также рассуждения Фреге о возможности бесконечно конструировать новые термины: «Это возможно? Для всемогущего Бога — да, для человека — нет» (Frege. Grundgesetze der Arithmetik. T. II. S. 129).

[56] Dantzig. Is $10^{10^{10}}$ a finite number? P. 274.

[57] Приведем хотя бы один пример: Фреге спрашивает, что такое «переменное число» в какой-то функции? Ведь число не может изменяться! Также не бывает «неопределенного числа»! Тогда о чем же мы говорим на самом деле, используя такие термины? (Frege. Was ist eine Funktion? S. 81–82).

[58] Patzig. Vorwort zu Gottlob Frege, Funktion-Begriff-Bedeutung. S. 11.

линии, фигуры — сущности "промежуточные"»[59]. Дело в том, что геометрия представляет числа и числовые отношения «в виде определенных пространственных образов, схем, т. е. фигур»[60], и поэтому геометрические фигуры находятся немного ближе к чувственному миру, нежели числа. Тем не менее и числа, и фигуры принадлежат миру идей. В отличие от пифагорейцев, рассматривавших числа и геометрические предметы в тесной связи с эмпирическим миром вещей, Платон настаивал на том, что они есть «идеи». Числа — это, так сказать, «чистые идеи», а геометрические фигуры — «идеи в геометрическом пространстве». В дальнейшем для нас будет важно, что оба вида объектов — числовые и геометрические — принадлежат умопостигаемому, а не эмпирическому миру, и поэтому мы будем говорить просто о «математике» и «математических объектах».

Вспомним платоновское сравнение математика с охотником: математик не создает свои объекты сам, он их находит, «выслеживает». Объекты его «охоты» — точка, линия, круг, число, а также понятия отношений, вроде тождественности или неравенства — не созданы человеком, они вечны и неизменны. Это относится в равной степени и к арифметике, и к геометрии. «Существуют абсолютно точные простые фигуры или чистые элементарные формы, например круг или квадрат» — так описывает точку зрения Платона немецкий философ и математик Оскар Беккер[61]. То же самое с числами: как объясняет Платон в «Теэтете», их можно использовать в практической жизни («я вижу пять и еще семь человек»), и при этом могут получаться различные результаты («вместе я вижу двенадцать человек» или, быть может, одиннадцать, — ведь люди могут ошибаться в вычислениях, особенно если они сложны). Но эти ошибки не могут случиться с «самими числами» как чистыми идеями — здесь все определенно,

---

59 Гайденко. Обоснование научного знания в философии Платона. С. 124.

60 Там же.

61 Becker. Mathematische Existenz. S. 586.

точно и вечно: «Когда видишь или осязаешь, можно принять одиннадцать за двенадцать, но мысленно такое представление об этих числах невозможно»[62]. Лишь эти мысленные числа являются объектами математики — объектами, обладающими собственным интеллигибельным способом существования. «Платон никогда не объясняет этот особый вид их существования», заметил Артман[63]. Кроме того, математические объекты являются совсем не тем, чем их считал Аристотель[64]. Мы не ошибемся сильно, если опишем эти

---

62 Теэтет. 195е. По Наторпу, этот отрывок наглядно показывает, что Платон имеет в виду «понятие в себе» и его способ существования. «Мыслимое таким образом понятие существует "в себе" и характеризуется Платоном как особенное, исключительно мысленное существование. Но и такое существование имеет свой смысл. Понятие существует как таковое, если оно достаточно обосновано в систематической взаимосвязи с другими понятиями. Так, математики, говоря о существовании числа π или e и вообще о числах нерациональных, мнимых и т. д., никоим образом не думают при этом об отдельном их проявлении где-то и когда-то, будь то в мире чувств или в другом мире за или над ним (или, может, кто-то предпочитает иначе называть это странное пространственное отношение между нигде и где-то)» (Natorp. Platos Ideenlehre. S. 99).

63 Artmann, Mueller. Plato and mathematics. S. 18. Действительно, уже в самом понятии «существование» кроется проблема: что в действительности это такое? В «Пармениде» (143) аргументация Платона такова: если такое число, как 1, существует, то 1 имеет существование, но число 1 не идентично его существованию: следовательно, число 1 вместе с его существованием представляют 2. Значит, существует число 2. Следовательно, мы имеем 3 элемента: число 1, его существование, и число 2. И так далее. По Расселу, это заключение неверно. «Во-первых, "существование" не является термином, который имеет определенный смысл. А во-вторых, и это важнее, если бы изобрели определенное значение для этого термина, то видели бы, что у чисел нет существования. Потому что они являются на самом деле "логическими фикциями"» (Russell. Einführung in die mathematische Philosophie. S. 154).

64 «Аристотель утверждал, что для Платона математические объекты составляли еще один класс отдельных сущностей, промежуточный между чувственными элементами и идеями, причем эти математические числа и фигуры отличаются от предметов чувственного мира, напоминая идеи тем, что они вечны и неподвижны, но отличаются от идей и сходны с

объекты словами знаменитого математика XIX в. Ш. Эрмита: «Я верю, что числа и функции анализа не являются произвольным созданием нашего разума; я думаю, что они существуют вне нас в силу той же необходимости, как и объекты реального мира, и мы их встречаем или их открываем и изучаем точно так, как это делают физики, химики или зоологи»[65]. Интересно в этом смысле и описание математиком Александром Дьюдни своих ощущений от математических исследований: «Что касается вопроса о том, обнаруживается или творится математика, я должен признаться в почти мистическом опыте, который я всегда переживаю, работая над математической проблемой — опыте, который как будто приходит откуда-то извне. Меня часто охватывает сверхъестественное чувство, что решение моей проблемы существует где-то *там, снаружи*, размышляю ли я сейчас над ней или нет. И если я действительно нахожу решение, то у меня создается непреодолимое впечатление, что я обнаружил его, а не создал»[66]. Есть еще один важный пункт, на который указывал, например, С. Кернер[67]: по мнению Платона, математические объекты являются не идеализациями эмпирических объектов или результатом абстрагирования

чувственными вещами тем, что их существует множество каждого вида. Попытки найти этот "промежуточный класс" в диалогах не увенчались успехом, и снова и снова было положительно доказано, что Платон ни в одном месте в своих трудах не признавал математические числа и фигуры как сущности, отдельные от чувственного с одной стороны, и от идей с другой» (Cherniss. The Riddle of the Early Academy. P. 75–76). Так рассуждает и Ведберг: «Платон обычно, как нам представляется, предполагает простую онтологическую дихотомию идей и практических элементов, которая не оставляет места для промежуточного класса математических объектов» (Wedberg. Plato's Philosophy of Mathematics. P. 12).

65 Цит. по: Бурбаки. Очерки по истории математики. С. 29. В противоположность этому взгляду математические формалисты «не интересуются проблемами, поставленными "парадоксами", и порывают с воззрениями Платона, который стремится придать математическим понятиям интеллектуальное "содержание", общее для всех математиков» (Там же. С. 47).

66 Dewdney. Reise in das Innere der Mathematik. S. 13.

67 Körner. Philosophie der Mathematik. S. 20.

(ведь тогда фундаментом бытия оказался бы эмпирический мир), а частью единственной подлинной реальности. И когда мы, жители Земли, обнаруживаем какие-то истины или закономерности, мы только осознаем и описываем отношения между этими объектами, а сами эти истины и закономерности существуют независимо от того, знаем мы о них или нет[68].

В диалоге «Тимей» Платон укрепляет свое представление о вечном и неизменном существовании математических объектов, ссылаясь на их творение Демиургом. Платон разделяет эти объекты на «тождественное» и «иное» и говорит, что мы, под влиянием бурных эмоций, часто воспринимаем и используем эти фундаментальные для математики понятия совершенно неверно. Но (и можно сказать: «Слава богу!») эти объекты «не могут быть до конца разрушены никем, кроме того, кто их сопряг»[69]. Математика — это божественное творение.

Учение Платона о вневременном бытии математических объектов не было принято его ближайшим учеником Аристотелем, для которого математические понятия — всего лишь результаты процесса абстрагирования в ходе мыслительной деятельности человека, в которую не внедряются «вечные понятия»: «Рассуждающий же о природе изучает все виды деятельности и состояния такого-то тела и такой-то материи. А то, что не таково, изучает другой, при случае — сведущий в искусстве, например строитель или врачеватель; свойства же, которые хотя и неотделимы от тела, но, поскольку они не состояния определенного тела и берутся отвлеченно от тела, изучает математик»[70].

---

[68] И еще: будучи результатом идеализации, математические объекты неизбежно носили бы следы «нечеткости» эмпирических объектов, и это недопустимо для Платона: «он отличает острые математические формы от нечетких эмпирических признаков» (Körner. Op. cit. S. 207).

[69] Тимей. 43d.

[70] Аристотель. О душе. I, 1; 403b, 11–15. См. также: Никомахова этика. VI, 9; 1142a 18 — «Почему, в самом деле, ребенок может стать математиком, но мудрым природоведом не может. Может быть, дело в том, что [предмет

В наши дни позицию Аристотеля поддерживают математики конструктивистского и интуиционистского направлений. В качестве примера мы приводим здесь текст нидерландского интуициониста Аренда Гейтинга, описывающий воображаемую дискуссию между платоническим математиком *А* и неплатоническим математиком-конструктивистом *Б*. В начале беседы *А* ссылается на теорему, гласящую: «Имеется бесконечное множество пар простых чисел»[71]. Эта теорема до сих пор не доказана. Тем не менее математик *А* уверен, что «в принципе» вопрос уже решен, независимо от будущего доказательства. Но математик *Б* совершенно с этим не согласен. Для него наличие доказательства, сделанного человеком, — решающий факт. Доказательство — это определенная математическая конструкция, и пока эта конструкция не выстроена, вопрос о правильности теоремы принципиально открыт. В ответе своему оппоненту-платонику конструктивист *Б* мог бы сказать: «Если вы, дорогой коллега, хотите защищать свою позицию, вы вынуждены обращаться к метафизическим понятиям, к миру математических сущностей, существующему независимо от нашего знания. Но математика не должна зависеть от мира вечных идей. Я признаюсь, что все математики в каком-то смысле убеждены в существовании вечной истины, но если они попытаются определить этот смысл более точно, то неизбежно запутаются в лабиринте метафизических трудностей, избежать которых можно только в том случае, если метафизика отделена от математики»[72].

математики] существует отвлеченно, а начала [предметов философии — мудрости и физики] постигаются из опыта?» Подробное изложение аристотелевского понимания математики принадлежит перу Беккера: Becker. Mathematische Existenz. S. 683–686.

71 Пара простых чисел (так называемые близнецы) — это два простых числа, между которыми есть только одно четное число, например: 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19.

72 Heyting. Intuitionism. Цит. по: Grundlagen der modernen Mathematik. S. 65–67. Более подробное изложение интуиционистских взглядов см.: Гейтинг. Интуиционизм.

Интересно, что уже софист Протагор отказался от представления, что геометрия основана на идеальных, вечных объектах. Как сообщает Аристотель, Протагор утверждал, что касательная имеет с окружностью больше чем одну точку соприкосновения[73]. Это будет верным, если иметь в виду не идеальные, а нарисованные или встречающиеся в природе линии и круги. Но для Платона, как мы уже видели, геометрическая фигура была не «предметом», а «идеей», которую мы можем охватить лишь мысленно. Платоновская геометрия является наукой, «которой занимаются ради познания вечного бытия, а не того, что возникает и гибнет»[74]. Поэтому, если математики

> пользуются чертежами и делают отсюда выводы, [то] их мысль обращена не на чертеж, а на те фигуры, подобием которых он служит. Выводы свои они делают только для четырехугольника самого по себе и его диагонали, а не для той диагонали, которую они начертили[75].

---

73 «Окружность соприкасается с линейкой не в точке, а так, как указывал Протагор, возражая геометрам» (Аристотель. Метафизика. II, 2, 997b).

74 Государство. 527b.

75 Государство. 510c–e. А. В. Родин пишет об этом: «Действительно, теоретическая математика пользуется чертежами и вычислительным инструментарием, и без них она не была бы возможна, однако... нужно признать, что чертежи и вычисления определяют скорее предмет математики, но ни в коей мере не ее теоретический статус. То отвлечение от практических конкретностей, о котором можно говорить при работе с чертежами и при "чистых" вычислениях, имеет мало общего с теорией, если мы определяем теорию по наличию "доказательств", — другое дело, что сами чертежи и вычисления оказываются общими и для практической, и для теоретической математики, хотя работа с ними ведется тут и там совершенно по-разному» (Родин. Математика Евклида в свете философии Платона и Аристотеля. С. 12). Это «двойное лицо» геометрии Исаак Яглом описывал так: «Странный мир геометрии — все в нем предельно конкретно, наглядно, осязаемо, и в то же время призрачно, бестелесно, условно» (Яглом. Математика и реальный мир. С. 54).

Здесь можно вспомнить одно несколько юмористическое, но удачное высказывание математика Пойа: «Геометрия — это искусство делать правильные выводы из неправильных фигур»[76].

Это убеждение в идеальном характере чисел и геометрических фигур является не просто «красивой идеей» Платона. По его мнению, только на этой идеальной, чисто разумной основе в математике вообще возможно получение неопровержимых результатов и убедительных доказательств[77].

Чтобы рассмотреть этот фундаментальный вопрос подробнее, попробуем выяснить, какие средства и доказательства могут быть применены в геометрии. Допустимо ли использование механических инструментов, например приспособления из двух рамок, для решения геометрических задач? Этот прибор — простое, но очень разумное изобретение (см. рис. 1 и 2)[78].

---

76 Pólya. Schule des Denkens. S. 94.

77 «Платон был не только философом, обладавшим познаниями в математике, но и идеологом — в том смысле, что он решал, что позволено или не позволено в науке. Таким образом, он требовал чистоты математических методов. Ему приписывается, что он допускал только "циркуль и линейку" в качестве конструктивного принципа в геометрии, но только в их идеальной форме» (Gronau. Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik. § 2.2.0).

78 Даны отрезки a и b и прибор из двух рамок, меньшую из которых можно перемещать внутри большей (рис. 1). Если мы разместим прибор так, как показано на рис. 2, то получим отрезки x и y, и с помощью трех подобных треугольников легко доказывается непрерывная пропорция $a:x = x:y=y:b$. Данная пропорция, как заметил Папп, имеет особенную пользу: «Нам даны две неравные прямые линии для нахождения двух средних членов в непрерывной пропорции. По этой теореме каждая трехмерная фигура может быть увеличена или уменьшена в любом заданном соотношении» (Папп. Математическое собрание. Книга VIII). Попробуем, например, использовать этот прибор для решения задачи удвоения куба. Возьмем куб со стороной a. Если мы выбираем $b = 2a$, то пропорция будет выглядеть так: $a : x = x : y = y : 2a$. Из $a : x = x : y$ следует $y = x^2/a$ и следовательно, $a : x = x^2/a : 2a$ или $x^3 = 2a^3$. Значит, x является стороной нового куба, объем которого равен двойному объему первого куба со стороной a. Таким образом, задача удвоения куба решена с помощью данного прибора.

рис. 1

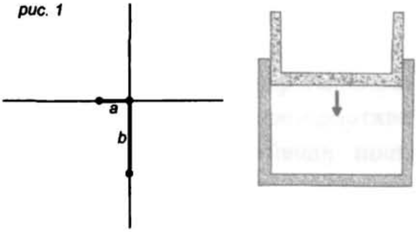
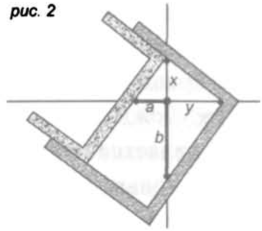


рис. 2



$a : x = x : y = y : b$

Тем не менее для Платона ответ очевиден: он запрещает использование любых материальных инструментов и ручных приспособлений. Правда, в своих диалогах Платон не говорит об этом прямо[79], однако у нас все же есть несколько сообщений, подтверждающих это. Плутарх, к примеру, рассказывает следующее: «Знаменитому и многими любимому искусству построения механических орудий положили начало Эвдокс и Архит, стремившиеся сделать геометрию более красивой и привлекательной, а также с помощью чувственных, осязаемых примеров разрешить те вопросы, доказательство которых посредством одних лишь рассуждений и чертежей затруднительно; такова проблема двух средних пропорциональных — необходимая составная часть многих задач, для разрешения которой оба применили механическое приспособление, строя искомые линии на основе дуг и сегментов. Но так как Платон негодовал, упрекая их в том, что они губят достоинство геометрии, которая от бестелесного и умопостигаемого опускается до чувственного и вновь сопрягается с телами, требующими для своего изготовления длительного и тяжелого труда ремесленника, — механика полностью отделилась от геометрии и, сделавшись одною из военных наук, долгое время вовсе не привлекала внимания философии»[80].

---

79 И все же в «Политике» (258d) есть следующее высказывание: «Итак, арифметика и некоторые другие сродные ей искусства не занимаются делами и дают только чистые знания? — Да, это так».

80 Плутарх. Сравнительные жизнеописания. Марцелл. 14, 5.

Можно вспомнить и уже цитировавшийся отрывок из «Платоника» Эратосфена[81]: «Сам Платон порицал друзей Евдокса, Архита и Менехма, которые хотели свести удвоение куба к механическим построениям, ибо они думали получить две средние пропорциональные не из теоретических соображений; но ведь таким образом уничтожается и гибнет благо геометрии и этим путем геометрия возвращается обратно к чувственному, вместо того чтобы подыматься выше этого и твердо держаться вечных, нематериальных образов, пребывающий в коих бог есть вечный бог»[82]. Итак, по Платону, никакие механические способы в геометрии не допустимы[83].

---

81 От сочинения Эратосфена сохранились лишь фрагменты. В трактате «Платоник» (Platonikos) Эратосфен обращается к математическим и музыкальным основам платоновской философии.

82 Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 224. На основании своих исследований Ван дер Варден описывает ситуацию следующим образом: «По-видимому, в "Платонике", возражая Архиту, Евдоксу и Менехму, Платон сказал: "Вы нашли механические решения? В этом нет никакого искусства; даже и я, совсем не геометр, могу это сделать: для этого нужен только схематический чертеж, даже нет надобности в предварительном геометрическом решении задачи. Вот, взгляни... Но если поступать так, то все благо геометрии совершенно разрушается, так как внимание от чистой геометрии отвращается к материальным предметам"...» (С. 226).

83 Томас Хит так описывает это убеждение Платона: «Вполне вероятно, что Платон мог видеть в Архите и Менехме людей, чьи построения были чрезмерно механистичными, поскольку в них задействовались более сложные средства, чем в обычных, выполненных с помощью прямой и круга; кроме того, даже эти обычные построения, которых одних было вполне достаточно для операций "возведения в квадрат", "наложения (прямоугольника)" и "присоединения", согласно Платону, не являются частью теоретической геометрии... Есть признаки того, что это ограничение началось еще до Платона... хотя влияние Платона, несомненно, помогло сохранить это ограничение в силе; прочие инструменты, а также использование в построениях кривых более высокого порядка, чем круги, были явным образом запрещены в тех случаях, когда можно было обойтись циркулем и линейкой» (Heath. A History of Greek Mathematics. Vol. 1. P. 288). Н. Бурбаки также описывает ситуацию следующим образом: «Поздние традиции, не заслуживающие большого доверия, возводят к

Интересно, что Евклид перенял это требование Платона: в «Началах» не используются никакие материальные средства, а присутствуют только чисто теоретические размышления[84]. Правда, Евклид применяет выражения из обыденной жизни, — например, в постулате 3 он говорит: «Допустим, что из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг». Но слово «описан» — это только наглядная (по мнению Платона, даже «забавная») манера говорить:

Платону введение первой классификации таких построений, которым была предназначена долгая и блестящая карьера: по-видимому, по соображениям более философского, чем математического, характера он выделил построения с помощью "циркуля и линейки", т. е. такие, в которых в качестве вспомогательных кривых берутся только прямые и окружности. В связи с этим принципом Платону приписывают также классификацию плоских кривых на "плоские геометрические места" (прямая и круг), "пространственные геометрические места" (конические сечения, получаемые как плоские сечения пространственного тела, конуса); все остальные кривые назывались "τοποὶγραμμὶκοὶ". Любопытно, что влияние этой классификации сказалось еще на Декарте...» (Бурбаки. Очерки по истории математики. С. 87).

84 Тесная связь между платоновской философией и пониманием математики, с одной стороны, и конструкцией «Начал» — с другой, понятна, если иметь в виду, что Евклид учился в Академии Платона, использовал в своем труде важные достижения математиков, работавших в Академии, и закончил свою книгу изложением так называемых платоновских тел. «В этом смысле... Евклида можно считать платоником» (Родин. Математика Евклида в свете философии Платона и Аристотеля. С. 195). Однако ради корректности следует отметить, что у нас нет прямых источников, подтверждающих тесную связь Евклида с Академией. Но Томас Хит в своем большом издании «Начал» Евклида приводит следующие аргументы: «Наиболее вероятно, что Евклид получил математическое образование в Афинах от учеников Платона, ибо большинство геометров, которые могли бы учить его, были из этой школы, и именно в Афинах жили и преподавали более старшие авторы, писавшие об элементах, а также другие математики, от которых зависели евклидовские "Начала". Возможно, он сам был платоником, но этого нельзя заключить из заявлений Прокла на эту тему» (Heath. The thirteen books of Euclid's Elements. P. 2).

> Но кто хоть немного знает толк в геометрии, не будет оспаривать, что наука эта полностью противоположна тем словесным выражениям, которые в ходу у занимающихся ею... Они выражаются как-то очень забавно и принужденно. Словно они заняты практическим делом и имеют в виду интересы этого дела, они употребляют выражения *построим* четырехугольник, *проведем* линию, *произведем наложение* и так далее: все это так и сыплется из их уст. А между тем все это наука, которой занимаются ради познания[85].

Платон прав. На самом деле вышеупомянутый евклидовский постулат 3 выражает следующее: «Для любой (идеальной) точки и для любого (идеального) отрезка *существует* (идеальный) круг, центром которого является данная точка и радиусом которого является данный отрезок». В своих «Началах» Евклид ничего не «рисует» или «конструирует». Он лишь доказывает на основании своих аксиом (постулатов), что различные геометрические формы, а также свойства и соотношения, *идеально существуют*[86]. Например, предложение 1 говорит о том, что на основании постулата 1, постулата 3, определения 15 и аксиомы 1 можно сконструировать

---

[85] Государство. 527a–b. Интересно при этом высказывание Платона, что словесные выражения употребляются «забавно *и принужденно*», т. е. математик *не может обойтись* без таких «забавных» выражений. «Платон не объясняет источник этой принужденности, находится ли она в природе самого предмета или в природе того, кто им занимается. Возможно, причина в них обоих. Если кто-то смотрит на солнце, его глазам будет больно. Поэтому надо изучать солнце с помощью теней и отражений. По аналогии, мы должны использовать неподходящий язык при изучении математики» (Benno, Mueller. Plato and mathematics. S. 16. Примеч. 12).

[86] Мордухай-Болтовской подчеркивает: «У Евклида нет термина *теорема*; под названием *"предложение"* стоят как теоремы, так и то, что мы сейчас назвали бы задачами на построение. Но для Евклида это больше чем задачи на построение; это *доказательство существования*. Оно играет такую же роль, как у нас, например, доказательство существования интеграла от непрерывной функции, и поэтому входит в цепь следующих друг за другом предложений» (Мордухай-Болтовской. Комментарии к книге I «Начал». С. 256).

(«построить») равносторонний треугольник, но на самом деле ничего не «конструируется»: текст лишь демонстрирует «идеальное существование» таких треугольников на базе аксиом.

Рассмотрим следующий пример. Дано: точка A и отрезок a. Задача: от точки A провести отрезок b, равный отрезку a. На практике мы применяем для этого циркуль: измеряем данный отрезок a циркулем, затем опять с помощью циркуля отмеряем от точки A требуемое расстояние. Но этот производимый вручную процесс был недопустим для Платона и Евклида. Можно ли выполнить это задание без циркуля — только на основании аксиом? Да, можно, и в предложении 2 первой книги «Начал» Евклид доказывает это. При этом мы еще раз подчеркиваем, что, хотя Евклид говорит «отложим», «продолжим» и т. д., в реальности ничего не «рисуется» и не «конструируется». Рисунки, присутствующие в «Началах», — это всего лишь пособия, вспомогательные средства для малоопытного читателя. Текст Евклида предполагает чисто теоретическое размышление, основанное только на аксиомах и уже доказанных теоремах (интересно отметить, что каждый шаг евклидовских рассуждений опирается на определенные постулат, аксиому или определение!). При условии принятия аксиоматической базы его положения логически бесспорны.

Рассмотрение евклидовского доказательства в оригинале поможет нам лучше увидеть, как Платон и Евклид понимали и применяли чисто мыслительные, идеальные математические объекты[87]:

Предложение 2:

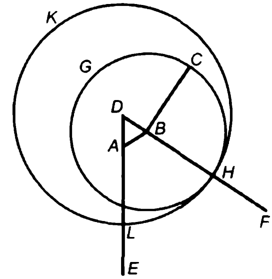
От данной точки отложить прямую, равную данной прямой.

Пусть данная точка будет A, заданная же прямая BC; требуется от точки A отложить прямую, равную данной прямой BC.

---

[87] Это не означает, что Платон и Евклид *полностью* согласны друг с другом в философских вопросах о характере «идеальных объектов». «Евклид вовсе не приписывал идеального существования геометрическим объектам, как это делал Платон» (Там же. С. 238).

Проведем от точки A к точке B соединяющую прямую AB и построим на ней равносторонний треугольник DAB (предложение 1); по прямым DA и DB продолжим прямые AE, BF, из центра B раствором BC опишем круг CGH (постулат 3) и далее из центра D раствором DH опишем круг HKL (постулат 3).



Поскольку теперь точка B — центр круга CHG, то BC равна BH (определение 15). Далее, поскольку точка D — центр круга HKL, то DL равна DH (определение 15), а у них DA равна DB. Значит, остаток AL равен остатку BH (аксиома 3). Но уже доказано, что и BC равно BH; значит, каждая из прямых AL и BC равна BH. Но равные одному и тому же равны и между собой (аксиома 1); значит, и AL равна BC.

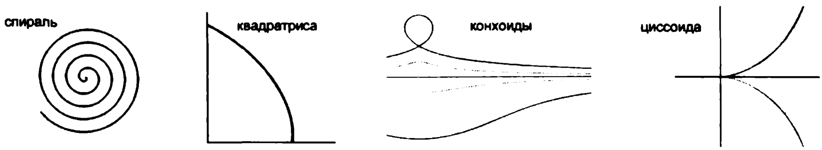
Значит, от данной точки A отложена прямая AL, равная заданной BC, что и требовалось сделать.

Но остается еще один вопрос. Как мы видели, Евклид, следуя требованиям Платона, не допускал использования механических приборов, так как они не дают точных результатов и не считаются пригодными для теоретического научного исследования. Но почему Евклид работал только с самыми простыми формами: точкой, линией и кругом? Почему он не допускал использования других геометрических форм, например параболы? Согласно Паппу[88],

---

[88] Папп. Математическое собрание. Книга IV: «Существуют, как говорится, три типа проблем в геометрии, это так называемые "плоскостные", "трехмерные" и "линейные" проблемы. Те, которые могут быть решены с помощью прямой и круга, подходящим образом называются "проблемами плоскости", так как линии, с помощью которых такие вопросы решаются, берут свое начало на плоскости. Задачи, которые решаются с использованием одного или нескольких участков конуса, называют "проблемами трехмерных фигур", поскольку необходимо при построении использовать поверхности тел, то есть конусов. Остается третий тип, так называемые "линейные" проблемы. Для конструирования в этих случаях требуются другие кривые, нежели уже упомянутые, а именно кривые,

многие древние геометры знали и использовали кривые — спирали, квадратрисы, конхоиды, циссоиды и т. д. — для решения различных, и довольно сложных, задач.



Софист Гиппий Элидский, например, успешно решил задачу удвоения куба с помощью своей квадратрисы[89]. Также с помощью вышеупомянутой непрерывной пропорции $a:x=x:y=y:2a$ мы легко получаем требуемый результат посредством геометрической конструкции из сечения параболы и гиперболы[90]. И сразу возникает вопрос: почему Платон и Евклид отказывались от использования подобных кривых?[91] Почему они ограничивались самыми простыми

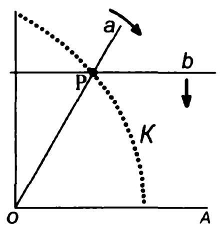
имеющие более разнообразное и вынужденное происхождение и возникающие в связи с более несимметричными поверхностями и от комплексных движений… В настоящее время считается серьезной ошибкой в геометрии искать решение плоскостной задачи с помощью конусов или линейных кривых… В связи с существованием этих различных классов задач, геометры прошлого, которые стремились на плоскости решить вышеуказанную проблему трисекции угла, которая по своей природе есть проблема тела, не смогли добиться успеха. Ибо они были еще незнакомы с коническими сечениями и были сбиты с толку по этой причине. Но позже с помощью конических сечений они смогли разбить угол на три секции».

89 См.: Чистяков. Три знаменитые задачи древности. С. 68–70.

90 Из $a : x = x : y$ следует парабола $y = x^2/a$; из $a : x = y : 2a$ следует гипербола $y = 2a^2/x$; пересечение этих двух кривых дает результат.

91 И не только Платон и Евклид. А. Раик пишет: «Только геометрическое изложение и построение признавалось официальной наукой, считалось незыблемым и строгим. Причем весьма существенным является тот факт, что геометрическое построение понималось как построение с помощью прямых и окружностей, самых совершенных геометрических образов. Таким образом, можно сказать, что древнегреческая математика пред-

элементами, что не позволяло им найти решения некоторых важных математических задач? Можно спросить: чем квадратриса хуже круга? Не можем ли мы видеть и в более сложных кривых идеальные, неизменные геометрические сущности? На этот вопрос Платон и Евклид ответили бы, что есть большая разница между этими фигурами: круг — это простая, основная, «интуитивная», даже «архетипическая» форма, а квадратриса — это что-то исскуственное, созданное человеком.



Это кривая, определяемая *кинематически*: две прямых линии двигаются одновременно и равномерно, линия *a* поворачивается вокруг точки *O*, линия *b* откладывается параллельно линии *OA* вниз, и соответствующая точка пересечения линии *a* с линией *b* дает пункт Р квадратрисы *K*. В отличие от круга, который легко можно представить как существующий «вечно» и независимо от человека, квадратриса является искусственной конструкцией, человеческим изобретением. Каждый человек интуитивно понимает, что такое круг, но понять форму квадратрисы намного сложнее без дополнительных разъяснений.

Но, возможно, это объяснение является чрезмерно рациональным и психологическим. Прокл предлагает более символическую трактовку: «Прямая линия является символом несгибаемого, неизменного, нетленного, неустанного и всемогущего Провидения, которое присутствует во всем, а круг и круговое движение символизируют деятельность, которая возвращается к себе, концентрируется на себе, и контролирует все в соответствии с одним умо-

---

ставляла собой теорию построения с помощью циркуля и линейки» (Раик. Очерки по истории математики в древности. С. 158).

постигаемым Пределом. Поэтому Демиургический Нус установил эти два принципа в себе, прямой и круговой, и произвел из себя две монады, одна из которых действует круговым образом, чтобы усовершенствовать все интеллигибельные сущности, а другая движется по прямой, чтобы привести к рождению всех чувственных вещей. Поскольку душа промежуточна между чувственным и умопостигаемым, она движется по кругу постольку, поскольку находится в союзе с умопостигаемой природой, но, поскольку она руководит чувственным, осуществляет свой промысл по прямой»[92]. Процитируем также Чернисса, который дает более глубокое объяснение этого платоновского предубеждения против использования механических приборов: «Его [Платона] собственный интерес и его желание вызвать интерес у других, объясняются историей критики, которую он предпринял по отношению к попытке решить геометрическую задачу с помощью механического приспособления. Его занимало не практическое решение проблемы, не виртуозность решения, которая есть радость для виртуоза и его аудитории, не математическая наука ради самой себя, но математика как пропедевтика к философии, ибо он верил, что изучение этой науки является лучшим средством подготовки ума к абстрактному мышлению, которым только подлинно реальные объекты, идеи, могут быть достигнуты, запомнены и осмыслены. Вот почему он был настолько озабочен методом: достоинство и предназначение, которые он видел в математике, были бы совершенно потеряны и извращены, если бы практиковались таким образом, чтобы низводить ум до частностей, а не возносить к бестелесным и неизменным реалиям»[93].

Стремление Платона и Евклида допускать только «идеальные конструкции» не означает, конечно же, что они смогли осуществить эту цель полностью. Фаулер замечает, что не все действия в

---

[92] Прокл Диадох. Комментарий к первой книге «Начал» Евклида. Дефиниции 108–109.

[93] Cherniss. The Riddle of the Early Academy. P. 66.

«Началах» могут быть выполнены с помощью линейки и циркуля (см. пропозиции 5, 11, 12 и 18 в книге XII). «Хотя эти четыре члена пропорции не конструируются с помощью линейки и циркуля, их существование принимается без каких-либо ограничений»[94].

Бертран Рассел также перечислил некоторые ошибки Евклида, например: в приложении 1 в «Началах» по умолчанию предполагается, что круги пересекают друг друга, но это не само собой разумеется, и если они не пересекаются, вся конструкция не работает[95]. Или возьмем приложение 4: Евклид полагает, что можно один треугольник «поместить» в другой треугольник, а ведь движение предполагает материальные тела[96]. Но такая критика,

---

94 Fowler. The Mathematics of Plato's Academy. P. 288. Надо также согласиться с Фаулером, что ситуация часто оказывается сложнее и разнообразнее, если мы не цепляемся за общепринятые представления. Так, Фаулер замечает: «Широко распространено мнение, что греческая геометрия была по умолчанию ограничена построениями с помощью линейки и циркуля. На самом деле, наши данные намного разнообразнее, и репертуар основных конструкций, безусловно, должен также включать *neusis*-конструкции, в которых линия проводится, "ограняя" или "наклоняясь" (*neuein*) в сторону данной точки (то есть проходя через нее) — и перехватывая две данные кривые или прямые в данном отрезке» (Там же. P. 283). Но все-таки нельзя не признать, что стремление Платона и Евклида ограничить допустимые конструкции очевидно.

95 «Совершенно не очевидно, что круги, которые нам нужно построить, пересекаются, и если они не пересекаются, то все утверждение неверно» (Russell. The principles of mathematics. P. 411).

96 Шопенгауэр проницательно замечает: «Меня удивляет, что никто не ставил под сомнение скорее восьмую аксиому [вместо аксиомы параллельности]: "Фигуры, совпадающие друг с другом при наложении, равны" [у Евклида: "Совмещающиеся друг с другом равны между собой" — на самом деле это аксиома 7]. Ведь *совпадать друг с другом при наложении* — это либо тавтология, либо нечто совершенно эмпирическое и относящееся не к чистому созерцанию, а к внешнему чувственному опыту. Здесь предполагается подвижность фигур; но подвижное в пространстве — это исключительно материя, и, таким образом, ссылка на взаимное наложение покидает чистое пространство, единственную стихию геометрии, для того чтобы перейти в область материального и эмпирического» (Шопенгауэр. Мир как воля и представление. Т. II. С. 108). Позже довольно

естественно, не принижает заслуг Платона, Евклида и других древних авторов, впервые поставивших вопрос о разъяснении сущности и принципов функционирования математических объектов[97].

похоже выразился Рассел: «Говорить о движении — значит подразумевать, что наши треугольники не пространственные, но материальные. Поскольку точка в пространстве имеет некое положение и не может менять его, как леопард не может менять свои пятна, движение точки в пространстве — это фантом, непосредственно противоречащий закону идентичности, это гипотеза, что данная точка может быть сначала одной точкой, а потом другой. Следовательно, движение, в обычном смысле, возможно только для материи, а не для пространства» (Russell. The principles of mathematics. P. 411). Интересно, что уже Прокл заметил эту трудность: «Но если объекты геометрии находятся за пределами материи, ее идеи чисты и отделены от объектов чувств, то никто из них не будет иметь никаких частей, или тел, или величин. Поскольку идеи могут иметь величину, объем и протяженность в принципе только через материю, которая является их вместилищем, вместилищем, которое содержит в себе неделимое как делимое, не имеющее протяженности как протяженное, и неподвижное как движение» (Прокл Диадох. Комментарий к первой книге «Начал» Евклид. Введение. Ч. II, 50). Ср. также размышления Гоббса: «По всему этому легко можно постичь, что Евклид в своих определениях точки, линии и поверхности не подразумевал, что точка должна быть ничем или что линия не должна иметь широту, а поверхность толщину, ибо, если бы он это сделал, то его предложения не только неразумно было бы допустить, но и невозможно было бы выполнить. Поскольку линии проводятся лишь движением, а движение присуще только телу. Следовательно, он подразумевал, что размеры точки, ширина линии и толщина поверхности не должны быть *приняты во внимание*, то есть не будут учитываться при доказательстве любых теорем о величине тел, или длине поверхностей, или объеме фигур» (Hobbes. Principles. P. 211).

97 Мы, конечно, затронули только некоторые аспекты вопроса о характере математических объектов и самой математики как науки. Одна из значительных сложностей заключается в том, что математика очень успешно применяется в естествознании. Здесь трудно согласиться с мнением, что математика является просто результатом абстрагирования или только игрой. Приведем хотя бы одну цитату на эту тему: «Вопрос об истинности математики нельзя обойти путем противопоставления причудливой математики правдивой науке. Мы не сделаем этого легкого шага, потому что математика — это не просто игра. Многие из ведущих модернистов, такие как Давид Гильберт и Эмми Нетер, явно презирали эту

Добавим последнее замечание, призванное сопоставить размышления древних с современными дискуссиями. Михаэль Отте[98] указал на то, что существуют два разных представления о термине «конструировать» и способе его употребления, которые детерминируют понимание существования математических объектов. «Конструировать» у Евклида означает «создавать какую-то фигуру с помощью циркуля и линейки за конечное число шагов с целью подтвердить правильность какого-либо положения». Это чисто *вспомогательный* способ конструирования: «конструкция» лишь служит для нахождения и утверждения какой-то *теории*. Таков взгляд Платона и современного математического платонизма. Здесь «объекты» математики — это умопостигаемые и вечно существующие предметы, свойства которых мы хотим познать. Но «конструировать» можно и при решении конкретных *задач*; тогда конструкция понимается как *действие*, начинающееся с обнаружения какой-то проблемы и заканчивающееся достижением результата. В этом случае можно использовать любые способы и приспособления, а не только циркуль и линейку. Таков взгляд Броуэра и конструктивистской математики: «объекты» математики — это *проблемы* и *задачи*, которые мы хотим и должны решать[99].

точку зрения, и почти каждый математик рассматривает связь между математикой и физикой как тесную и жизненно важную, хотя и загадочную. В математике частично присутствует сверхъестественная и прекрасная сила, так что это может быть правдой (в некотором смысле). Математический модернизм уважает связи даже тогда, когда их трудно сформулировать» (Gray. Plato's Ghost. P. 32). В параграфе 4.5 мы чуть более подробнее говорим об этих вопросах.

98 Otte. Konstruktion und Existenz. S. 169–191.

99 См. также различие между *знанием* и *деятельностью*, которое проводит С. М. Кускова при обсуждении ряда натуральных чисел: «Рассматривая математику как знание, мы принимаем постулат, что "все переходы уже сделаны", и следуем линейным порядком с заданным извне шагом. Но если математика также есть деятельность, нет оснований считать ряд в себе завершенным и метод его прохождения принудительным» (Кускова. Проблема единственности натурального ряда. С. 132).

2.5. Промежуточное положение математики

Согласно точке зрения Платона, математика занимает промежуточное положение, располагаясь ниже философии, но выше тех искусств и навыков, что относятся к видимому и ощущаемому миру. Главкон в диалоге «Государство» описывает ситуацию так:

> Мне кажется, ты говоришь о сложных вещах. Однако ты хочешь установить, что бытие и все умопостигаемое при помощи диалектики можно созерцать яснее, чем то, что рассматривается с помощью только так называемых наук, которые исходят из предположений. Правда, и такие исследователи бывают вынуждены созерцать область умопостигаемого при помощи рассудка, а не посредством ощущений, но поскольку они рассматривают ее на основании своих предположений, не восходя к первоначалу, то, по-твоему, они и не могут постигнуть ее умом, хотя она вполне умопостигаема, если постичь ее первоначало. Рассудком же ты называешь, по-моему, ту способность, которая встречается у занимающихся геометрией и им подобных. Однако это еще не ум, так как рассудок занимает промежуточное положение между мнением и умом. — Ты выказал полнейшее понимание[100].

Аристотель рассматривал позицию Платона следующим образом: «Платон утверждал, что помимо чувственно воспринимаемого и эйдосов существуют как нечто промежуточное математические предметы, отличающиеся от чувственно воспринимаемых тем, что они вечны и неподвижны, а от эйдосов — тем, что имеется много одинаковых таких предметов, в то время как каждый эйдос сам по себе только один»[101].

а) По сравнению с ремесленными и художественными способностями и достижениями математика отличается тем, что она достигает первой ступени абстракции. Да, она еще использует слова и

---

[100] Государство. 511c–e.

[101] Аристотель. Метафизика. A6, 987b, 14–17.

воззрения чувственного мира, однако обращается уже не к конкретному образцу, а к более высокому умопостигаемому уровню:

> Я думаю, что те, кто занимается геометрией, счетом и тому подобным, предполагают в любом своем исследовании, будто им известно, что такое чет и нечет, фигуры, три вида углов и прочее в том же роде. Это они принимают за исходные положения и не считают нужным отдавать в них отчет ни себе, ни другим, словно это всякому и без того ясно. Исходя из этих положений, они разбирают уже все остальное и последовательно доводят до конца то, что было предметом их рассмотрения... Но ведь когда они вдобавок пользуются чертежами и делают отсюда выводы, их мысль обращена не на чертеж, а на те фигуры, подобием которых он служит. Выводы свои они делают только для четырехугольника самого по себе и его диагонали, а не для той диагонали, которую они начертили. Так и во всем остальном[102].

Другими словами, математик использует термины и наглядные вспомогательные средства, принадлежащие обыденной жизни, но следует понимать, что математические объекты — это не чувственные предметы, а идеальные, неизменные и независимые от времени сущности. По этому поводу математик Френкель пишет: «Дла Платона мир математики — это мир независимый, содержащий свои собственные законы, и этот мир выше физики в своем образе бытия. Существование математических вещей, следовательно, не зависит от мышления человека, так же как и от всяких внешних воздействий»[103]. Одним словом, объекты матема-

---

[102] Государство. 510c–e.

[103] «Для Платона мир математики — это самостоятельный мир, несущий в себе свои собственные законы и превосходящий физический своим способом бытия. Существование математических объектов, таким образом, является независимым от человеческой мысли, как, в общем, и от любой внешней деятельности» [«Pour Platon le monde des mathématiques est un monde indépendant, portant en lui-même ses propres lois et supérieur au physique dans sa façon d'être. L'existence des êtres mathématiques est, de ce

тики — это «вечные идеи»[104], хотя математик, как правило, не идет дальше уровня абстракции, на котором строятся и доказываются его теоремы.

Математика является областью чистого абстрактного мышления, которое располагается где-то между простым мнением и разумным диалектическим познанием. Однако математическое мышление не является полностью «свободным плаванием», поскольку оно связано с эмпирической базой. Говоря современным языком, «профессиональные математики работают со знаковыми системами, имеющими какие-то интерпретации в реальном мире. Идеальное содержание этих интерпретаций представляет собой нечто в высшей степени устойчивое, более устойчивое, чем сам изменчивый мир эмпирических явлений»[105].

б) Что касается отношения между математикой и философией, то может возникнуть вопрос, почему математика «обречена» занимать более низкую ступень, чем философия. Современные математики — если они вообще заботятся об отношении их специальности к философии, — безусловно, выразили бы протест по этому поводу. Однако точка зрения Платона, по крайней мере в его эпоху, имела «освобождающую» роль: она позволила выделить свое собственное поле деятельности не только для философов, но и

---

fait, indépendante de la pensée humaine comme, en général, de toute activité extérieure»] (Fraenkel. Sur la notion d'existence dans les mathématiques. P. 19).

104 Идеи представляют настоящую действительность; можно сказать, что они «существуют», но мы должны представлять их скорее не как «вещи», а как «силы»: «Я утверждаю теперь, что все, обладающее по своей природе способностью (δύναμιν) либо воздействовать на что-то другое, либо испытывать хоть малейшее воздействие, пусть от чего-то весьма незначительного и только один раз, — все это действительно существует. Я даю такое определение существующего: оно есть не что иное, как способность» (Софист. 247d–e). То, что мы ощущаем, например, прекрасным, «становится прекрасным благодаря прекрасному» (Федон. 100e), т. е. идея прекрасного имеет силу делать какие-то вещи прекрасными.

105 Кричевец. В какой математике возможны стили математического мышления? С. 52.

для математиков. Таким образом, математика смогла развиваться самостоятельно, не будучи ограниченной какими-либо философскими догмами. Очень верно пишет по этому поводу П. Гайденко: «Если бы математика не обрела уже в V в. до н. э. свой собственный предмет исследований, то мы не получили бы такое классическое наследие античной науки, как "Начала" Евклида»[106].

Платоновская оценка отношений между математикой и философией имеет глубокие причины, которые требуют детального анализа. Одной из них является утверждение Платона о том, что математики используют «рассудок», в отличие от философов, пользующихся «умом»[107]. Другая причина связана с разницей между математическим аксиоматическим методом и философскими исследованиями «первоначала», которая свидетельствует о том, что философы занимаются более высокой областью «умопостигаемого», чем математики[108]. Вот как выразил это различие Карл

---

106 Гайденко. История греческой философии в ее связи с наукой. С. 6. Однако выделение не значит отделение. Это как раз цель данной работы — указать на неразрывную связь между платоновской философией и основанной на платонизме математикой. Эту связь, опять же, отчетливо показывает Гайденко: «Одной из причин того, что математика стала в Древней Греции теоретической наукой, опирающейся на доказательство, был ее тесный союз с философией. Этот союз определил характер не только древнегреческой математики, но и философии, особенно таких ее направлений, как пифагорейство, платонизм, а позднее — неоплатонизм. Не случайно время возникновения философии — конец VI–V вв. до н. э. совпадает с периодом становления теоретической математики» (Там же. С. 16–17).

107 Государство. 511c–e.

108 Ср.: Государство. 511a–c — «Вот об этом виде умопостигаемого я тогда и говорил: душа в своем стремлении к нему бывает вынуждена пóльзоваться предпосылками и потому не восходит к его началу, так как она не в состоянии выйти за пределы предполагаемого и пользуется лишь образными подобиями, выраженными в низших вещах, особенно в тех, в которых она находит и почитает более отчетливое их выражение. — Я понимаю: ты говоришь о том, что изучают при помощи геометрии и родственных ей приемов. — Пойми также, что вторым разделом умопостигаемого я называю то, чего наш разум достигает с помощью диалектической способности. Свои предположения он не выдает за нечто

Фридрих фон Вайцзеккер: «Математика, с ее обычными методами для Платона есть только подобие познания истинно существующего, а не действительный пример такого познания. Дело в том, что математик дедуцирует, только исходя из данных предпосылок, но сами эти предпосылки он находит или принимает, но не может их доказать... Истинное познание, согласно Платону, должно было бы дать отчет и об этих предпосылках математики»[109].

То, что математики не отдают отчета о своих предпосылках «ни себе, ни другим, словно это всякому и без того ясно», не обязательно является следствием небрежности, но лежит в самой сути предмета. Хайдеггер удачно говорил о «простаивании»: в определенный момент рассмотрение прекращается: оно стоит, не продолжаясь далее этого места. «Это такое простаивание, где дело только собственно и состоит в том, чтобы занимать позицию в отношении какой-то вещи, так что она сможет встретиться с нами. Такой νοεῖν — это только простое и ясное представление этой вещи таким образом, что она *говорит только из самой себя*, и наши обсуждения и выявления не требуются. Здесь можно сказать: φαίνεται, т. е. *вещь так и проявляется*. Единственная возможность для нас — созерцать, и через созерцание осмыслять»[110]. Вот до чего может дойти рассудок математиков.

Философ же не хочет останавливаться и не довольствуется «созерцанием» — в своем распоряжении он имеет диалектику, которая «провозглашается Платоном высшей из всех наук, завершающей все дело знания. «Не кажется ли тебе, — поучает платоновский Сократ, — что диалектика, как некое оглавление

изначальное, напротив, они для него только предположения, как таковые, то есть некие подступы и устремления к началу всего, которое уже не предположительно. Достигнув его и придерживаясь всего, с чем оно связано, он приходит затем к заключению, вовсе не пользуясь ничем чувственным, но лишь самими идеями в их взаимном отношении, и его выводы относятся только к ним».

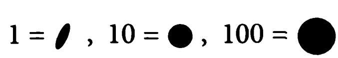
[109] Weizsäcker. Die Tragweite der Wissenschaft. S. 68.

[110] Heidegger. Platon — Sophistes. S. 161.

наук, стоит у нас наверху и что никакая другая наука, по справедливости, не может стоять выше ее: ею должны завершаться все науки» (Государство. VII, 534e)»[111].

2.6. Числа и числовые соотношения

Числа и числовые соотношения довольно часто встречаются в диалогах Платона. При этом надо иметь в виду, что древние греки имели другое представление о числах, нежели мы сегодня. В нашей сегодняшней «поистине абсурдной числовой системе»[112] (например, когда мы пишем 89°20'13", то смешиваем децимальную и сексагезимальную системы!) мы видим следы комплексной истории развитии числовых систем, и Причард прав, когда пишет: «Оказывается, что сами греческие математики понимали объекты своего изучения совершенно иным образом, чем мы могли бы от них ожидать; в частности, их представление о числе сильно отличалось от нашего»[113]. Греки «не имели ни малейшего понятия об *иррациональных* числах… у них даже не было понятия *натуральных* чисел»[114]. Они не разделяли наше представление о ряде последовательных чисел 1, 2, 3, 4 и т. д.; для них каждое число было больше всего похоже на *множество точек*: • , •• , ••• , •••• и т. д. Уже вавилоняне представляли числа в форме точек: 1 — в виде овала, 10 — точки, 100 — большой точки[115]:



---

[111] Асмус. Платон. С. 96.

[112] Neugebauer. The Exact Sciences in Antiquity, 1957. P. 17.

[113] Pritchard. Plato's Philosophy of Mathematics. P. 3. Причард детально излагает особенность древнегреческого понимания чисел; в частности, «утверждать, что Платон, с его идеями *arithmoi*, предвосхитил какое-то современное понятие натурального числа, значит совершать ошибку» (Ibid. P. 55).

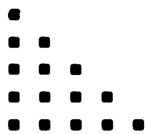
[114] Ibid. P. 177.

[115] Neugebauer. The Exact Sciences in Antiquity, 1957. P. 19.

И если мы обратим внимание на то, как Платон в «Пармениде» трактует числа, мы увидим следы наглядно-материального представления о характере чисел[116]. В «Евтифроне» числа получают даже «ноги»:

> Если бы ты спросил меня о чем-то таком, — к примеру, какою частью числа будет четное и что оно собой представляет, я ответил бы, что это число, не припадающее на одну ногу, но ровно стоящее на обеих ногах[117].

Кстати, такое «осязаемое» представление имеет свои преимущества: основываясь на нем, греки могли «наглядно» доказать ряд интересных соотношений. Если мы, например, представим сумму $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ в следующем виде:

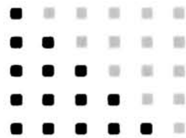


---

[116] Показательно также, что Платон удивляется самой возможности сложить два числа: «Я не решаюсь судить даже тогда, когда к единице прибавляют единицу, — то ли единица, к которой прибавили другую, стала двумя, то ли прибавляемая единица и та, к которой прибавляют, вместе становятся двумя через прибавление одной к другой. Пока каждая из них была отдельно от другой, каждая оставалась единицей и двух тогда не существовало, но вот они сблизились, и я спрашиваю себя: в этом ли именно причина возникновения двух — в том, что произошла встреча, вызванная взаимным сближением?» (Федон. 96е–97а). Этот вопрос Платона, кстати, совсем не наивен; вспомним, что и Дедекинд задавал в своем знаменитом труде этот, казалось бы, простой вопрос: «Что такое числа и для чего они служат?» Там он назвал свои числа «призрачными фигурами», которые читатели, привыкшие к обычным повседневным числам, «вряд ли узнают» (Dedekind. Was sind und was sollen die Zahlen? S. IX).

[117] Евтифрон. 12d. Р. Брамбо полагает, что такое объяснение не отражает собственную теорию чисел Платона: «Это просто уступка Сократа незрелости ума его собеседника» (Brumbaugh. Plato's Mathematical Imagination. P. 19).

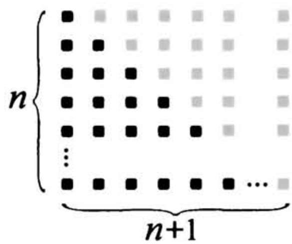
и добавим то же самое количество точек, формируя тем самым прямоугольник:



то мы «сразу увидим» не только результат этой суммы

$$1+2+3+4+5 = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$$

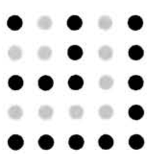
но и общее правило построения любого подобного прямоугольника. Для суммы $1+2+3+4+\ldots+n$ наш прямоугольник выглядит так:



и из этого мы находим общую сумму:

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Кроме того, с помощью схемы из точек можно легко и наглядно «доказать» тот интересный (и неожиданный) факт, что «*квадратные*» числа получаются из сумм *нечетных* чисел:



т. е. $1+3+5+7+9 = 5^2$, или в общих чертах:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2.$$

До сих пор мы говорили о «числах» вообще, но, как писал Аристотель, у Платона мы находим *три вида* чисел[118]:

1) Числа, принадлежащие к чувственному миру — ἀριθμὸς αἰσθητός. Они не стабильны, но возникают и исчезают вместе с предметами. «Каждое животное обладает уникальными качествами — например, лишь ему присущей величиной или цветом. Точно так же определенная группа животных имеет свои особые качества, например быть "тремя". Подобно тому как цвет животного исчезает в случае его смерти, возникают и исчезают и числа, характеризующие целые группы животных»[119].

2) Идеальные числа — ἀριθμὸς εἰδητικός. Для каждого числа, например «три», существует *идея* этого числа: это не те «три», которые мы можем сосчитать, а «три само по себе» (нечто похожее мы видим, к примеру, в понятии «красивого», отсылающем нас не к множеству красивых вещей, но к самой «идее красоты»). Остается открытым вопрос, бесконечно ли множество идеальных чисел; по

---

[118] Аристотель. Метафизика. A, 6, 987b14: «Платон утверждал, что помимо чувственно воспринимаемого и эйдосов существуют как нечто промежуточное математические предметы, отличающиеся от чувственно воспринимаемых тем, что они вечны и неподвижны, а от эйдосов — тем, что имеется много одинаковых таких предметов, в то время как каждый эйдос сам по себе только один». Интересно, что и современные авторы говорят о трех видах чисел: «Необходимо различать математические, прагматические и компьютерные числа, поскольку их свойства различны. Первые традиционно используются в математике. Их бесконечно много. Вторые получают при записи результатов измерений (наблюдений, испытаний, анализов, опытов). Прагматических чисел — конечное число, как и компьютерных (поскольку существует компьютерный нуль). Тождества для математических чисел не всегда выполняются для прагматических. Расходящийся ряд математических чисел может превратиться в сходящийся для компьютерных» (Орлов, Луценко. О развитии системной нечеткой интервальной математики. С. 190).

[119] Martin. Platons Lehre von der Zahl und ihre Darstellung durch Aristoteles. S. 193.

Аристотелю, Платон признавал идеальными только числа от одного до десяти[120].

3) Математические числа — ἀριθμὸς μαθηματικός. Они вечны и неизменны, как и идеальные числа, но их много. Например, есть много «троек», поэтому мы можем написать равенство «3 + 3 = 6», в котором присутствуют сразу две тройки.

У Платона мы, конечно же, не находим настоящей теории чисел, но есть довольно интересные фрагменты. Приведем некоторые примеры:

Довольно часто Платон обсуждает и использует в своих рассуждениях существование двух родов чисел: чета и нечета[121]. В диалоге

---

[120] Аристотель. Физика III. 6, 206b32. Число 10 имело у пифагорейцев особенный статус: «Пифагор назвал десятку священной четверицей, в себе самой "имеющей источник и корни вечной природы". Из этого числа получили начало все числа. Действительно, одиннадцать, двенадцать и остальные числа началом своего существования сопричастны десятке. Сама же десятка составляется из единицы, двух, трех и четырех: 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Десять заключает столько четных чисел (2, 4, 6, 8) сколько и нечетных (3, 5, 7, 9), столько составных (4, 6, 8, 9), сколько и простых (2, 3, 5, 7)» (Раик. Очерки по истории математики в древности. С. 153).

[121] Хармид. 166b: «Но разве при этом чет и нечет не являются чем-то отличным от самого искусства счета?»; Евтифрон. 12c: «Стыд ведь есть как бы часть страха, подобно тому как нечетное есть часть числа, однако дело обстоит не так, чтобы там, где было число, было и нечетное; наоборот, где нечетное, там и число»; Парменид. 160a: «Оно было бы причастно и одному, и двум, и трем, и нечетному, и четному...»; Парменид. 164e: «И одно в них покажется четным, другое нечетным, но это противно истине, поскольку единого не существует»; Горгий. 451c: «Искусство счета одинаково с арифметикой: ведь оно обращéно на то же самое, на четные и нечетные числа»; Теэтет. 190b: «Даже и во сне ты не отваживался себе сказать, что нечетное на самом деле есть четное»; Теэтет. 198a: «Предположи, что арифметика — это охота за всевозможными знаниями четного и нечетного»; Федон. 103e–105a: «Нечетное всегда должно носить то имя, каким я его теперь обозначаю, или не всегда?.. Но одно ли оно из всего существующего — вот что я хочу спросить, — или же есть еще что-нибудь: хоть оно и не то же самое, что нечетное, все-таки кроме своего особого имени должно всегда называться нечетным, ибо по

«Политик», например, он сравнивает бессмысленное разделение человеческого рода на две части с бессмысленным разделением чисел:

природе своей неотделимо от нечетного? То, о чем я говорю, видно на многих примерах, и, в частности, на примере тройки. Поразмысли-ка над числом "три". Не кажется ли тебе, что его всегда надо обозначать и своим названием, и названием нечетного, хотя нечетное и не совпадает с тройкой? Но такова уж природа и тройки, и пятерки, и вообще половины всех чисел, что каждое из них всегда нечетно и все же ни одно полностью с нечетным не совпадает. Соответственно два, четыре и весь другой ряд чисел всегда четны, хотя полностью с четным ни одно из них не совпадает...»; Федон. 105d: «Что же выходит? Как мы сейчас назвали то, что не принимает идеи четного? — Нечетным»; Федон. 106b: «Если бессмертное неуничтожимо, душа не может погибнуть, когда к ней приблизится смерть: ведь из всего сказанного следует, что она не примет смерти и не будет мертвой! Точно так же, как не будет четным ни три, ни [само] нечетное»; Федон. 106с: «И мы не были бы вправе решительно настаивать, что нечетное не погибнет, — ведь нечетное не обладает неуничтожимостью. Зато если бы было признано, что оно неуничтожимо, мы без труда отстаивали бы свой взгляд, что под натиском четного нечетное и три спасаются бегством. То же самое мы могли бы решительно утверждать об огне и горячем, а равно и обо всем остальном»; Гиппий Больший. 302а: «Итак, если каждый из нас один, то, пожалуй, он будет также нечетным; или ты не считаешь единицу нечетным числом? — Считаю. — Значит, и оба вместе мы нечет, хотя нас и двое? — Не может этого быть, Сократ. — Тогда мы оба вместе чет. Не так ли? — Конечно. — Но ведь из-за того, что мы оба вместе — чет, не будет же четом и каждый из нас? — Нет, конечно»; Гиппий Больший. 303b: «И что же мешает, чтобы из двух величин, составляющих вместе четное число, каждая в отдельности была бы то нечетной, то четной»; Государство. 510с: «Я думаю, ты знаешь, что те, кто занимается геометрией, счетом и тому подобным, предполагают в любом своем исследовании, будто им известно, что такое чет и нечет, фигуры, три вида углов и прочее в том же роде»; Законы. 717a–b: «Благочестивой цели, скажем мы, вернее всего достигнет тот, кто прежде всего вслед за почитанием олимпийских богов и богов — охранителей государства будет уделять подземным богам все четное, вторичное и левое, высшие же почести, противоположные перечисленным, следует уделять тем богам, которые были названы первыми»; Законы 818с: «Многого недостает человеку, чтобы стать божественным, если он не может распознать, что такое единица, два, три и вообще, что такое четное и нечетное».

...разделить число на два вида и, выделив из всех чисел десять тысяч, представил бы это число как один вид, а всему остальному дал бы одно имя и считал бы из-за этого прозвища, что это единый вид, отличный от того, первого. Ведь гораздо лучше и более сообразно с двуделением по видам было бы, если бы разделили числа на четные и нечетные, род же человеческий — на мужской и женский пол[122].

В «Пармениде» (143) Платон докажет — хотя для Ведберга это «довольно смутный набросок»[123], — что ряд чисел простирается до бесконечности. Дедукция Платона выглядит так:

1. Существует «бытие» и «единое».
2. Значит, существует две вещи, т. е. существует «два».
3. «Два» состоит из двух отдельных членов.
4. При сложении единицы с этими двумя членами получается три.
5. Три — нечетное число, а два — четное.
6. Когда есть два, то есть «дважды», а когда есть три — «трижды» (коль скоро в двух содержится дважды один, а в трех трижды один).
7. А когда есть два и дважды, то есть и «дважды два». И когда есть три и трижды, то есть и «трижды три».
8. Когда есть три и дважды, а также два и трижды, то есть «дважды три» и «трижды два».
9. Следовательно, есть произведения четных чисел на четные, нечетных на нечетные, а также четных на нечетные н нечетных на четные.
10. А если это так, то не остается какого-либа числа, существование которого не необходимо.
11. Следовательно, если существует одно, то необходимо, чтобы существовало и число.
12. А при существовании числа должно быть многое и бесконечная множественность существующего.

---

122 Политик. 262d–e.

123 Wedberg. Plato's Philosophy of Mathematics. P. 23.

Из этой дедукции Платон сделал вывод, что «число оказывается бесконечным по количеству и причастным бытию», т. е. получившаяся в результате конструкция производит числа, четные и нечетные, и данный процесс не имеет предела[124].

В «Пармениде» (154b) Платон приводит следующее уравнение: «Равные величины, будучи прибавлены к неравным, всегда оставляют их различающимися настолько, насколько они различались с самого начала», — сегодня мы бы записали это уравнение в такой форме:

$$|a-b| = |(a+n)-(b+n)|.$$

В «Пармениде» (161d) есть и следующее утверждение: «Что обладает великостью и малостью, то обладает и равенством, находящимся между ними», т. е. между двумя числами существуют три возможных вида отношений:

$$a < b \qquad a = b \qquad a > b$$

А в «Евтифроне» мы находим первое представление о том, что в наше время называется «элементарной теорией множеств»: «Стыд ведь есть как бы часть страха, подобно тому, как нечетное есть часть числа, однако дело обстоит не так, чтобы там, где было число, было и нечетное; наоборот, где нечетное, там и число»[125]. Так, если

---

124 Платон говорит также о необыкновенных качествах в сфере бесконечного: «Стало быть, любые [члены другого] взаимно другие как множества; они не могут быть взаимно другими как единицы, ибо единого не существует. Любое скопление их беспредельно количественно: даже если кто-нибудь возьмет кажущееся самым малым, то и оно, только что представлявшееся одним, вдруг, как при сновидении, кажется многим и из ничтожно малого превращается в огромное по сравнению с частями, получающимися в результате его дробления» (Парменид. 164d). При этом, конечно, Чернисс прав, когда отмечает, что «в трудах Платона нет последовательной теории бесконечного, как математической, так и физической» (Cherniss. Plato as Mathematician. P. 405). Однако мы и не ожидаем встретить такую «теорию» в трудах Платона.

125 Евтифрон. 12с.

M означает «число» (т. е. все натуральные числа), и U означает «нечетное» (т. е. все нечетные числа), то мы сегодня пишем:

$$\mathrm{M} \supset \mathrm{U} \quad \textit{или} \quad \mathrm{U} \subset \mathrm{M}$$

и называем M «множеством», а U «подмножеством». В следующей цитате мы также видим, что у Платона было яркое представление о различных вариантах образования подмножеств: «Если существует вид чего-либо, то он же необходимо будет и частью предмета, видом которого он считается. Часть же вовсе не должна быть необходимо видом»[126]. Мы выражаем это так: пусть M есть конечное множество, и $\{\mathrm{U}_i \subset \mathrm{M} \mid i \in \{1,2,3,\ldots,n\}\}$ есть множество его подмножеств. Пусть некоторые из этих U_i имеют особенность E; эти особенные подмножества мы называем $\mathrm{U}_k^{\mathrm{E}}$, и их множество выглядит как $\{\mathrm{U}_k^{\mathrm{E}} \subset \mathrm{M} \mid k \in \{1,2,3,\ldots,n\}\}$. Тогда каждый $\mathrm{U}_k^{\mathrm{E}}$ является U_i, но не каждый U_i необходимо является $\mathrm{U}_k^{\mathrm{E}}$.

У Платона также было правильное представление о том, что мы называем сегодня «полной математической индукцией». Ее определение звучит так: допустим, что утверждение *P* верно для числа 1. Если мы можем доказать, что когда *P* верно для числа *n*, то *P* верно также для числа $n + 1$, тогда *P* верно для всех чисел. В «Пармениде» (149a–c) Платон представляет этот принцип следующим образом: Допустим, что у нас есть два числа, друг рядом с другом, тогда между ними мы имеем одно соприкосновение, и если у нас есть *n* чисел, то очевидно, что мы имеем $(n - 1)$ соприкосновений:

$$\underbrace{1_{\vartriangle}2_{\vartriangle}3_{\vartriangle}4_{\vartriangle}\cdots_{\vartriangle}n}_{n-1}$$

Из этого можно сделать *общий* вывод, «что соприкосновений одним меньше сравнительно с числом членов соединения»[127].

---

126 Политик. 263b.

127 Парменид. 149b.

Но это далеко не все, что следует сказать о числах. Необходимо вспомнить, что для греков каждое число содержало в себе не только количественные, но и «качественные» свойства. В пифагорейской традиции «числовое богословие» играло особенно важную роль. А. И. Щетников пишет об этом так: «Формирование числового богословия как особого жанра происходит в среде пифагорейцев. Великие математические открытия Пифагора и его последователей связаны с учением о числовых рядах и числовой природе музыкальной гармонии. Интерес пифагорейцев к природе — это интерес к неизменному и вечно сущему, проявляющему себя в изменчивом мире. Мы сегодня называем это неизменное и вечно сущее законами природы, пифагорейцы же говорили о разных его сторонах как о божествах. Но боги — это не то же самое, что законы природы: ведь к божеству человек может стремиться, а к законам природы — вряд ли. Первооснову пифагорейского учения как раз и составляло стремление к правильной настройке человеческой души на божественный космический лад; и созерцание чисел и числовой структуры космоса было одной из существенных составляющих этой настройки»[128]. В связи с этим неудивительно, что пифагорейцы детально изучили свойства чисел, особенно чисел до десяти. Приведем один пример: Филон Александрийский знал, что седьмое число во всякой геометрической прогрессии, идущей от единицы, является и квадратом, и кубом[129]. Сегодня мы легко можем это доказать: любая геометрическая прогрессия, идущая от единицы, пишется как 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, и седьмой член a^6 является и квадратом, и кубом:

$$a^6 = \left(a^3\right)^2 = \left(a^2\right)^3$$

Но без наших алгебраических познаний совершить такие открытия можно лишь путем тщательного интеллектуального созерцания.

---

[128] Афонасин, Афонасина, Щетников. Пифагорейская традиция. С. 628. Эта подборка содержит некоторые тексты, представляющие такое «числовое богословие», в русском переводе.

[129] Там же. С. 633.

Значение чисел и отношения между ними также играют немалую роль в платоновской философии[130]. Как Платон использовал их для описания философских или нравственных проблем, мы обсудим в параграфе 3.1.

2.7. Дроби

Мало что зная об учении о рациональных числах, «мы можем только с уверенностью утверждать, что такое учение существовало»[131]. Ясно лишь то, что чистая математика во времена Платона допускала существование только целых чисел, а дроби в качестве чисел не рассматривались[132]. Вместо дробей греки использовали *отношения* между целыми числами. Это менее удобно, но при этом впечатляет, «с какой удивительной строгостью, общностью и глубоким пониманием существа проблемы была построена древними первая теория пар и введен закон композиции для этих новых объектов»[133].

---

130 О смысле и значении чисел в платоновской философии см.: Radke. Die Theorie der Zahl im Platonismus. На с. 430 мы читаем: «"Необычное" для нас представление о "числе" — необычное в том отношении, что оно обширнее, чем наше стандартное представление, ограничивающееся количественным и абстрактно вычислительным свойствами и далекое от того, чтобы обладать функцей учреждения своих принципов, — которое обосновывается в платонизме, может стать понятнее через анализ обычно используемых нами понятий. Ведь в итоге он покажет, что знакомые нам понятия о "числе" вовсе не могут мыслиться как нечто определенное, без того чтобы предполагалось это определенное первоначальное понятие числа и учреждающие его понятия. В ходе такого анализа становится ясно, почему в сущности необходимо, наряду с абстрактными понятиями о числах, с помощью которых мы считаем, предположить кроме того (необычное для нас) всеобъемлющее понятие числа».

131 История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. С. 70.

132 Подробное изложение см. в работе: Fowler. The Mathematics of Plato's Academy. P. 222–276. Фаулер утверждает, что «у нас нет никаких надежных свидетельств того, что греки использовали обыкновенные дроби или имели представление о них» (P. 263).

133 История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. С. 72.

В частности, Платон объяснял, почему единицу следует брать только как целое. Это важно не только из-за ее главенствующего положения в пифагорейской мистической нумерологии, но и по следующей причине: при делении единицы мы получаем несколько частей, т. е. множество, большее единицы, что является бессмысленным:

> Ты ведь знаешь, что те, кто силен в этой науке, осмеют и отвергнут попытку мысленно разделить самое единицу, но если ты все-таки ее раздробишь, они снова умножат части, боясь, как бы единица оказалась не единицей, а многими долями одного[134].

Греческим математикам было, конечно же, известно, что торговые агенты и архитекторы использовали дроби без каких-либо проблем[135], но сами они не хотели задействовать столь «низкий» инструмент. Ван дер Варден пишет об этом так: «До Архимеда дроби вообще не входили в официальную греческую науку. Но это объясняется не тем, что их не знали, а скорее тем, что их не хотели знать... Дробями пренебрегали и предоставляли их купцам...»[136] Мордухай-Болтовской поддерживает это мнение, ссылаясь на

---

134 Государство. 525e. Здесь можно привести слова Юлиуса Штенцеля, который, ссылаясь на мнение Генриха Шольца, писал: «В то время, как для профана b = ³⁄₅a, для серьезного математика это выглядит, как 5b = 3a. Шольц, ссылаясь на схолию к диалогу «Хармид»... делает вывод... что древние греки знали исчисление в дробях, например египетское, но намеренно "оставляли за дверью" все арифметические действия, связанные с дробями. Пропорция (*logos*) делает для греческой арифметики дробь ненужной, в то время как для египтян дробь явилась... новым типом числа, который они использовали наряду с целым числом» (Stenzel. Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles. S. 148. Примеч. 2).

135 Уже древние египетские математики использовали дроби и умели их складывать, вычитать, умножать и делить, правда, только на «эмпирическом» уровне. Вавилонские математики также использовали дроби в своей шестидесятеричной системе. См. удивительные примеры в книге: Раик. Очерки по истории математики в древности. С. 5–146.

136 Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 68–69.

определение 3 в книге VII «Начал» Евклида: «*Часть* есть число в числе, меньшее в большем, если оно измеряет большее». Он комментирует это определение следующим образом: «В подлиннике καταμετρῇ — "измеряет", но ни в коем случае не "делит"»[137]. Штенцель, однако, не был столь категоричен: «Если поставить вопрос, разработали ли греки методы исчисления с дробями, то факты свидетельствуют против однозначного ответа, положительного или отрицательного». Он указывает на определение 4 в VII книге Евклида: «*Части* же, если оно его не измеряет...», где множественное число слова «части» означает такие дроби, как *23*, *34*, *45* и т. д.[138] В общем, Штенцель говорит об «особенном отношении к дробям»[139] у греков, но при этом он согласен, что дроби не находились в центре внимания, так как пропорции сделали «разрушение» единицы ненужным. И действительно, чаще всего вместо дробей математики пользовались пропорциями, в которых были задействованы только целые числа[140].

Добавим к сказанному слова Фаулера на этот счет: древние греки не использовали дроби, так как «они не думали о соотношениях, подобных нашим рациональным числам, и потому не

---

137 Примечание Мордухай-Болтовского (Евклид. Начала. Кн. VII–X. С. 9).

138 Stenzel. Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles. S. 28.

139 Ibid. S. 33. М. Выгодский также констатирует, «что греки имели не один, а целых три способа канонического представления дробей. Один из них — это наш способ образования "обыкновенных" дробей. Ему соответствует в греческом языке способ словесного выражения, вполне аналогичный существующему в русском языке: мы выражаем, например, дробь 7/60 словами "семь шестидесятых" (частей)... Точно так же образуется соответствующее греческое название той же дроби ἕπτα ἑξέκοσται (μέρη). Письменное выражение обыкновенных дробей совершалось у древних греков различными способами» (Выгодский. Арифметика и алгебра в древнем мире. С. 276).

140 Античная арифметика не имела способа описания всех соотношений величин, конструируемых в геометрии. Для решения этой проблемы Евдокс создает довольно глубоко разработанную теорию пропорций, которая сохранилась в книге V «Начал» Евклида.

считали арифметику естественной и очевидной основой для построения своей математики»[141].

Платон также не интересовался дробями, но не по математическим, а по философским причинам: «Чем больше мы размышляем о чистом числовом смысле множественности, тем больше можем мы пренебречь вопросом о дробях. Платон произнес это ясно и четко (Федон, 97а)... Ни прибавление, ни раздробляющее деление... не могут объяснить сами по себе, что есть "два", — но только размышление о чистом смысле двойственности»[142].

2.8. Иррациональные отношения

В вопросе иррациональных отношений ситуация была схожа с тем, что мы чуть выше писали о дробях: греческие математики знали и даже умели доказывать, что в геометрии существуют несоизмеримые отрезки. Например, стороны квадрата и его диагонали не имеют общей меры и, следовательно, их соотношение не может быть выражено целым числом.

По некоторым рассказам, этот факт вызывал у многих глубокое изумление — согласно легенде, пифагореец Гиппас однажды разболтал эту тайну, и был наказан за это богами гибелью в кораблекрушении. Это изумление понятно, ведь пифагорейцы пытались осмыслить мир с помощью натуральных чисел, пытаясь таким образом придать ему рациональную структуру. А иррациональное — это «невыразимое» (ἄρρητον или ἄλογον), это хаос. П. Гайденко говорила о том, что «открытие отношений, не выразимых числами... вызвало первый в истории кризис оснований математики»[143], но другого выхода не было: под «давлением фактов» греки были вынуждены принять иррациональные соотношения.

[141] Fowler. The Mathematics of Plato's Academy. P. 365–366.

[142] Stenzel. Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles. S. 34.

[143] Гайденко. Обоснование научного знания в философии Платона. С. 100.

Фаулер оспаривал достоверность таких рассказов; по его данным, древние источники никогда не упоминают о каком-то изумлении такого рода. Аристотель, например, часто критиковал пифагорейскую философию, но не говорил, что несоизмеримость разрушает ее главную догму «Все есть число». Теэтет (147d–148b) «не дает никаких указаний на то, что явление несоизмеримости представляло какую-то фундаментальную концептуальную трудность для математиков; скорее оно рассматривается в качестве источника интересных и плодотворных проблем»[144]. А. Е. Раик также констатирует, что «доказательство этого факта, т. е. иррациональности $\sqrt{2}$, принадлежащее пифагорейцам, *не вызывало никаких сомнений*»[145] (курсив наш. — *В. З.*). Невообразимой была для них только мысль о том, что соотношению несоизмеримых отрезков мог бы соответствовать новый вид чисел, — то, что мы называем сегодня «иррациональными числами», например $\sqrt{2}$[146].

---

[144] Fowler. The Mathematics of Plato's Academy. P. 290.

[145] Раик. Очерки по истории математики в древности. С. 157.

[146] Иррациональное, кстати, является «невообразимым» не только для древних греков, но и для некоторых современных математиков. Уже Кеплер напоминал о том, что стороны семиугольника являются иррациональными, и делал такой вывод: «Это важный факт. В этом лежит причина того, что Бог не использовал семиугольники для украшения мира, как он сделал это с простыми фигурами» (Kepler. Weltharmonik. S. 45). И математик Л. Кронекер сказал однажды: «Господь сотворил целые числа; остальное — дело рук человека» (цит. по. Bell: Die grossen Mathematiker. S. 453). Кроме того, согласно Расселу, привычные обоснования для существования иррациональных чисел стоят на «глиняных ногах»: «Уравнение $x^2 - 2 = 0$, как утверждалось, должно иметь решение, поскольку с ростом x от 0 до 2, $x^2 - 2$ увеличивается и, являясь сначала отрицательным, затем становится положительным; если x изменяется непрерывно, то же происходит с $x - 2$; следовательно, $x^2 - 2$ должен стать равным 0 при переходе от отрицательного значения к положительному. Или, опять же, было отмечено, что диагональ квадрата со стороной равной 1 имеет, очевидно, точную и определенную длину x, и что эта длина такова, что $x^2 - 2 = 0$. Но такие аргументы были не в силах доказать, что x действительно является числом. Они могут в равной степени рассматриваться как демонстрации неадекватности чисел алгебре и геометрии» (Russel. The Principles of Mathematics.

Все же проблема иррациональных отношений играет важнейшую роль в развитии древнегреческой математики. Согласно исследованиям Ван дер Вардена, это открытие привело к изложению алгебры полностью в геометрической форме (в конце этого параграфа мы приведем пример подобной геометрической конструкции). Как подчеркивает Ван дер Варден, это было естественным шагом для греческих математиков в силу логической строгости их взглядов: «Мы в настоящее время говорим, что длина диагонали выражается "иррациональным числом" $\sqrt{2}$, и чувствуем свое превосходство над бедными греками, которые "не знали, что такое иррациональные числа". Однако греки знали очень хорошо иррациональные отношения. Как мы увидим далее, они имели очень ясное представление об отношении диагонали к стороне квадрата и были в состоянии совершенно безукоризненно доказать, что это отношение не может быть выражено в целых числах. И если они не рассматривали $\sqrt{2}$ как число, то это было результатом не их неведения, но только того, что они строго держались своего определения числа. "Arithmos" обозначает количество, а следовательно, и целое число. Логическая строгость не позволяла им допускать даже дробей, и они заменяли их отношением целых чисел. — Для вавилонян же каждый отрезок и каждая площадь представляли собой просто-напросто число. Они даже и не задумывались, когда приходилось площадь прямоугольника сложить с его основанием. Когда они не могли точно извлечь квадратный корень, то спокойно удовлетворялись приближением. Инженеры и естествоиспытатели во все времена поступали точно так же. Но для греков имело

P. 282). Знаменитое «Дедекиндово сечение» тоже не дает никаких доказательств существования иррациональных чисел; «Таким образом, существование иррациональных чисел не доказано, они могут быть просто удобной выдумкой» (Ibid.). То же самое необходимо сказать и о теории Вейерштрасса: «Ряды рациональных чисел не могут доказать существование иррациональных чисел как своего предела, а только могут доказать, что, если существует такой предел, он должно быть иррациональным» (Ibid. P. 268; см. целиком главу XXXIV «Infinity and Continuity», где Рассел обсуждает все проблемы обоснования иррациональных чисел).

значение точное знание, "диагональ в самой своей сущности", как выражает это Платон, а не допустимое приближенное значение. — Уравнение $x^2=2$ не может быть разрешено ни в области целых чисел, ни даже в области отношений чисел. Но оно вполне разрешимо в области прямолинейных отрезков: действительно, его решением является диагональ квадрата со стороной, равной единице. Следовательно, для того чтобы получить точное решение квадратного уравнения, нам надлежит из области чисел перейти в область геометрических величин. Геометрическая алгебра приложима также и к иррациональным отрезкам и тем не менее является точной наукой. Следовательно, не только наслаждение зримым, но и логическая необходимость заставила пифагорейцев преобразовать их алгебру в геометрическую форму»[147].

Интересно посмотреть, как греки доказывали несоизмеримость стороны квадрата и его диагонали. В приложении к книге X «Начал» Евклида мы находим старинное доказательство, которое, несомненно, было известно уже Платону. Оно построено на косвенном способе доказательства[148] и опирается на некоторые свойства четных и нечетных чисел. Как мы уже говорили, в своих диалогах Платон неоднократно рассуждал о четных и нечетных числах. Рассматриваемое старинное доказательство достаточно сложно[149], поэтому понятно, почему факт несоизмеримости долгое время оставался неизвестным.

---

147 Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 175.

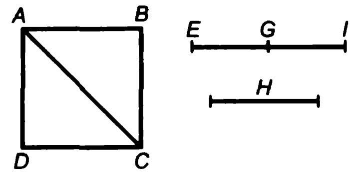
148 Подобный метод вызывает какое-то неудобство или даже сомнение — мы еще скажем об этом в параграфе 3.11.

149 Греческая система цифр (цифры записывались буквами α, β, γ́...) была не слишком удобна, поэтому греки предпочитали математические рассуждения в геометрической форме. Сегодня в нашем распоряжении есть средства (арабские цифры, алгебраические знаки), делающие доказательства намного короче и нагляднее. Теорему несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали в наше время можно доказать следующем образом: возьмем квадрат $ABCD$ с диагональю AC и предположим, что AC линейно соизмерима с AB. Допустим, отношение $AC : AB$ в численном выражении равно $m : n$, где m и n — натуральные, взаимно простые числа

Приведем доказательство несоизмеримости стороны квадрата и его диаметра[150] из «Начал» (X):

Пусть нам будет предложено доказать, что для квадратных фигур диаметр будет линейно несоизмерим со стороной.

Пусть квадрат будет *ABCD*, диаметр же его *AC*; я утверждаю, что *CA* будет линейно несоизмерима с *AB*.



Действительно, если возможно, пусть будет соизмерима; я утверждаю, что окажется, что одно и то же число будет четным и нечетным. Очевидно теперь, что квадрат на *AC* вдвое больше квадрата на *AB* (предложение 47 книги I). И поскольку *CA* соизмерима с *AB*, то, значит, *CA* имеет к *AB* отношение как число к числу (предложение 6). Пусть оно будут иметь то, которое *EI* имеет к *H*, и пусть *EI*, *H* будут наименьшие из имеющих с ними одно и то же отношение (ср. предложение 33 книги VII); значит, *EI* не будет единицей. Действительно, если *EI* будет единицей, имеет же к *H* отношение, какое *AC* имеет к *AB*, и *AC* больше *AB*, то, значит, и *EI* (единица) больше *H* — числа (предложение 14 книги V);

(т. е. m и n имеют только один общий делитель, равный единице). Из $AC : AB = m : n$ следует $(AC)^2 : (AB)^2 = m^2 : n^2$. Согласно теореме Пифагора, мы знаем, что $(AC)^2 = 2(AB)^2$, следовательно, $2 = m^2 : n^2$ или $m^2 = 2n^2$, значит, m^2 — четное число и, следовательно, само m — четное число (это заключение верно, так как квадрат нечетного числа тоже нечетен!) Так как m — четное число, существует число $h = m/2$. Отсюда, $m = 2h$. Следовательно, $m^2 = 4h^2$. Поскольку выше мы получили $m^2 = 2n^2$, то $2n^2 = 4h^2$, следовательно, $n^2 = 2h^2$. Значит, n^2 — четное число и, следовательно, n — тоже четное число. Но по условию m и n взаимно простые числа, и если m, как мы видели выше, четное число, то n должно быть нечетным. Это противоречие, и значит, что наше первоначальное предположение, что диагональ квадрата AC линейно соизмерима со стороной квадрата AB, неверно. Отсюда следует, что диагональ квадрата линейно несоизмерима с его стороной, что и требовалось доказать.

150 «Понятие *диаметра* было обычным у Евклида и других авторов для обозначения диаметра квадрата, а также параллелограмма; *диагональ* была более поздним термином, введенным Героном» (Heath. The Thirteen Books of Euclid's Elements. Vol. 1. P. 185).

это же нелепо. Значит, *EI* единицей не будет; значит, будет числом. И поскольку будет, что как прямая *CA* к *AB*, так и число *EI* к *H*, то, значит, и как квадрат на *CA* к квадрату на *AB*, так и квадрат на *EI* к квадрату на *H* (предложение 20 книги VI, следствие; предложение 11 книги VIII). Квадрат же на *CA* вдвое больше квадрата на *AB*, значит, и квадрат на *EI* вдвое больше квадрата на *H*; значит, квадрат на *EI* будет четным; так что и само *EI* будет четным. Действительно, если бы оно было нечетным, то и квадрат на нем был бы нечетным, поскольку ведь, если складываются сколько угодно нечетных чисел и количество же их нечетно, то и целое будет нечетным (предложение 23 книги IX); значит, *EI* будет четным. Разделим его пополам в *G*. И поскольку *EI*, *H* суть наименьшие из имеющих с ними то же отношение, то они будут первыми между собой (предложение 21 книги VII). И *EI* четное; значит, *H* будет нечетным. Действительно, если бы оно было четным, то числа *EI*, *H* измеряла бы двойка; ибо всякое четное число имеет половинную часть (определение 6 книги VII); между тем, они являются первыми между собой; это же невозможно. Четным, значит, не будет *H*; значит — нечетным. И поскольку *EI* вдвое больше *EG*, то, значит, квадрат на *EI* в четыре раза больше квадрата на *EG* (предложение 11 книги VIII). Квадрат же на *EI* вдвое больше квадрата на *EG*; значит, и квадрат на *H* вдвое больше квадрата на *EG*; значит, четным будет квадрат на *H*. Четным, значит, вследствие вышесказанного, будет и *H*; но оно же и нечетное; это же невозможно. Значит, *CA* не будет линейно соизмеримым с *AB*; что и требовалось доказать.

Факт несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали (а также несоизмеримости некоторых других отрезков в геометрии), т. е. факт существования «иррациональных соотношений», был известен Платону[151], который, согласно исследованиям Фаулера,

---

151 См., напр.: Гиппий Больший. 303b — «Что же мешает, чтобы… две величины, каждая из которых неопределенна, взятые вместе, давали бы то определенную, то неопределенную величину?..» Э. Хайч в комментарии к этому отрывку отмечает, что утверждение Сократа, «что сумма двух иррациональных слагаемых может быть иногда рациональной, иногда иррациональной, часто вообще не рассматривается некоторыми исследо-

был первым, кто засвидетельствовал этот факт. Сам Платон уже не удивлялся этому, но знал, что многим такие соотношения неизвестны и непонятны, что показывает разговор между Афинянином и Клинием:

> Ты знаешь, что такое длина? — Да. — А ширина? — Конечно, знаю. — А также и то, что это составляет два [измерения], третьим же [измерением] будет глубина? — Разумеется, так. — Не кажется ли тебе, что все это соизмеримо между собой? — Да. — А именно что по самой природе возможно измерять длину длиной, ширину — шириной и точно так же и глубину? — Вполне. — А если бы оказалось, что это возможно лишь отчасти, поскольку кое-что несоизмеримо ни полностью, ни чуть-чуть, ты же считаешь все соизмеримым, — в какое положение, по-твоему, ты бы попал? — Ясно, что в незавидное[152].

В «Теэтете» мы находим следующее описание, которое доказывает осведомленность Платона в этой области:

> Всякий отрезок, который при построении на нем квадрата дает площадь, выраженную равносторонним числом, мы наз-

---

вателями, либо считается совершенно неправильным (как в работах Tarrant D., 1928; Woodruff, 1982). Тем не менее, оно верно, на что указал мне Франц фон Кучера. Сумма двух нерациональных чисел может быть рациональной, как утверждает этот текст; например, сумма чисел √2 и 2-√2 рациональна, а именно равна 2» (Heitsch. Platon — Grösserer Hippias. S. 101. Примеч. 162). Платон мог бы представить выражение 2-√2 геометрически: отрезок длиной 2 минус диагональ квадрата со стороной равной 1. Но есть и более интересные примеры, такие как следующий: пусть a = 0,101001000100001... (каждый раз перед 1 пусть будет на один ноль больше) и b = 0,0101101110111... (каждый раз после 0 пусть будет на одну 1 больше), оба бесконечные непериодические десятичные дроби, т. е. иррациональные числа, при этом их сумма $a + b$ = 0,111111111... = 0,(1) = 1/9 — т. е. рациональное число.

152 Законы. 819е–820b. См. также: 820c — «Это причины, по которым, согласно природе, возникает соизмеримость и несоизмеримость. Необходимо иметь их в виду и различать, иначе человек будет совсем никчемным».

> вали длиной, а всякий отрезок, который дает разностороннее продолговатое число, мы назвали [несоизмеримой с единицей] стороной квадрата, потому что такие отрезки соизмеримы первым не по длине, а лишь по площадям, которые они образуют. То же и для объемных тел[153].

В «Филебе» (16с–18с) Платон приводит замечательные рассуждения, тесно связанные с проблемой существования чисел, которые не могут быть записаны полностью. Они, по мнению Платона, содержат некоторую «опасность»:

> Беспредельное множество отдельных вещей и [свойств], содержащихся в них, неизбежно делает также беспредельной и бессмысленной твою мысль, лишает ее числа, вследствие чего ты никогда ни в чем не обращаешь внимания ни на какое число[154].

Одна из проблем, например, состоит в том, что ряд натуральных чисел, начиная с единицы[155], содержит в себе, с одной стороны, конечное, ограниченное множество, но, с другой — множество беспредельное, ничем не ограниченное. Оба «конца» совпадают друг с другом диалектически, как «сросшиеся воедино предел и беспредельность»[156]. Но оказывается, что между единством и

---

[153] Тэтет. 148а. Ср. со словами Евы Сакс: «Платон знает и цитирует в "Государстве" (VII, 534d) и "Теэтете" (148а) учение Теэтета об ἄλογοι γραμμαί. Но, согласно Евклиду (Def. X 1, 4), ἄλογος — это прямая, квадрат которой не рационален; этот факт показывает, что Платон знал и другие геометрические площади (ἕτερά τινα εὐθύγραμμα), которые были нерациональны» (Sachs. Die fünf platonischen Körper. S. 172).

[154] Филеб. 17е.

[155] Таково и наше представление. Для греков первым числом было «три» — см. подробное описание в работе: Гайденко. Обоснование научного знания в философии Платона. С. 102–118.

[156] Филеб. 16с. Об этом совпадении в примеч. 26 к диалогу «Парменид» пишет А. Тахо-Годи: «Идея единства этих двух, как будто бы столь различных, категорий бытия всегда была близка античности» (Платон. Собр. соч. в 4-х томах. Т. 2. С. 509).

беспредельным имеется что-то еще, то, что должно, по мнению Платона, обязательно исследоваться и упорядочиваться:

> Теперешние мудрецы устанавливают единство как придется — то раньше, то позже, чем следует, и сразу после единства помещают беспредельное; промежуточное же от них ускользает[157].

Платон прямо не поясняет, что же это такое — «промежуточное», которое легко ускользает от нашего внимания. Вот что он говорит по этому поводу в «Филебе»:

> Все, о чем говорится как о вечно сущем, состоит из единства и множества и заключает в себе сросшиеся воедино предел и беспредельность. Если все это так устроено, то мы всякий раз должны вести исследование, полагая одну идею для всего, и эту идею мы там найдем. Когда же мы ее схватим, нужно смотреть, нет ли кроме одной еще двух, а может быть, трех идей или какого-то иного их числа, и затем с каждым из этих единств поступать таким же образом до тех пор, пока первоначальное единство не предстанет взору не просто как единое, многое и беспредельное, но как количественно определенное. Идею же беспредельного можно прилагать ко множеству лишь после того, как будет охвачено взором все его число, заключенное между беспредельным и одним; только тогда каждому единству из всего [ряда] можно дозволить войти в беспредельное и раствориться в нем. Так вот каким образом боги, сказал я, завещали нам исследовать все вещи, изучать их и поучать друг друга[158].

В диалоге «Парменид» мы также находим рассуждения, показывающие, что у Платона были некоторые догадки о том, что существуют не только «единица» и «бесконечное» как экстремальные

---

[157] Филеб. 16е–17а.

[158] Филеб. 16с–е.

пункты, но и целый мир разных множеств[159]. Поэтому Платон ставит задачу привести в порядок хаос беспредельного, т. е. определить иррациональность конструктивно[160] и классифицировать ее[161]. В

---

[159] Ср., напр.: Парменид. 158c–d — «Итак, если постоянно рассматривать таким образом иную природу идеи саму по себе, то, сколько бы ни сосредоточивать на ней внимание, она всегда окажется количественно беспредельной. — Безусловно, так. — С другой же стороны, части, поскольку каждая из них стала частью, обладают уже пределом как друг по отношению к другу, так и по отношению к целому и целое обладает пределом по отношению к частям. — Несомненно. — Итак, другое в отношении единого, как оказывается, таково, что если сочетать его с единым, то в нем возникает нечто иное, что и создает им предел в отношении друг друга, тогда как природа другого сама по себе — беспредельность». О рассуждениях Феодора («Теэтет») о различных нерациональных отношениях см. также параграф 2.9 наст. изд.

[160] Примером простой, наглядной конструкции, известной древним математикам, является Золотое сечение. Оно делит непрерывную величину S на две части в таком отношении, при котором меньшая часть T_2 так относится к большей T_1, как большая T_1 ко всей величине S, то есть $T_1 : S = T_2 : T_1$. Если мы возьмем T_1 как новую величину, а T_2 как большую и T_3 как меньшую части, то Золотое сечение выглядит так: $T_2 : T_1 = T_3 : T_2$, и следовательно, мы получим $T_3 : T_2 = T_2 : T_1 = T_1 : S$, то есть, если продолжить процесс тем же способом, то значение дробей $T_{n+1} : T_n$ неизменно соответствует иррациональному числу 1,6180339887... в современных обозначениях.

[161] Древние греки рассматривали иррациональные соотношения только *геометрически*. Они не считали «дроби» числами, и тем более не могли представить, что существуют *иррациональные числа*. «Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной» — это они доказали, но не выражали отношение «диагональ : сторона» числом, как делаем это мы с помощью знака «$\sqrt{2}$». Поэтому о том, что мы назвали «занялись классификацией иррациональности в геометрии», правильней было бы сказать: «занялись классификацией разных степеней несоизмеримости в геометрии». То, что древние греки уже начали это классифицирование, подчеркивает О. Беккер: они в какой-то степени различали ступени и виды формирования иррациональных отношений в том смысле, что формулировки этих отношений становились все более сложными и «не до конца произносимыми» (Becker. Mathematische Existenz. S. 578). X книга «Начал» Евклида в особенной степени показывает стремление конструировать и классифицировать иррациональное. Такая классификация имела ценность для Платона

соответствии с этим требованием греческие математики, прежде всего Теэтет и Евдокс, занялись классификацией иррациональности в геометрии[162], правда ограничиваясь конструкциями, которые могли быть построены с помощью «идеальных» циркуля и линейки (см. параграф 2.3).

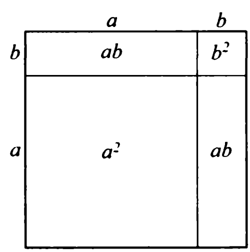
Добавим несколько слов о геометрической форме математики, чтобы получить какое-то представление о том, как во времена Платона греки — да и сам Платон — ею занимались. Их геометрическое воображение было поразительным, но у них не было наших алгебраических возможностей. Кольман пишет об этом так: «Открытие несоизмеримости, невозможность выразить отношение любых двух целых чисел привели к тому, что греки стали употреблять не арифметические, а геометрические отношения для выражения общих отношений между величинами. У них создалась своеобразная "геометрическая алгебра". Именно по этой причине, а вовсе не из-за особого предрасположения "греческого духа" к

потому, что «она выявляет способ бытия этих величин в градации, в которой они шаг за шагом удаляются от рациональных пропорций, которые можно выразить понятными грекам числами (ἀριθμοί)» (Ibid. S. 576).

162 См. короткое изложение у Кольмана: «Ученик Теодора из Кирены, Теэтет Афинский (около 414–369 гг. до н. э.) внес два важных вклада в математику, вошедшие позже в "Начала" Евклида. Во-первых, он дал классификацию иррациональностей. Кроме отрезков, соизмеримых и несоизмеримых $\sqrt{a}$, вводится так называемая медиаль (в нашем обозначении $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}$, где a и b — соизмеримы), далее биномиаль $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, первая бимедиаль $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{c}\sqrt{d}}$, где произведение $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}\sqrt{d}}$ — рационально, и вторая бимедиаль $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{c}\sqrt{d}}$, где произведение $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}\sqrt{d}}$ — иррационально, но имеет вид $\sqrt{e}$. Эти шесть видов величин образуют первую гексаду, в которой произведение квадратов обеих слагаемых, образующих данную величину, всегда рационально. Вторая гексада иррациональности отличается от первой тем, что упомянутое только что произведение иррационально. Третья и четвертая гексады аналогичны предыдущим двум, отличаясь от них лишь тем, что место сложения занимает вычитание; величина вида $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (в нашем написании) называется вычет» (Кольман. История математики в древности. С. 112). Подробное изложение см. в работе: Раик. Очерки по истории математики в древности. С. 157–165.

геометрическим формам, как это утверждают идеалисты, у греков геометрия стала играть роль алгебры»[163]. Этот геометрический путь «был ошибкой в стратегии, хотя на первых порах античная математика получила большие тактические преимущества. Построение алгебры на основе геометрии впервые позволило обосновывать общим образом некоторые теоремы и правила алгебры, однако при дальнейшем развитии геометрическое облачение как панцирь сковало живое тело античной математики. Оно мешало гармоничному развитию отдельных частей математики, делало ее громоздкой и малоподвижной. Геометрическая броня античной математики походила на внешний скелет панцирных животных, который при дальнейшей эволюции был заменен внутренним скелетом»[164]. Чтобы читатель мог «прочувствовать» особенности геометрического метода, применявшегося Платоном и древними греческими математиками, приведем несколько примеров.

Чтобы продемонстрировать для начала **преимущество** геометрического метода, возьмем формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, которая непонятна для многих школьников. В геометрической форме это уравнение сразу становится очевидным: большой квадрат $(a + b)^2$ состоит из двух квадратов a^2 и b^2 и двух одинаковых прямоугольников ab:



[163] Кольман. История математики в древности. С. 116.

[164] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т. I. С. 78.

Демонстрируя **трудности** чисто геометрических методов, Бурбаки приводит следующий пример. В X книге «Начал» Евклид «рассматривает выражения, получаемые путем сочетания нескольких радикалов, как, например, $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ (где a и b — рациональные), приводит условия, при которых эти выражения являются иррациональными, разбивает их на многочисленные категории (доказывая, что они отличны друг от друга) и изучает алгебраические соотношения между этими различными иррациональностями, например такое, которое мы бы теперь записали следующим образом: $\sqrt{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{p}+\sqrt{p-q}\right)} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{p}-\sqrt{p-q}\right)}$

Все это было выражено на обычном для "Начал" языке геометрии, что делало изложение особенно неудобным и запутанным»[165].

А теперь посмотрим, как древние греки решали квадратное уравнение $x^2 - ax + b = 0$. Этот пример потребует от читателя внимательного рассмотрения, но он является полезным для того, чтобы немножко лучше понять форму математического мышления, используемого Платоном. Сначала мы интерпретируем величины x, a, b геометрически. Пусть x будет отрезком, так же a. Тогда x^2 означает площадь квадрата, и ax — площадь прямоугольника. Следовательно, b также должно выражать площадь; пусть b означает квадрат со стороной $\sqrt{b}$. Уравнение $x^2 - ax + b = 0$ мы напишем в форме $ax - x^2 = b$ и интерпретируем его геометрически таким образом: отрезок x должен конструироваться так, чтобы площадь прямоугольника ax минус площадь квадрата x^2 была равна площади квадрата b.

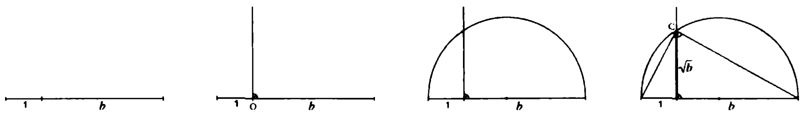
Сначала дадим «рецепт» для решения:

Первый шаг: Нам дано b, надо определить $\sqrt{b}$. Это делается с помощью геометрического построения высоты. На прямой отложим отрезки 1 и b. В точке их касания O поставим перпендикуляр. Над отрезком $1 + b$ начертим круг. По теореме Фалеса (вписанный угол, опирающийся на диаметр, является прямым, так как он опирается

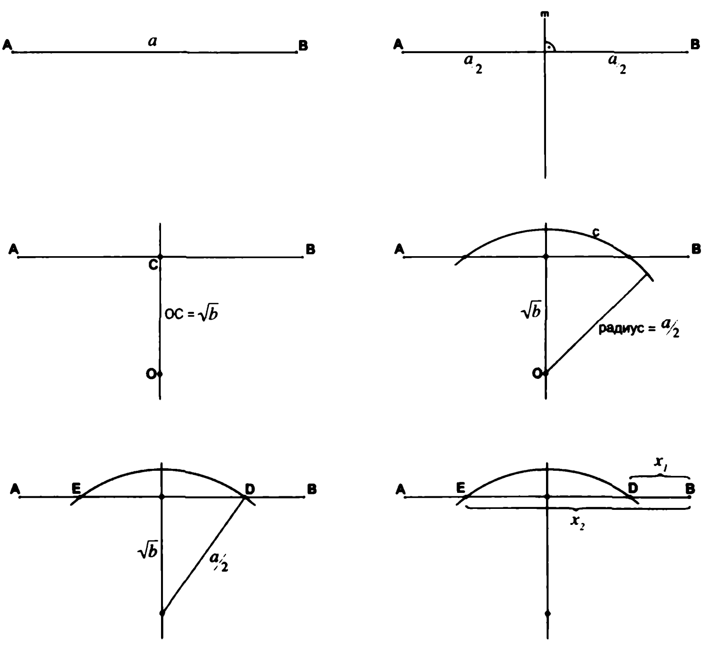
---

165 Бурбаки. Очерки по истории математики. С. 88.

на половину окружности) точка С касания перпендикуляра с кругом определяет угол прямоугольного треугольника. Его высота равна $\sqrt{b}$, так как по теореме о высоте прямоугольного треугольника произведение частей гипотенузы, на которые их делит высота, — 1 и b — равно квадрату высоты: $1 \cdot b = (\sqrt{b})^2$.

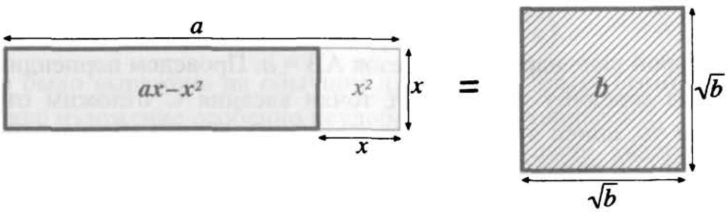


Второй шаг: нарисуем отрезок АВ = a. Проведем перпендикуляр m через середину отрезка. От точки касания С отложим отрезок равный $\sqrt{b}$, конец этого отрезка – точка О. Нарисуем окружность с центром О и радиусом $a/2$. Определим точки касания окружности с отрезком АВ : D и E. Тогда отрезок DB является одним решением x_1, и отрезок EB другим решением x_2 уравнения $x^2 - ax + b = 0$.

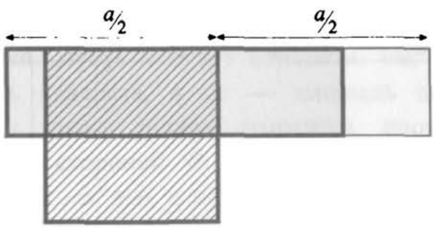


Этот рецепт достаточно прост, и теоретически он дает правильный результат; в реальности, конечно же, точность результата зависит от точности рисунка.

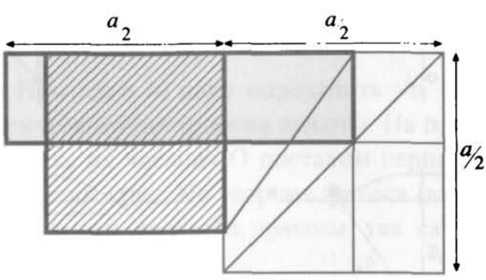
Теперь докажем правильность этого «рецепта». Как мы уже сказали, уравнение $x^2 - ax + b = 0$ мы напишем в форме $ax - x^2 = b$ и интерпретируем его геометрически: отрезок x должен конструироваться так, чтобы $ax - x^2$ (площадь прямоугольника) была равна b (площади квадрата):



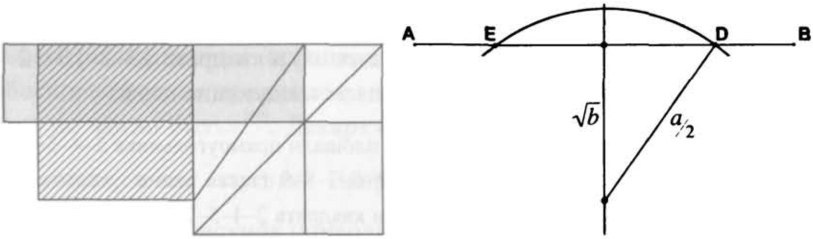
Эти площади мы расположим вот так:

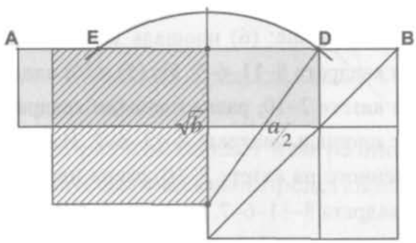


Добавив некоторые отрезки следующим образом,

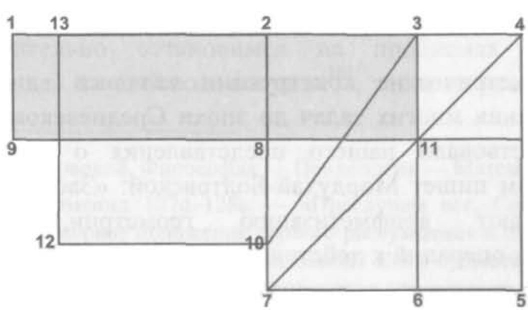


мы получаем совпадение с пятым рисунком «рецепта»:





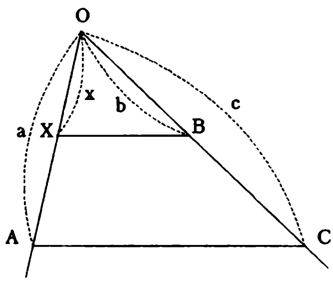
Нам осталось рассмотреть последний, ключевой рисунок, но с цифровыми обозначениями. Ясно, что отрезок 1–4 равен a, отрезок 1–9 равен x, отрезок 10–3, как и отрезок 4–5, равны $a/2$, и отрезок 13–2, так же как отрезок 13–12, равны $\sqrt{b}$.



Теперь наша задача такова: доказать равенство площадей прямоугольника 1–3–11–9 (его площадь равна $ax–x^2$) и квадрата 13–2–10–12 (его площадь равна b). Для этого проделаем следующие шаги:

(1) Площадь прямоугольника 1–2–8–9 равна площади прямоугольника 3–4–5–6. Из этого следует: (2) площадь фигуры 1–3–6–7–8–9 (такая «многоугольная» фигура называется «гномон») равна площади квадрата 2–4–5–7. Далее: из того, что отрезок 10–3, как и отрезок 4–5, равен $a/2$, следует: (3) площадь квадрата под отрезком 10–3 равна площади квадрата 2–4–5–7. Из (2) и (3) следует: (4) площадь квадрата под отрезком 10–3 равна площади гномона 1–3–6–7–8–9. Теперь рассмотрим прямоугольный треугольник 2–3–10. Согласно теореме Пифагора, получается: (5) площадь квадрата, построенного на катете 2–10, равна квадрату, построенному на гипотенузе 10–3, минус площадь квадрата, построенного на катете 2–3. Дальше: (6) площадь квадрата, построенного на катете 2–3, равна площади квадрата 8–11–6–7. Из (5) и (6) следует: (7) площадь квадрата, построенного на катете 2–10, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе 10–3, минус площадь квадрата 8–11–6–7. Из (7) и (4) следует (8) площадь квадрата, построенного на катете 2–10, равна площади гномона 1–3–6–7–8–9 минус площадь квадрата 8–11–6–7. Но гномон 1–3–6–7–8–9 минус квадрат 8–11–6–7 — это прямоугольник 1–3–11–9. Поэтому: (8') площадь квадрата, построенного на катете 2–10, равна площади прямоугольника 1–3–11–9. А в нашей конструкции мы выбрали отрезок 1–4 равный a, и отрезок 2–10 равный $\sqrt{b}$. А если мы обозначаем отрезок 3–4 величиной x, мы получаем для площади прямоугольника 1–3–11–9 выражение $(a–x)\cdot x$, и для площади квадрата 13–2–10–12 выражение $(\sqrt{b})^2 = b$. А мы доказали геометрически, что площади прямоугольника 1–3–11–9 и квадрата 13–2–10–12 равны, поэтому получается алгебраическое уравнение $(a - x) \cdot x = b$, или $x^2 - ax + b = 0$.

Такие геометрические конструкции являлись единственным способом решения многих задач до эпохи Средневековья, так как еще не существовало нашего представления о вещественных числах. Об этом пишет Мордухай-Болтовской: «Заслугой Декарта иногда считают арифметизацию геометрии, приведение геометрических операций к действиям над числами. Но это неверно. Это было бы возможно только в том случае, если бы Декарт представлял себе взаимно-однозначное соответствие между числами и геометрическими величинами, т. е. если бы он имел в своем распоряжении иррациональные числа, хотя бы не строго обоснованные, но принятые на веру. Но в это время этого не было, да и не могло быть»[166]. Декарт использует буквы, но мыслит их не как числа, а как отрезки. Например, величину $x = \frac{ab}{c}$ он строит геометрически (рисунок приводит Мордухай-Болтовской):



Этот пример еще раз показывает нам разницу между нашими и древнегреческими математическими представлениями и методами.

2.9. Проблемы логического мышления

В параграфах 2.10 и 2.11 мы рассмотрим две математические области с целью показать, как Платон, всегда стремившийся избегать сомнительных соображений, пытался создать методологию правильного научного мышления и какие средства он предлагал для достижения этой цели. Чтобы понять важность этого стремления, мы предварительно остановимся на проблемах логического мышления — как на элейских апориях[167], так и на «софистических

166 Мордухай-Болтовской. Философия — Психология — Математика. С. 375.

167 См., напр.: Парменид 127d–128a — «Прослушав все, Сократ попросил прочесть снова первое положение первого рассуждения и после прочтения его сказал: — Как это ты говоришь, Зенон? Если существует многое, то оно должно быть подобным и неподобным, а это, очевидно, невозможно, потому что и неподобное не может быть подобным, и подобное —

подвохах»[168]. Платон стремился избегать и того и другого[169], но для этого он должен был обратиться к логическим проблемам, поставленным элейцем Зеноном и софистом Протагором.

Платон иногда говорил о софистах иронически и язвительно[170], но хорошо понимал, что этого недостаточно для научного спора. Ведь зачастую было трудно или даже невозможно точно определить

неподобным. Не так ли ты говоришь? — Так, — ответил Зенон. — Значит, если невозможно неподобному быть подобным и подобному — неподобным, то невозможно и существование многого, ибо если бы многое существовало, то оно испытывало бы нечто невозможное? Это хочешь ты сказать своими рассуждениями? Хочешь утверждать вопреки общему мнению, что многое не существует? И каждое из своих рассуждений ты считаешь доказательством этого, так что сколько ты написал рассуждений, столько, по-твоему, представляешь и доказательств того, что многое не существует? Так ли ты говоришь, или я тебя неправильно понимаю? — Нет, — сказал Зенон, — ты хорошо схватил смысл сочинения в целом».

168 Теэтет. 154d. Софизм — это ложное умозаключение, которое тем не менее при поверхностном рассмотрении кажется правильным. В отличие от этого, апория — это аргумент, который не содержит логической ошибки (по крайней мере, легко обнаруживаемой), но приводит к парадоксальному выводу.

169 В реальности не всегда легко определить разницу между софизмом и апорией. Парадокс Ахилла, например, носит в себе черты и софизма, и апории. Вспомним, что однажды платоновский Сократ представил Зенона настоящим софистом: «В самом деле, он написал примерно то же, что и ты, но с помощью переделок старается ввести нас в заблуждение» (Парменид. 128а).

170 «Если бы мы... были великими мудрецами, изведавшими все глубины сердца, и нам от избытка премудрости оставалось бы только ловить друг друга на софистических подвохах, то... мы могли бы отражать одно рассуждение другим» (Теэтет. 154d); «Не дай бог, чтобы кто-нибудь из моих родных, домашних или друзей, здешних или иноземных, настолько сошел с ума, чтобы идти к ним себе на погибель. Ведь софисты — это очевидная гибель и порча для тех, кто с ними водится» (Менон. 91с); «Между тем, кто так говорит, они-то и являются величайшими софистами, в совершенстве умеющими перевоспитывать и переделывать людей на свой лад — юношей и стариков, мужчин и женщин» (Государство. 492а); «...искусный чародей, колдун и софист» (Пир. 203d); «Софист оказался у нас обладателем какого-то мнимого знания обо всем, а не истинного» (Софист. 233с).

ошибку в их аргументации[171]. Что же касается апорий Зенона[172], то Платон прекрасно видел всю их сложность и парадоксальность. Неудивительно, что еще молодой Сократ в диалоге «Парменид» восклицает:

> Клянусь Зевсом, определить это мне представляется делом совсем не легким[173].

Но и сам Парменид и уже опытный Зенон признают трудность некоторых вопросов, как мы видим из следующего разговора:

> Тяжкое бремя возлагаешь ты, Сократ, на старика, ответил Парменид... Будем, Сократ, [сказал Зенон] просить самого

---

171 «Ведь в действительности то, о чем зашла теперь речь, не так просто, как, может быть, понадеется кто-то, судя по вопросу, но нуждается в длинном рассуждении» (Софист. 217e); «Видишь, как справедливо говорят, что зверь этот [софист. — *В. З.*] пестр и что, по пословице, его нельзя поймать одной рукой» (Софист. 226a); «Человек этот поистине удивителен, и его весьма затруднительно наблюдать; он и в настоящее время очень ловко и хитро укрылся в трудный для исследования вид» (Софист. 236d); «Вполне справедливо, чужеземец, было вначале сказано о софисте, что род этот неуловим» (Софист. 261a). См. также рассуждения Платона в «Теэтете» (152–155), в частности, о мысли Протагора, «что ничто не существует само по себе как одно» (Теэтет. 153e). После нескольких попыток проникнуть в суть дела Сократ характеризует каверзное положение следующим образом: «Вот эти три допущения и сталкиваются друг с другом в нашей душе, когда мы толкуем об игральных костях или когда говорим, что я в своем возрасте, когда уже не растут ни вверх, ни вниз, в какой-то год то был выше тебя, то вскоре стал ниже, причем от моего роста ничего не убавилось, просто ты вырос. Ведь получается, что я стал позже тем, чем не был раньше, пропустив становление. А поскольку нельзя стать не становясь, то, не потеряв ничего от своего роста, я не смог бы стать меньше. И с тысячью тысяч прочих вещей дело обстоит так же, коль скоро мы примем эти допущения» (155b–c).

172 См.: Diels. Vorsokratiker, Zenon B 1–2. См. также интерпретацию Уоллеса Мэтсона, согласно которой Зенон «не претендовал на доказательство невозможности движения, а скорее демонстрировал, что *оппоненты* Парменида оказываются в глупом положении, когда их логично подводят к отрицанию движения» (Matson. Zeno moves! P. 88).

173 Парменид. 131e.

> Парменида: не так-то просто то, о чем он говорит. Разве ты не видишь, какую задачу задаешь?.. ведь большинство не понимает, что без всестороннего и обстоятельного разыскания и даже заблуждения невозможно уразуметь истину[174].

Диалог «Парменид», прекрасно показывающий проблематичность логического мышления, завершается следующим высказыванием, которое напоминает некую «замысловатую игру»[175]:

> Выскажем же... что существует ли единое или не существует, и оно и иное, как оказывается, по отношению к самим себе и друг к другу безусловно суть и не суть, кажутся и не кажутся[176].

На серьезность зеноновских вопросов и их влияние на Платона указывала и П. Гайденко: «Зенон Элейский впервые логически проанализировал проблему единого и многого, тем самым поставив в центр внимания проблему бесконечности, имеющую огромное значение не только для логики и философии, но и для математики... Проблема обоснования математики теперь оказывалась тесно

---

[174] Парменид. 136d–e.

[175] Там же. 137b.

[176] Там же. 166c. См. также высказывание В. Ф. Асмуса: «По учению, развиваемому в "Пармениде", бытие, поскольку оно рассматривается *само по себе*, едино, вечно, тождественно, неизменно, неподвижно, бездейственно и не подлежит страданию. Напротив, то же самое бытие, поскольку оно рассматривается через свое иное, множественно, возникает, содержит в себе различия, изменчиво, подвижно и подлежит страданию. Поэтому, согласно полному определению своей сущности, бытие одновременно и едино и множественно, и вечно и преходяще, и неизменно и изменчиво, и покоится и не покоится, и движется и не движется, и действует и не действует, и страдает и не страдает. В каждой паре этих определений все вторые определения высказываются как определения иного. Но так как иное есть иное по отношению к бытию, или, другими словами, иное бытия, то все эти определения оказываются определениями также и самого бытия. Итак, бытие как по самой своей природе (онтологически), так и по своему понятию (гносеологически и логически) заключает в себе противоположные определения» (Асмус. Платон. С. 86).

связанной с проблемой обоснования возможности научного знания вообще. Решение обеих и взял на себя Платон»[177].

Но, строго говоря, Платон не смог найти решения — и это не удивительно. Здесь кроются проблемы, которые до сих пор вызывают серьезные дискуссии. Известный философ и логик У. Куайн писал: «В этом и состоит старая платоновская загадка небытия. Небытие должно в каком-то смысле быть. Иначе что это, чего нет? Эту запутанную доктрину можно назвать *бородой Платона*, и она исторически доказала свою жесткость, часто притупляя лезвие бритвы Оккама»[178]. Сам Куайн в своем довольно пространном трактате попытался найти более-менее однозначный выход из этой дилеммы, но интересно, что это оказывается практически невозможно без некоторых компромиссов[179].

---

[177] Гайденко. Обоснование научного знания в философии Платона. С. 100–101.

[178] Куайн. С точки зрения логики. С. 22.

[179] Куайн описывает три возможные позиции: номинализм, концептуализм и платонизм. В принципе сам он склонен к номинализму, но при этом хорошо осознает трудности этой позиции, поэтому он не возражает против «смягченного» номинализма: «Номиналист, или тот, кто сохраняет агностицизм в отношении бесконечности сущностей, все еще может, некоторым обходным путем, приспособиться к математике тех, кто выступает приверженцем бесконечности — концептуалистам или платонистам. Хоть он не может поверить в такую математику, он *может* сформулировать правила ее выполнения. Но ему хотелось бы также показать, что любая служба, которую классическая математика осуществляет для науки, может в теории, хотя и менее просто, равным образом осуществляться посредством действительно номиналистических методов — без помощи бессмысленной математики, чей синтаксис просто описывается номиналистически. И здесь номиналист сокращает для себя работу. Здесь он обнаруживает сильнейшее искушение пойти по более легко проходимому пути концептуалиста, который, приняв соответствующим способом значительный кусок классической математики, нуждается только в том, чтобы показать необязательность теории более высоких бесконечностей и разрядов действительных чисел. Тактически концептуализм, без сомнения, оказывается самой сильной позицией из трех: ибо утомленный номиналист может снизойти до концептуализма и все-таки успокаивать

Рассмотрим, в качестве примера «запутанной» ситуации, знаменитую апорию Ахилла[180], которая опирается на представление, что сумма бесконечного количества слагаемых является всегда бесконечной. Это является очевидным, если слагаемые — либо одинаковые, либо возрастающие величины:

$$1+1+1+1+1+\ldots = \infty$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\ldots = \infty$$

$$1+3+5+7+9+\ldots = \infty$$

Но иногда это справедливо, даже если слагаемые становятся все меньше и меньше:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots = \infty$$

Поэтому можно легко впасть в соблазн, решив, что это работает и в случае парадокса Ахилла, где ряд слагаемых выглядит так:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots = \infty$$

Так как сумма этого ряда бесконечна, Ахилл не может догнать черепаху. Где же здесь ошибка? Сегодняшний математик, считая себя умнее древних греков, уверен, что может легко разрешить этот парадокс — он просто докажет, что

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=1\text{, а не } \infty.$$

свою пуританскую совесть размышлением, что он еще не вполне разделяет участь лотофагов с платонистом» (Там же. С. 186–187).

180 Парадокс Ахилла звучит так: древнегреческий герой Ахилл собирается состязаться в беге с черепахой. Если черепаха стартует немного раньше Ахилла, то ему, чтобы ее догнать, сначала нужно добежать до места ее старта. Но к тому моменту, как он туда доберется, черепаха проползет определенное расстояние, которое нужно будет преодолеть Ахиллу, прежде чем догнать черепаху. Но за это время черепаха уползет вперед еще на некоторое расстояние. А поскольку число таких отрезков бесконечно, быстроногий Ахилл никогда не догонит черепаху!

На одном из интернет-сайтов мы читаем следующее: «Вплоть до XVII века ученые не могли "перехитрить" черепаху, пока Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц не изложили идею дифференциального исчисления. Люди научились обращаться с бесконечно малыми величинами. Время, за которое Ахилл догонит черепаху, представляется в виде суммы бесконечного ряда. Каждое следующее слагаемое — время, за которое бегун доберется до очередного "старта" черепахи, становится все меньше и меньше. Основная "хитрость" заключается в том, что такая сумма дает *конечный результат* — то, что не могли понять древние»[181]. Бедные древние греки! Они не смогли проникнуть в суть дела... Но, может быть, они лучше нас поняли, что за парадоксами лежат настоящие неразрешимые вопросы? И наш современный математик не решил, а просто закрыл, прикрыл, замазал проблему своими формулами? Посмотрим, как выглядит современное доказательство[182] уравнения

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots = 1$$

На первый взгляд убедительно:

Предположим, что

$$(1) \qquad 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots = S$$

(с помощью точек ... изображается бесконечное множество слагаемых). Разделив левую и правую сторону уравнения (1) на 2, мы получаем уравнение (2). Получается система A:

$$A\begin{cases} (1) \qquad 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots = S & \mid :2 \\ (2) \qquad 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots = S/2 & \end{cases}$$

---

[181] URL: http://mathehelp.ru/2011/02/paradox-zenon/

[182] Данное доказательство представлено в упрощенной, наглядной форме. Современная математика рассчитывает сумму подобного бесконечного ряда с помощью последовательности частичных сумм и анализа конвергенции. Но от этого проблема никуда не исчезает, просто она проявляется в другом месте; см. ниже мнения Беркли, Рассела и фон Фрица. Заинтересованный математик найдет детальное изложение в работе: Spalt. Vom Mythos der mathematischen Vernunft. S. 352–370.

Если мы вычтем уравнение (2) из уравнения (1), результатом будет просто уравнение (2), и это нам ничего не даст. Но у современного математика «сверкает» идея: он сдвигает уравнение (2) на один шаг вправо и получает систему B:

$$B\begin{cases} (1) & 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots = S \quad | :2 \\ (2') & \phantom{1/2 +{}} 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots = S/2 \end{cases}$$

Если из уравнения (1) вычесть уравнение (2'), то получается «чудо»: на левой стороне исчезают все дроби, и в результате мы получаем следующее:

$$(1) - (2') \qquad 1/2 + 0 + 0 + 0 + \ldots = S - S/2$$

Отсюда: $1/2 = S/2$, и $S = 1$.

Следовательно: $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots = 1$, а не ∞, что и требовалось доказать.

На первый взгляд все правильно. Однако все не так просто. Правомерен ли сдвиг уравнения (2) на один шаг вправо? Нельзя делать вид, что система B принципиально *не* отличается от системы A. Если бы уравнение (2) осталось на месте, т. е. если бы *не* изменилась система A, мы могли бы увидеть, что предлагаемое вычитание происходит *по диагонали*:

$$A'\begin{cases} (1) & 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots = S \quad | :2 \\ (2) & 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots = S/2 \end{cases}$$

Сейчас мы видим, что представленное доказательство «нечестно». В «ложной» системе B, с помощью которой оно было построено, многоточие в уравнении (1) означает — *на первый взгляд*! — то же самое, что и многоточие в уравнении (2'), поэтому все дроби исчезают. Но это настоящее «замазывание»: на самом деле, как мы видим в правильной системе A', многоточие в уравнении (1) означает ряд, начинающийся со слагаемого 1/32, а многоточие в уравнении (2) означает ряд, начинающийся со слагаемого 1/64. Поэтому разница этих двух бесконечных рядов *всегда* будет *выше* нуля. И вновь перед нами встает парадокс Ахилла, и вновь нам не удается стать умнее древних греков...[183]

В цитате из Интернета, приведенной нами выше, говорится, что Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц с помощью дифференциального исчисления смогли «перехитрить» черепаху и, следовательно, загадка Зенона разгадана. Но это иллюзия. Уже Джордж Беркли подверг методы Ньютона и Лейбница строгой критике, подробно доказав, что их ход мышления «не будет справедливым или убедительным»[184]. Такие выражения, как $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, ... (*fluxions* Ньютона) или *dx*, *ddx*, *dddx*, ... (*differentials* Лейбница), действительно являются ясными и отчетливыми, разум не затрудняется в их восприятии. «Но если мы приподнимем завесу и посмотрим на то, что за ней скрывается, и если, оставив в стороне словесные обороты, мы поставим себе задачу внимательно рассмотреть сами явления, которые, как полагают, должны определяться или обозначаться упомянутыми оборотами, то мы обнаружим огромную

---

183 То, что греки ясно видели суть проблемы, подчеркивает Раик: «Греки обошлись без иррациональных чисел, нашли обходный путь. И понятно почему. На пути построения иррациональных чисел греческие математики встретились с непреодолимым для них препятствием. Понятие несоизмеримости, иррациональности связано с понятием бесконечности и непрерывности. Для того чтобы избрать путь развития математики через расширения понятия числа, надо было прежде всего справиться с противоречиями, которые заключены в понятиях бесконечности и непрерывности. Греки прекрасно понимали эти трудности» (Раик. Очерки по истории математики в древности. С. 158). Иногда до сих пор не до конца решенный парадокс — если мне позволено будет привести здесь «математическую шутку» — может оказаться «полезным»: он может служить «оправданием» при невыполненном домашнем задании: «Я смог подойти к моей тетради на бесконечно малое расстояние, но так и не смог до нее дотянуться» (Федин. Математики тоже шутят. С. 209).

184 Беркли. Аналитик. 13. С. 406. В § 23, например, Беркли покажет, «что итог получается правильным не потому, что отброшенная площадь *dy* была бесконечно мала, а потому, что эта ошибка была компенсирована другой, противоположной по своему характеру, но равной ошибкой» (Там же. С. 413).

пустоту, тьму и путаницу и даже, если я не ошибаюсь, — прямые противоречия и нечто невозможное»[185]. Карл Маркс также говорил о ложности и мистифицированности этих методов дифференциального исчисления, которые достигают своих результатов «с помощью фокуса»[186].

Критическую точку зрения, показывающую, что проблема Зенона до сих пор так и не решена, поддерживал и Бертран Рассел: «В этом капризном мире нет ничего более капризного, чем посмертная слава. Одной из наиболее заметных жертв превратного мнения потомков является элейский философ Зенон. Его, изобретателя четырех неизмеримо тонких и глубоких аргументов, грубая

---

[185] Беркли. Аналитик. 8. С. 402.

[186] «Итак, экспериментальным путем — уже на втором шагу — неизбежно пришли к выводу о необходимости отбросить dx^2, чтобы получить не только правильный, но вообще какой-нибудь результат. Но, с другой стороны, имели перед собой в $2xdx + dx^2$ правильное математическое выражение (вторые и третьи члены) бинома $(x + dx)^2$. Что этот *математически правильный результат основывается на столь же математически ложном в самом основании предположении*, будто бы $x_1 - x = \Delta x$ с самого начала есть не что иное, как $x_1 - x = dx$, — этого не знали. Иначе тот же результат был бы получен и предложен математическому миру не с помощью фокуса, а посредством алгебраической операции простейшего типа. Итак, сами верили в таинственный характер новооткрытого исчисления, которое давало правильные (и притом в геометрическом применении прямо поразительные) результаты математически положительно неправильным путем. Таким образом, сами себя мистифицировали и тем более ценили новое открытие, тем более бесили толпу старых ортодоксальных математиков и вызывали с их стороны враждебные вопли, будившие отклик даже в мире неспециалистов и необходимые для прокладывания пути новому» (Маркс. Математические рукописи. С. 169). Или: «Утешение, за которое крепко держатся некоторые рационализирующие математики, что якобы количественно dy и dx в действительности являются лишь бесконечно малыми, лишь близко к 0/0, есть химера...» (с. 33). Или «Мистическое дифференциальное исчисление $x_l = x + \Delta x$ сразу превращается в $x_l = x + dx$, где dx предпосылается с помощью метафизического разъяснения. Сперва существует, а затем разъясняется» (с. 165). Или же: «Здесь, как и всюду, важно сорвать с науки покров тайны» (с. 193). О «диалектической» интерпретации dx/dy Марксом см.: Там же. С. 289–293.

манера мышления последующих философов провозгласила не более чем искусным жонглером, а все его аргументы — лишь софизмами. После двух тысяч лет непрерывного отвержения эти софизмы были восстановлены в правах и легли в основу математического возрождения...»[187]

Похожую идею высказывает Курт фон Фриц: «Хотя они [аргументы Зенона] часто отбрасывались как логическая бессмыслица, было предпринято множество попыток, чтобы избавиться от них с помощью математических теорем, таких как теория сходящихся рядов или теория множеств. Однако в конечном итоге трудности, вытекающие из его аргументов, всегда возвращались с удвоенной силой, поскольку человеческий разум построен таким образом, что может смотреть на континуум двумя способами, которые не полностью совместимы друг с другом»[188].

Д. Гилберт и П. Бернайс обращают внимание на то, что в парадоксе Ахилла скрыта еще одна сложность: «Обычно этот парадокс пытаются обойти рассуждением о том, что сумма бесконечного числа этих временных интервалов все-таки сходится и таким образом дает конечный промежуток времени. Однако это рассуждение абсолютно не затрагивает один существенно парадоксальный момент, а именно парадокс, заключающийся в том, что некая бесконечная последовательность следующих друг за другом событий, последовательность, завершаемость которой мы не можем себе даже представить (не только физически, но хотя бы в принципе), на самом деле все-таки должна завершиться»[189]. В. Хайч подтверждает

---

187 Russell. The Principles of Mathematics. P. 352. (См. также P. 328–336 и 340–343, где представлены решения Зеноновых парадоксов Расселом).

188 Fritz K. von. Western philosophy — Ancient Greek and Roman Philosophy — Epistemology of Appearance // Encyclopædia Britannica.

189 Гилберт, Бернайс. Основания математики. С. 40. В связи с этим см. также следующую цитату: «Математика — это интеллектуальное приключение, и было бы разочарованием, если бы ее прозрения могли быть оправданы в понятиях или процедурах, которые мы могли бы в полной мере описать. Каково ее отношение к поэзии? Только то, что как математика, так и

это рассуждение с точки зрения марксистско-ленинской философии: математически можно доказать, что заключение Ахилла является ошибочным, «но настоящее логическое затруднение таким образом еще не устранено»[190].

Платон — в отличие от упомянутых Расселом современных философов с их «грубой» манерой мышления — хорошо осознавал серьезность элейских, так же как и софистических проблем. И он четко видел суть зеноновских парадоксов, т. е. фундаментальные различия между сферой дискретных чисел и континуумом, между сферой «покоя» и сферой «движения», и проблему перехода из одной сферы в другую[191]. Здесь скрываются вопросы такого рода:

поэзия представляются отчасти творениями, а отчасти открытием чего-то фундаментального в самих себе и окружающем мире. Элегантность, плодовитость и глубина — это важные качества в обеих дисциплинах, а за ними обеими скрывается неполнота и непостижимая странность» (Holcombe. Truth in mathematics. URL: http://www.textetc.com/theory/truth-in-mathematics.html).

190 Heitsch. Mathematik und Weltanschauung. S. 296. Другой автор марксистско-ленинского направления видит те же проблемы в другом знаменитом парадоксе: «Сложной для философской интерпретации является и апория "покоящаяся стрела", так как основной вывод, который в виде парадокса получается из ее анализа, — "тело и находится в этой точке, и не находится в ней" — вступает как бы в противоречие с формально-логическим законом недопустимости противоречия. Впрочем, как нами уже отмечалось, любой логический парадокс в конце концов не согласуется с упомянутым законом. Потому-то он и является парадоксом, который (в отличие от софизма и паралогизма) не связан с логической ошибкой» (Жуков. Философские основания математики. С. 73). Проблема, очевидно, глубока: невозможно свести непрерывное (изменяемое) к дискретному (устойчивому), как это, кстати, замечал и сам Маркс: «Этот скачок из обыкновенной алгебры, и притом с помощью обыкновенной алгебры, в алгебру переменных принимается за совершившийся факт, он не доказывается и, первым делом, противоречит всем законам обыкновенной алгебры...» (Маркс. Математические рукописи. С. 207).

191 См. Парменид. 156c–d: «А когда оно [единое], находясь в движении, останавливается или из покоя переходит в движение, то, полагаю я, оно не должно пребывать ни в каком времени... Прежде покоясь, а затем двигаясь и прежде двигаясь, затем покоясь, оно не будет в состоянии испытывать это, не подвергаясь изменению... Ведь не существует времени, в течение

как можно представить себе отрезок в виде совокупности точек? Ведь точка имеет «длину», равную 0, и, следовательно, сколько угодно точек никогда не смогут в совокупности составить какой-либо длины — сумма даже бесконечно многих слагаемых, равных 0, будет всегда составлять 0. Так же в вопросе о времени: как можно представить себе настоящее «границей» между прошедшим и будущим? Ведь «граница» не имеет времени. Или — как соотносятся между собой мир чисел и геометрия, если в геометрии сторона и диагональ «точно» предстают перед нами в виде конечных отрезков, а в виде чисел они дают нам бесконечную дробь[192].

которого что-либо могло бы сразу и не двигаться, и не покоиться... Но оно ведь и не изменяется, не подвергаясь изменению... Так когда же оно изменяется? Ведь и не покоясь, и не двигаясь, и не находясь во времени, оно не изменяется... В таком случае не странно ли то, в чем оно будет находиться в тот момент, когда оно изменяется?... "Вдруг", ибо это "вдруг", видимо, означает нечто такое, начиная с чего происходит изменение в ту или другую сторону». Любопытно привести здесь похожие размышления Ф. Энгельса: «Пока мы рассматриваем вещи как покоящиеся и безжизненные, каждую в отдельности, одну рядом с другой и одну вслед за другой, мы действительно не наталкиваемся ни на какие противоречия в них. Мы находим здесь определенные свойства, которые частью общи, частью различны или даже противоречат друг другу, но в этом последнем случае они распределены между различными вещами и, следовательно, не содержат в себе никакого противоречия. В пределах такого рода рассмотрения вещей мы и обходимся обычным, метафизическим способом мышления. Но совсем иначе обстоит дело, когда мы начинаем рассматривать вещи в их движении, в их изменении, в их жизни, в их взаимном воздействии друг на друга. Здесь мы сразу наталкиваемся на противоречия. Движение само есть противоречие; уже простое механическое перемещение может осуществиться лишь в силу того, что тело в один и тот же момент времени находится в данном месте и одновременно — в другом, что оно находится в одном и том же месте и не находится в нем. А постоянное возникновение и одновременное разрешение этого противоречия — и есть именно движение» (Энгельс. Анти-Дюринг. С. 123).

192 См. подробные рассуждения в книге: Jonath. Quantik. В принципе, современные размышления не очень отличаются от рассуждений древних — это детально видно из работы: Sorabji. Atoms and Time Atoms. P. 37–86; см.

Видя подобные проблемы, Платон искал своего рода предохранитель, дабы «избежать ситуаций, когда считались бы доказанными самые странные вещи»[193]. А где можно найти его, если не в математике? Благодаря общению со своими друзьями математиками Платон мог видеть, как смутные догадки и мнения превращаются в стройные теории и законы, или, выражаясь другими словами, как «движущаяся волна жизни» сгущается в «кристаллический шар»[194] ясных и вечно неизменных идей.

Правда, как мы видели выше, человеческое мышление — не простая вещь, и даже математики сталкиваются с неразрешимыми проблемами[195]. Тем не менее математическая форма мышления с ее тщательным использованием дефиниций, дедукций и доказательств служит необходимым образцом для философов — это реальная форма мудрости, которая «необходимо заставляет правильно действовать и преуспевать»[196].

также рассуждения Секста Эмпирика (Против ученых. III–IV). Кажется, что дискретное и континуум — это несовместимые, но взаимодополняющие («комплементарные») аспекты (как корпускулярная и волновая природа света в физике).

193 Froese N. Pythagoras & Co. — Griechische Mathematik vor Euklid. S. 29.

194 Tumarkin. Die Methoden der psychologischen Forschung. S. 22. Тумаркин пишет: «Возникает вопрос, являлось бы с самого начала математическое мышление столь привлекательным для человека, не будь он наполнен осознанием зыбкости окружающей действительности и скован ощущением убегающей жизни, которые находили своего рода противовес в неподвижности математической формы. Возникшая из стремления древнего Востока к вечности, возрожденная из духа мистики в начале Нового времени, математика оказывается и для нас неопреодолимо привлекательной, поскольку дает надежду, что благодаря ей "движущаяся волна жизни" может сгуститься в "кристаллический шар"».

195 Вопрос, до какой степени математика может служить таким «предохранителем», т. е. гарантом безупречности мышления, и, в частности, до какой степени математический *язык* может служить образцом для философии, мы обсудим в параграфе 4.4. См. также параграф 4.7, где излагаются более подробно недостатки и преимущества математики.

196 Евтидем. 280а.

2.10. Дефиниции

Дефиниция, определение — это процедура придания строго фиксированного смысла терминам языка. По мнению некоторых исследователей, Платон сыграл значительную роль в истории дефиниций с точки зрениях их правильного понимания и использования[197]. Суть сократического метода, широко используемого Платоном в диалогах, состоит в том, чтобы ставить под вопрос используемые понятия до тех пор, пока не выявится их подлинное значение:

> Ведь пока мы с тобою относительно него [софиста. — *В. З.*] согласны в одном только имени, а то, что мы называем этим именем, быть может, каждый из нас про себя понимает посвоему, меж тем как всегда и во всем дóлжно скорее с помощью объяснения соглашаться относительно самой вещи, чем соглашаться об одном только имени без объяснения[198].

Например, когда платоновский Сократ начинает рассматривать «человека при тираническом строе»[199], он сначала выясняет смысл такого важнейшего понятия, как «вожделение»:

> По-моему, мы недостаточно разобрали вожделения — в чем они состоят и сколько их. А раз этого не хватает, не будет полной ясности и в том исследовании, которое мы предпринимаем[200].

---

197 «Я считаю, что действительно в значительной степени именно благодаря влиянию Платона дефиниции играют в античной математике более важную роль, чем в современной» (Fritz. Platon, Theaetet und die antike Mathematik. S. 40). Согласно Диогену, Платон первым «употребил в философии такие понятия, как "противостояние", "основа", "диалектика", "качество", "продолговатое число", "открытая плоскость граней"» (DL. III, 24).

198 Софист. 218b–c.

199 Государство. 571a.

200 Там же.

А. В. Родин описывает сущность сократического метода таким образом: «У платоновского Сократа есть один универсальный вопрос, с которого он начинает всякое теоретическое исследование: "Что есть то, о чем идет речь?" (τί ἐστι). Ответ на такой вопрос называется определением (ὅρος)»[201]. Так и Сократ спрашивает Теэтета: «Кто-то может понять имя чего-то, не зная, *что это такое*?»[202]

Особенность позиции Платона становится более ясной при сравнении с номиналистическим подходом к дефиниции. Например, номиналист У. Куайн пишет: «Определения... должны рассматриваться как сторонние соглашения, сокращающие запись. Вводимые ими новые обозначения должны рассматриваться как внешние по отношению к нашему базовому языку; единственное, так сказать, неофициальное оправдание нашего введения таких обозначений — это гарантия их однозначной устранимости в пользу базовой записи... цель определения, вероятно, состоит в сокращении записи...»[203] Другими словами, дефиниция как техническая аббревиатура никоим образом не отвечает на вопрос: «Что есть эта вещь?» Но для Платона все как раз наоборот: процесс определения должен именно раскрывать нам «суть вещи». Дефиниция в платоновском понимании действительно отвечает на вопрос: «Что есть эта вещь?», и ответ предполагается «определенным, т. е. единственным. Множественность полученных не увязанных между собой ответов свидетельствует о том, что вопрос остался без удовлетворительного ответа»[204].

---

201 Родин. Математика Евклида в свете философии Платона и Аристотеля. С. 21. Далее Родин пишет: «У платоновского Сократа вопрос "τί ἐστι" ("что это есть?"), ответом на который является родо-видовое определение, играет роль теоретического запроса, т. е. является вопросом, который переводит речь в теоретическую сферу, предваряет теорию как таковую» (Там же. С. 25).

202 Теэтет. 147b.

203 Куайн. С точки зрения логики. С. 126.

204 Родин. Математика Евклида в свете философии Платона и Аристотеля. С. 28.

Например, в одном из диалогов Сократ спрашивает: «Что есть знание?» Ответы, даваемые собеседниками, не удовлетворяют его, так как они являются только примерами, а не дефинициями, поэтому Сократ замечает:

> Стало быть, смешно в ответ на вопрос, что есть знание, называть имя какого-то искусства. Ведь вопрос состоял не в том, о чем бывает знание... Кроме того, там, где можно ответить просто и коротко, проделывается бесконечный путь. Например, на вопрос о глине можно просто и прямо сказать, что глина — увлажненная водой земля, а уж у кого в руках находится глина — это оставить в покое[205].

В этот момент происходит интересное событие: собеседник Теэтет приходит Сократу на помощь. Он хорошо понял суть дефиниций: надо подходящим способом соединить какие-то «вещи» — возможно, очень большое или даже бесконечное количество феноменов — и подвести их под единое название, при этом «коротко и просто». Да, есть простые примеры определений: «Глина — это увлажненная водой земля». Но в философских обсуждениях задачи зачастую сложнее. Так, Теэтет вспоминает о вспомогательном примере из математики: Феодор доказал иррациональность $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., до $\sqrt{17}$, и потом они использовали дефиниции, чтобы осуществлять распределение (классификацию) бесконечного количества разных отрезков[206], иррациональных и рациональных. По словам Теэтета, ситуация была такова:

> Феодор объяснял нам на чертежах нечто о сторонах квадрата [площадь которого выражена продолговатым числом], налагая их на трехфутовый и пятифутовый [отрезки] соответственно и доказывая, что по длине они несоизмеримы с однофутовым [отрезком]; и так перебирая [эти отрезки] один

---

[205] Теэтет. 147b–c.

[206] «По вопросу о несоизмеримости или иррациональности мы имеем прежде всего отрывок из "Теэтета", где Феодор доказывает несоизмеримость $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... $\sqrt{17}$, после чего Теэтет создает общую теорию подобных "корней"» (Heath. A History of Greek Mathematics. Vol. 1. P. 304).

> за другим, он дошел до семнадцатифутового. Тут его что-то остановило. Поскольку такого рода отрезков оказалось бесчисленное множество, нам пришло в голову попытаться найти какое-то их единое [свойство], с помощью которого мы могли бы охарактеризовать их все. — *Сократ:* Ну, и нашли вы что-нибудь подобное? — *Теэтет:* Мне кажется, нашли. Взгляни же и ты[207].

А как же Феодор и Теэтет решили эту задачу?

> Весь [ряд] чисел разделили мы надвое: одни числа можно получить, взяв какое-то число равное ему число раз. Уподобив это равностороннему четырехугольнику, мы назвали такие числа равносторонними и четырехугольными[208].

Эти «равносторонние и четырехугольные числа» (мы называем их «числа второй степени») соответствуют дефиниции *Д*$_1$*: числа, которые могут возникнуть из возведения в квадрат одного натурального числа*. Их ряд начинается с чисел

1, 4, 9, 25, 36 и т. д.

Другие числа Феодор и Теэтет определили таким образом: эти числа

> стоят между первыми, например три, пять и всякое другое число, которое нельзя получить таким способом, а лишь взяв большее число меньшее число раз или взяв меньшее число большее число раз. Эти другие числа мы назвали продолговатыми, представив большее и меньшее число как стороны продолговатого четырехугольника[209].

Они соответствуют определению *Д*$_2$: числа, которые не могут возникнуть из возведения в квадрат одного натурального числа, и, согласно дефиниции, являются всеми остальными числами:

---

207 Теэтет. 147с–е.

208 Там же. 147е.

209 Теэтет. 148а.

2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17 и т. д.

Дальше они дали определение двух типов отрезков:

> Всякий отрезок, который при построении на нем квадрата дает площадь, выраженную равносторонним числом, мы назвали длиной, а всякий отрезок, который дает разностороннее продолговатое число, мы назвали [несоизмеримой с единицей] стороной квадрата, потому что такие отрезки соизмеримы первым не по длине, а лишь по площадям, которые они образуют. То же и для объемных тел[210].

То есть «длина» — это отрезки длиной 1, 2, 3, 4, 5, ... Площади квадратов, построенных на таких отрезках, выражаются «равносторонними числами» (1, 4, 9, 16, 25 и далее). А «сторона» — это отрезки, которые дают квадраты с площадью 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 и т. д. Они представляют собой корни $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$ и пр., т. е. иррациональные числа (как мы называем их сегодня); с единицей соизмеримы эти площади, но не сами отрезки.

По рассказу Платона, Феодор доказывал иррациональность этих корней вплоть до $\sqrt{17}$. Мы не знаем, каким образом он делал это и почему остановился именно на $\sqrt{17}$[211]. Но интересно, что Платон

---

210 Там же.

211 Ван дер Варден излагает возможные решения и показывает вероятную причину того, почему Феодор остановился на $\sqrt{17}$. См.: Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 197–202. См. также: Burnyeat. The Philosophical Sense of Theaetetus' Mathematics. P. 502–505; там есть и возможные причины того, почему Теодор начал с $\sqrt{3}$, а не с $\sqrt{2}$. Способ доказательства Феодора и то, почему он остановился на $\sqrt{17}$, объясняется, по мнению Ж. Итара, тем, что все это доказательство может быть совершено при помощи одного только учения о четных и нечетных числах и что первое число, для которого этот способ не пригоден, как раз и есть 17. Рассуждение следующее. Используя современные термины, мы скажем: если разность двух целых чисел $a - b$ делится на целое число m без остатка, то мы говорим, что они «сравнимы по модулю m», и пишем $a \equiv b \pmod{m}$. Значит, если $a = b$, то $a - b$ делится по любому модулю. Теперь допустим, что у нас имеется рациональное число p/q так, что его квадрат делится без остатка, т. е. $p^2/q^2 = N$. Тогда мы имеем равенство $p^2 = Nq^2$ или $p^2 - Nq^2 = 0$. Значит,

был в курсе даже таких деталей. С точки зрения математики интересно также, что Теэтет «сумел общим образом охарактеризовать первый бесконечный класс иррациональностей, а именно таких, которые мы теперь обозначаем $\sqrt{N}$, где N — целое число, не являющееся полным квадратом. Ему принадлежит, по-видимому, следующая замечательная теорема: если площадь квадрата выражается целым неквадратным числом, то его сторона несоизмерима со стороной единичного квадрата»[212].

Итак, с помощью ясных, определенных дефиниций Феодор и Теэтет смогли поделить бесконечное множество *М* (множество чисел) на две группы *А* и *Б* так, что каждый элемент бесконечного множества *М* принадлежит к одной и только одной группе — *А* или *Б*, и при этом каждый элемент групп *А* и *Б* принадлежит к *М*. Это означает, что с помощью дефиниций в математике возможно соединять бесконечное количество элементов, хотя бы теоретически.

Интересно также стремление Платона точнее определить то, что мы называем «плоскостью»[213]. В «Меноне» (74–76) он избегает уже принятого в то время, но не ясно определенного понятия ἐπιφάνεια. Платон определяет три четких понятия, с помощью которых возможно однозначно обозначить различные проявлении плоскости:

сравнение $p^2 \equiv Nq^2$ будет сравнимо по любому модулю. Если же это сравнение не разрешимо по какому-либо модулю, то отсюда следует невозможность равенства $p^2 = Nq^2$. Для $N = 2$ получается знакомое доказательство из Евклида (X книга), а Феодор мог без труда показать, что при $N = 3, 5\ldots\ 15$ сравнение $p^2 \equiv Nq^2$ не разрешимо по одному из модулей 2^k. Однако при $N = 17$ этот метод оказывается недостаточным, так как сравнение $p^2 \equiv 17q^2 \pmod{2^k}$ разрешимо *при любом* k, и никакого заключения относительно возможности равенства $p^2 = 17q^2$ сделать нельзя (это рассуждение взято у Башмакова: История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т. 1. С. 74.) Как бы то ни было, Платон, хотя он не дает объяснений, говорит о каком-то математическом факте.

212 Башмаков. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т. 1. С. 75.

213 Мы используем здесь исследования и диаграммы Гайзера (Gaiser. Platons Menon und die Akademie. S. 248).

	ἐπίπεδον	=	чисто двумерное измерение
ἐπιφάνεια (плоскость)	σχῆμα	=	форма поверхности (какого-то тела)
	χρῶμα	=	внешная видная сторона (какого-то тела)

Но по-прежнему остается неясным, работают ли дефиниции в философии? В этом Теэтет не уверен: после демонстрации математического примера он говорит, что не смог бы ответить на вопрос Сократа о знании «так же, как о стороне и диагонали квадрата, хотя мне и кажется, что ты ищешь нечто подобное»[214]. Видимо, Платон чувствовал, что дефиниции в математике и в философии — разные вещи. Это подтверждает и Рассел: «Необходимо понимать, что определение в математике не означает, как в философии, анализ идеи, понимаемой в качестве совокупности составляющих ее идей. Такой взгляд на вещи в любом случае применим только к концепциям, в то время как в математике возможно давать определение терминам, которые концепциями не являются. Таким образом, многие понятия также определены путем символической логики и им нельзя дать философское определение, так как они просты и не поддаются анализу. Математическое определение состоит в указании на некое зафиксированное отношение к некоему уже установленному термину, и только один другой термин будет состоять в этом отношении к данному термину: затем этот другой термин будет определен через уже установленное отношение и установленное понятие. Момент, в котором это отличается от философского определения, выявляется замечанием, что математическое определение не объясняет термин, о котором идет речь, и что только то, что можно назвать философским прозрением, открывает нам, каков именно термин среди всех существующих. Это связано с тем, что термин

[214] Теэтет. 148b.

определяется через понятие, которое обозначает его однозначно, а не через фактическое упоминание указанного термина»[215].

Но, как бы то ни было, в диалогах Платона ясно видно его стремление найти такие дефиниции, с которыми все собеседники смогут согласиться. При этом математические дефиниции служат образцами:

> Итак, вперед! Ведь только что ты прекрасно повел нас. Попытайся же и множество знаний выразить в одном определении, подобно тому как, отвечая на вопрос о [несоизмеримых с единицей] сторонах квадрата, ты все их многообразие свел к одному общему виду[216].

Образец того, как Платон с помощью дефиниций упорядочивает понятия, мы находим в следующем «упражнении» для студентов из диалога «Политик»:

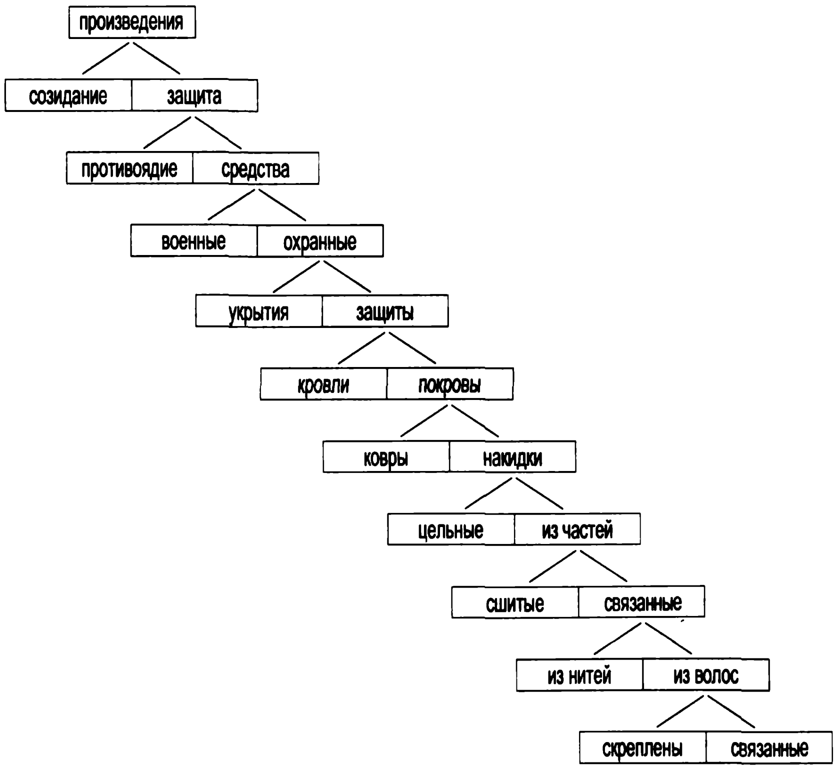
> Все, что мы производим и приобретаем, служит нам либо для созидания чего-либо, либо для защиты от страданий. А из того, что защищает нас от страданий, одни вещи служат противоядиями — божественными и человеческими, другие — средствами защиты. Из последних же одни — это военное оружие, другие — охранные средства; а из охранных средств одни — это укрытия, другие же — средства защиты от холода и жары. Из этих средств одни — это кровли домов, другие — различные покровы. Из покровов одни — это ковры, другие — накидки. Из накидок же одни — цельные,

[215] Russell. The Principles of Mathematics. P. 27. Ср. также: «Слово "определимость" имеет точный смысл в области математики, хотя этот смысл соотносится с некоторым заданным набором понятий. В каждой системе понятий какой-либо термин может определяться с помощью этих понятий тогда и только тогда, когда он является единственным термином, имеющим к некоторым из этих понятий определенное отношение, которое само по себе является одним из указанных понятий. Но с философской точки зрения слово "определение" не использовалось, как правило, в этом смысле, и было, по сути, сведено к анализу идеи в ее составляющих. Такое применение неудобно и, я думаю, бесполезно...» (Ibid. P. 111–112).

[216] Теэтет. 148d.

другие состоят из частей. Из этих последних одни — сшитые, другие же связаны и держатся без швов. А из этих несшитых накидок одни делаются из растительных нитей, другие же — из волос. Те, что сделаны из волос, одни скреплены водой и землей, другие же связаны между собой. Так не защитным ли средствам и покровам, созданным путем такого взаимного переплетения, дали мы имя одежды?[217]

Представим цепь отдельных понятий, необходимых для определения понятия «одежда», в виде схемы:



[217] Политик. 279c–280a.

Найти подходящую «цепь», подходящий «путь», на котором мы получим точную дефиницию[218], это, конечно же, особая непростая задача. «Каким образом, — спрашивает Чужеземец в диалоге «Политик», — отыскать путь политика? А ведь нужно его отыскать и, отделив его от других путей, отметить знаком единого вида; все другие ответвляющиеся тропки надо обозначить как другой единый вид, с тем чтобы душа наша мыслила знания в качестве двух видов»[219]. На этом пути необходимо дойти до самого конца:

---

[218] Здесь нужно отметить, что существуют различные мнения о том, что такое дефиниция и какую роль дефиниции играют в научном дискурсе. Например, Карл Поппер считал, что не имеет смысла сначала определять употребляемые в дискурсе понятия. «Надо всегда придерживаться утверждений, теорий и их истинности. Никогда не надо ввязываться в обсуждение словесных вопросов или вопросов о значении, и никогда не надо интересоваться словами... Надо всегда держаться в стороне от обсуждения понятий» (Поппер. Объективное знание. С. 293–294). Сам Платон, вероятно, согласился бы с Поппером. В «Законах» он пишет: «Ни мне, ни вам не подобало бы гоняться за словами... Ведь не ради благообразия или безобразия слов ведем мы это рассуждение сообразно с пониманием большинства людей, но рассуждаем о том, что́ в законах правильно по природе и что́ ошибочно» (Законы. 627c). Но даже в том случае, если мы ограничиваем роль языка и используемых терминов, мы все равно высоко оцениваем стремление Платона установить ясный фундамент для плодотворной дискуссии.

[219] Политик. 258c. См. также: 262a–b — «*Чужеземец:* Ты весьма смело и с великим усердием произвел разделение. Но по возможности давай избежим этого в другой раз. — *Сократ-мл.:* Чего именно? — *Чужеземец:* Не следует одну маленькую частичку отделять от многих больших, да притом еще без сведения к виду: часть должна вместе с тем быть и видом. Прекрасно, если можно искомое тотчас же отделить от всего остального, коль скоро это сделано правильно, — подобно тому как сейчас, подумав, что здесь необходимо деление, ты подстегнул рассуждение, усмотрев, что оно клонится к людям. Но, милый, дело здесь не в изящных игрушках: это небезопасно, гораздо безопаснее серединный разрез, он скорее приводит к идеям. Это-то и есть главное в исследованиях». При этом Платон советует искать определение не только тщательно, но и «медленно»: «*Чужеземец:* Стало быть, не будем делить их, как тогда, принимая во внимание всех сразу, и не будем спешить немедленно перейти к государственному

> *Чужеземец:* Но, Сократ, так ли хорошо мы все это выполнили, как следует из твоих слов? — *Сократ-мл.:* Что ты имеешь в виду? — *Чужеземец:* Полностью ли, достаточно ли осветили мы наш предмет? Или нашему исследованию как раз более всего не хватает завершенного объяснения, хотя какое-то объяснение мы и дали?[220]

Но усилия того стоят: ведь на этом пути Платон надеется точно определить рассматриваемые понятия, как в математике[221], так и в философии.

Правда, не все могут понять, в чем смысл этих усилий. Афиней передает нам отрывок из комедии Эпикрата, где иронически описан урок, на котором студенты под руководством Платона ищут подходящие дефиниции:

> — Скажи, что Платон, что Спевсипп, Менедем
> Мудрейшие? С кем рассуждают,
> Какая идея волнует умы,
> И что за предмет изучают они?
> Коль толком узнал, ради Геи-земли,
> Что видел, что слышал, — мне правду скажи.
> — Я все расскажу, ничего не забыл,
> В гимнасиях при Академии был

искусству. Ведь мы теперь испытываем состояние в точности по пословице... — *Сократ-мл.:* Какое состояние? — *Чужеземец:* Поспешив с делением домашних животных, мы завершили деление медленнее» (Политик. 264a–b).

[220] Там же. 267c.

[221] О том, что Платон, вероятно, занимался поиском определений и в математике, говорит Хит: «Существует основание полагать, хотя это и не было сказано специально, что определение линии как "не дающей передышки длины" возникло в школе Платона, и сам Платон дает определение прямой линии как "таковой, у которой середина покрывает концы" [Arist. De sensu. 439a31] (это так для взгляда с любого конца, скользящего вдоль прямой линии); это представляется мне началом Евклидового определения...» (Heath. A History of Greek Mathematics. Vol. 1. P. 293).

Недавно на Панафинеях.
Я видел там выводок целый юнцов,
Лихих, небывалых наслушался слов:
Занявшись разбором природы,
На роды делили повадки зверей,
Породы деревьев, сорта овощей.
Затем по порядку до тыквы дошли,
Про вид ее, род ее споры вели.
— Скорей скажи, какого рода, племени
Растенье это? Если знаешь, вымолви.
— Сперва словно скрючило всех молодцов,
Едва приступили; наморщили лбы
И долго в раздумьи молчали.
Внезапно, пока еще всех остальных
В дугу размышление гнуло,
Воскликнул один: «Это выпуклый плод!»
«Трава!» — другой, «Дерево!» — третий.
Подобное слыша, случившийся врач
(Он был из земли сицилийской)
Кишкою издал непристойнейший звук
В издевку над бредом новейших наук.
— И, конечно, разгневались страшно они,
закричали, какой он невежа?
Чтобы дерзко на диспуте так поступать,
надо быть, несомненно, нахалом.
— О нет, не смутились парнишки ничуть.
Платон там присутствовал, благостен был,
Он бровью не дрогнул и вновь напустил
Мальчишек разделывать тыкву.
И снова все скрючились[222].

222 Афиней. Пир мудрецов. II, 54c–f. Цит. по: Афиней. Пир мудрецов в пятнадцати книгах. Книги I–VIII. С. 85.

Неизвестный художник. XIX в.
Диоген приносит Платону ощипанного петуха[223]

Но любопытно, что Эпикрат характеризует Платона правильно: как наставника, который поощряет студентов: ведь не всегда легко найти подходящее определение. Такие подготовительные уроки, такие упражнения — это не игра, не развлечение, а важный шаг на пути к истине[224]. Так говорит и Сократ:

---

223 «Когда Платон дал определение, имевшее большой успех: "Человек есть животное о двух ногах, лишенное перьев", Диоген ощипал петуха и принес к нему в школу, объявив: "Вот платоновский человек!" После этого к определению было добавлено: "И с широкими ногтями"» (DL. VI, 40).

224 Федр. 249b: «Тут человеческая душа может получить и жизнь животного, а из того животного, что было когда-то человеком, душа может снова вселиться в человека; но душа, никогда не видавшая истины, не примет такого образа, ведь человек должен постигать [ее] в соответствии с идеей, исходящей от многих чувственных восприятий, но сводимой рассудком воедино».

> Я и сам поклонник такого различения и обобщения — это помогает мне рассуждать и мыслить. И если я замечаю в другом природную способность охватывать взглядом единое и множественное, я гоняюсь следом за ним по пятам, как за богом. Правильно ли или нет я обращаюсь к тем, кто это может делать, знает бог, а называю я их и посейчас диалектиками[225].

Истину надо «познать относительно любой вещи», и это означает также «суметь определить все соответственно с этой истиной, а дав определение, знать, как дальше подразделить это на виды, вплоть до того, что не поддается делению»[226].

2.11. Дедукция и доказательство

В сравнении с египетскими и вавилонскими математиками греки показали себя не только более творческими, но и более критическими и уверенными в силе разума мыслителями. Всякое предположение или утверждение должно быть доказано — это требование греков свидетельствует о том, что математические знания воспринимались ими не с точки зрения практики и не догматически, а в процессе рационального размышления[227]. Следовательно, в математике нет места демократии:

> Я думаю, что судить надо на основе знания, а не принимать решение по важному вопросу большинством голосов[228].

---

[225] Федр. 266b.

[226] Там же. 277b.

[227] Конечно, это мышление «рационально» не в полном объеме и не в виде современного логико-аксиоматического доказательства. Мордухай-Болтовской говорит о «полуинтуитивном характере» античных геометрических доказательств, который «выявляется в античном разделении доказательства: в этом расчленении только *один* член относится к *логической* операции, все другие относятся к *словесной форме* или к *чертежу*» (Мордухай-Болтовской. Комментарии к книге I «Начал». С. 255).

[228] Лахет. 184e.

Утверждение, что все мнения одинаково оправданы, недопустимо — Платон с сарказмом говорит, что подобного мнения следовало бы ожидать скорее от головастика, чем от разумного человека:

> *Сократ:* Знаешь ли, Феодор, чему дивлюсь я в твоем друге Протагоре? — *Феодор:* Чему? — *Сократ:* Те его слова, что каким каждому что-то представляется, таково оно и есть, мне очень нравятся. А вот началу этого изречения я удивляюсь: почему бы ему не сказать в начале своей «Истины», что мера всех вещей — свинья, или кинокефал, или что-нибудь еще более нелепое среди того, что имеет ощущения, чтобы тем пышнее и высокомернее было начало речи, доказывающей, что мы-то ему чуть ли не как богу дивимся за его мудрость, а он по разуму своему ничуть не выше головастика, не то что кого-либо из людей. Ты не согласен, Феодор? Ведь если для каждого истинно то, что он представляет себе на основании своего ощущения, если ни один человек не может лучше судить о состоянии другого, чем он сам, а другой не властен рассматривать, правильны или ложны мнения первого, но — что мы уже повторяли не один раз — если каждый будет иметь мнение только сам о себе и всякое такое мнение будет правильным и истинным, то с какой же стати, друг мой, Протагор оказывается таким мудрецом, что даже считает себя вправе учить других за большую плату, мы же оказываемся невеждами, которым следует у него учиться, — если каждый из нас есть мера своей мудрости? Как тут не сказать, что этими словами Протагор заискивает перед народом. Я не говорю уже о себе и своем повивальном искусстве — на нашу долю пришлось достаточно насмешек, — но я имею в виду вообще всякие занятия диалектикой. Дело в том, что рассматривать и пытаться взаимно опровергать наши впечатления и мнения — все это пустой и громкий вздор, коль скоро каждое из них — правильное и если истинна «Истина» Протагора, а не скрывает в своей глубинной сути некоей насмешки[229].

[229] Теэтет. 161b–162a.

В противоположность этому «пустому и громкому вздору», Платон требует тщательных и неопровержимых выводов и доказательств везде, где это возможно. В этом он не был первым. Во времена Платона греческая математика была уже довольно изощренной не только в своем содержании, но и в отношении строгих требований к приводимым доказательствам. О математиках-пифагорейцах Ван дер Варден пишет, что они «обычно доказывали свои теоретико-числовые предложения очень подробно, переходя постепенно от одной ступени к другой. Это можно видеть из подробного доказательства, которое Архит дает для предложения А[230], в котором тщательно разработан каждый самый тривиальный силлогизм; это можно также видеть и из пифагорейской теории четного и нечетного, где детально доказываются самые очевидные вещи, вроде того, что любое количество четных чисел дает в сумме четное число (IX, 21), а также и в разобранном ранее доказательстве иррациональности диагонали квадрата, в котором, например, заключение "если m^2 четное, то будет четным и m" правильно получается доказательством от противного; наконец, это можно видеть из тщательно разработанных доказательств самой книги VII»[231]. Теэтет, от которого Евклид воспринял большую часть положений, содержавшихся в «Началах»[232], особенно отличался точностью своих доказательств, в которых каждый, даже самый маленький шаг полностью обосновывался, перед тем как перейти к следующему[233].

---

230 В принадлежащей Архиту теории музыки главную роль играют два следующих теоретико-числовых предложения. Предложение А: «Между двумя числами, находящимися в эпиморном отношении, нельзя вставить никакого среднего пропорционального числа». Предложение В: «Если отношение чисел, будучи сложено с самим собой, дает кратное отношение, то оно является кратным».

231 Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 160.

232 Этот интересный факт доказан в книге: Van der Waerden. Die vier Wissenschaften der Pythagoräer. S. 9–10.

233 См., напр., доказательство: Евклид. Начала. IX, 21. Заметим здесь, что само понятие «доказательство» до какой-то степени спорно. Какие требования должны быть удовлетворены, чтобы мы могли быть совершенно уверены,

Платон, вследствие своих занятий математикой, усвоил эти два пункта — самостоятельность мышления и точность в доказательствах, — перенеся их на диалектический процесс в философии[234]. Ничто не должно быть принято на веру, и ничто не должно объявляться *ex cathedra*[235]. Так же резко осуждается Платоном

что представленное размышление или цепь аргументов являются несомненным «доказательством»? Об этом мы будем говорить ниже, а здесь приведем одну цитату, которая покажет, что даже в математике не всегда все сразу ясно и верно. Знаменитый математик Якоби однажды написал Гумбольдту: «Если Гаусс говорит, что он доказал нечто, мне представляется это очень вероятным; если так скажет Коши, то это примерно столь же вероятно, как и нет, а если так говорит Дирихле, то это бесспорно». Цит. по: Gray. Plato's Ghost. P. 268.

234 Ван дер Варден подчеркивает: «Математические доказательства были образцами как для диалектики Платона, так и для логики Аристотеля» (Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 12). При этом Платон также в чем-то следовал за софистами, несмотря на его столкновения и споры с ними, касающиеся их субъективизма и релятивизма. Дело в том, что многие из софистов играли положительно-критическую, просветительскую роль, как это подчеркивала П. Гайденко: «Критика софистов положила конец непосредственному знанию: она требовала рефлексии, опосредствования, проверки всякого утверждения, требовала выносить на суд всякое непосредственное наблюдение, бессознательно приобретенное убеждение или дорефлективно сложившееся мнение. Софистика истребляла все непосредственное, воевала против всего того, что жило в сознании людей без удостоверения его законности. Отныне право на жительство имело только такое содержание, которое было допущено в сознание самим этим сознанием; все же, что проникло в него не этим законным путем, а через какие-то неконтролируемые сознанием каналы, т. е. то, что было усвоено бессознательно, должно быть исторгнуто как недостоверное, неистинное, а потом, может быть, частично и впущено назад — после проверки. В этом состоял радикальный рационализм софистики, который роднит ее с новоевропейским Просвещением» (Гайденко. История греческой философии в ее связи с наукой. С. 96).

235 Как сказал знаменитый математик Цермело, «в математике нет безошибочных авторитетов» (Zermelo. Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. S. 112.) Ср. также высказывание Гоббса: «Призывая других на помощь или как свидетелей, вы поступаете не как геометр; ибо они не доказывают свои выводы свидетельскими показаниями, но полагаются на

любая попытка затемнить истину с помощью хитроумных аргументов[236]. Рассуждение должно протекать убедительно, постепенно, с проверкой[237]. Платоновский Сократ строго реагирует на каждое

силу своего разума; и когда ваши свидетели появятся, они не пойдут вашим путем» (The English Works of Thomas Hobbes. Vol. VII. P. 213). Сам Платон старался соответствовать этому требованию: «Платон не провозглашал ортодоксальные интерпретации *ex cathedra*, не налагая таким образом никаких ограничений на свободу» (Cherniss. The Riddle of the Early Academy. P. 85).

236 Многочисленные примеры острых высказываний Платона в адрес софистов приведены в диалоге «Софист», а также в других местах. Например, в «Федре» центром рассуждения, вопреки многочисленным толкованиям, выступает не вопрос о любви — эта тема служит, несмотря на ряд ценных высказываний, лишь примером, — а вопрос о возможности истинного, бесспорного познания в противоположность дезориентирующим аргументам софистов.

237 Конечно, Платон хорошо отдавал себе отчет в разнице между настоящим доказательством и более-менее убедительным рассказом. Его обстоятельное описание строения Земли, например, Сократ считает предпочтительным, разумным и убедительным, но все же не настоящим доказательством, и завершает это описание словами: «Правда, человеку здравомыслящему не годится утверждать с упорством, будто все обстоит именно так, как я рассказал» (Федон. 114d). Однако проблему можно заострить и далее: способен ли человеческий дух вообще приводить абсолютные доказательства? Несомненно, говорит Платон, мы можем далеко проникнуть своим разумом, так как «Бог изобрел и даровал нам зрение, чтобы мы, наблюдая круговращения ума в небе, извлекли пользу для круговращения нашего мышления, которое сродни тем, небесным, *хотя в отличие от их невозмутимости оно подвержено возмущению*» (Тимей. 47b). По этой причине хорошо было бы полагаться не только на разум; «Итак, приступая к речам, еще раз обратимся с молитвой к богу-спасителю, дабы он указал нам счастливый путь от странного и необычного повествования к правдоподобному выводу» (Тимей. 48d). Именно здесь поднимается основной вопрос. Швейцарский математик Пауль Финслер, получивший известность благодаря «Финслерову пространству» и «Финслеровой геометрии», утверждал, как мы уже говорили, что наш дух (или разум) способен познать несомненную истину, если в ходе исследования не были совершены логические ошибки; другие, к примеру его коллега И. И. Буркхардт, не были так оптимистичны. Так, Мордухай-Болтовской утверждал, что «математические ошибки суть не

доказательство, которое не соответствует этим суровым требованиям. И если Гиппий пытается выдать свой материальный успех за доказательство своей мудрости, Сократ отвечает ему саркастически:

> Ты, Гиппий, приводишь прекрасное и важное доказательство мудрости и своей собственной, и вообще нынешних людей, — насколько же они отличаются ею от древних! Велико было, по твоим словам, невежество людей, живших прежде. С Анаксагором произошло, говорят, обратное тому, что случается с вами: ему достались по наследству большие деньги, а он по беззаботности все потерял — вот каким неразумным мудрецом он был! Да и об остальных живших в старину рассказывали подобные же вещи. Итак, мне кажется, ты приводишь прекрасное доказательство мудрости нынешних людей по сравнению с прежними. Многие согласны в том, что мудрец должен быть прежде всего мудрым для себя самого. Определяется же это так: мудр тот, кто заработал больше денег[238].

Конечно, Платон не мог быть знаком с современными формальными методами дедукции и математических доказательств, но интуитивно он ухватил их суть и применял их в своих диалогах. Сначала, в исходной ситуации, достигается изначальное согласие, затем следует цепочка аргументов, состоящая из отдельных, обозримых шагов, причем собеседник должен подтверждать правильность каждого из них; только после этого подтверждения

что иное, как погрешности памяти или внимания», но в то же время он признавался, что избежать таких ошибок нелегко: «Случается, что даже при последней окончательной проверке мы оказываем то же пренебрежение на вид обычным и простым положениям, но таящим в себе смертельный яд и гибель для всего организма нашего построения» (Мордухай-Болтовской. Философия — Психология — Математика. С. 94, 97). Этот вопрос — о «надежности» наших рассуждений — сыграл впоследствии значительную роль при обсуждении того, что же лежит в основе математики, однако этим его роль не ограничивается: Финслер, к примеру, создал, опираясь на свои убеждения, самостоятельную теорию множеств.

[238] Гиппий Больший. 283a–b.

можно перейти к следующему шагу. То, что собеседники Сократа так однообразно выражают свое согласие («конечно», «так оно и есть», «да, несомненно» и т. д.), может немного утомить читателя, однако в этом проявляется стремление Платона не к догматичным поучениям, а к основанным на аргументах дедуктивным выводам.

Возьмем, например, — в отношении не содержания, а структуры, — диалог «Горгий», в котором явно воспроизводится образец математической дедукции. Она противопоставляется более ранней практической математике, правила которой позволяли решать повседневные задачи, но суть этих правил никто не смог бы ясно сформулировать. Платон хочет, чтобы правила рассуждения постигались изнутри, чтобы истина представала неопровержимой; это возможно, так как «истину вообще нельзя опровергнуть»[239]. Также строгая логическая дедукция противопоставляется образу действий софистов, применяющих искусство убеждения и обман; их искусство — лишь «красноречивое ораторство... льстивое угодничество»[240]. Кроме того, ориентированный на математику способ аргументации отличается от способа аргументации в зале судебного заседания:

> Милый мой, ты пытаешься опровергать меня по-ораторски, по образцу тех, кто держит речи в судах. Ведь и там одна сторона считает, что одолела другую, если в подтверждение своих слов представила многих и вдобавок почтенных свидетелей, а противник — одного какого-нибудь или же вовсе никого. Но для выяснения истины такое опровержение не дает ровно ничего[241].

Характеристиками же математической дедукции являются:

а) необходимо четко сформулировать задание и точную цель исследования;

---

[239] Горгий. 473c.

[240] Там же. 502d.

[241] Там же. 471e.

б) следует обозначить исходную позицию: имеются ли между нами различия? согласны ли мы с общим исходным пунктом?

в) нужно использовать точный язык и ясные понятия;

г) необходимо упорядоченное, постепенное движение, сопровождающееся контролем за правильностью каждого шага;

д) согласие с каждым следующим шагом преподавателя должно достигаться в результате действительного понимания, а не слепого доверия к его авторитету.

Мы приводим в дальнейшем несколько избранных отрывков (особенно из «Горгия»), которые показывают, что Платон в полной мере осознает характеристики математической логики и применяет их, хотя, конечно, не в области самой математики и не в современном понимании этого слова.

а) Необходимо четко сформулировать задание и цель исследования:

> Я прошу тебя — ни в коем случае не отступайся, чтобы действительно, по-настоящему выяснилось, *как нужно жить*[242].

б) Следует обозначить исходную позицию: имеются ли между нами различия? согласны ли мы с общим исходным пунктом?

> Стало быть, мы расходимся вот в чем...[243]
>
> Давай начнем сначала и скажи мне, что такое лучшие, по-твоему...[244]
>
> Попытаемся же осторожно установить исходный пункт этого рассуждения[245].

---

[242] Там же. 492d.

[243] Там же. 473a.

[244] Там же. 489d.

> Как мог бы, мой друг, кто-нибудь, исходя из ложного мнения, добиться хоть малой толики истины и обрести разумение[246].
>
> Каждому человеку нужно более всего внимательным быть при начале всякого дела, и тогда нужно обдумать, правильно или нет он закладывает основание. А коль скоро это достаточно испытано, остальное уже явится следом[247].
>
> *Сократ:* И такое знание доступно не всякому… Так ведь ты говоришь? — *Никий:* Да, именно так[248].
>
> У кого началом служит то, чего он не знает, а заключение и середина состоят из того, что нельзя сплести воедино, может ли подобного рода несогласованность когда-либо стать знанием? — Никогда[249].

Можно было бы добавить еще несколько подходящих отрывков, показывающих, насколько важным Платон считал этот пункт[250].

---

245 Филеб. 23b.

246 Политик. 278d.

247 Кратил. 436d.

248 Лахет. 196d.

249 Государство. 533c.

250 См. также Федр. 237c: «Во всяком деле надо для правильного его обсуждения начинать с одного и того же: требуется знать, что же именно подвергается обсуждению, иначе неизбежны сплошные ошибки. Большинство людей и не замечает, что не знает сущности того или иного предмета: словно она им уже известна, они не уславливаются о ней в начале рассмотрения; в дальнейшем же его ходе это, естественно, сказывается: они противоречат и сами себе и друг другу»; Федон. 107b: «И не только в этом, Симмий, твои слова надо бы отнести и к самым первым основаниям. Хоть вы и считаете их достоверными, все же надо их рассмотреть более отчетливо. И если вы разберете их достаточно глубоко, то, думаю я, достигнете в доказательстве результатов, какие только доступны человеку. В тот миг, когда это станет для вас ясным, вы прекратите искать»; Тимей. 29b: «В каждом рассуждении важно избрать сообразное с природой начало»; Феаг. 122b: «Сначала нам надо с тобой договориться, как именно мы определим, о чем мы советуемся, дабы не выходило, что я разумею одно, ты же —

В дальнейшем Наторп указал на то, что диалог «Федр», который так часто понимался как «диалог о любви», имеет своей основной темой как раз это — значение ясно определенного начала для диалектического процесса[251].

С современной точки зрения можно сказать, что Платон уже понял суть «аксиоматического метода» (конечно, не в нашем формальном смысле). Правильная дедукция необходима, но не достаточна, так как

> если учредитель обманулся в самом начале, то и остальное он поневоле делал уж так же, насильно согласовывая дальнейшее с первым. В этом нет ничего странного, так же ведь и в чертежах: иногда после первой небольшой и незаметной ошибки все остальное уже вынужденно следует за ней и с ней согласуется. Поэтому каждому человеку нужно более всего внимательным быть при начале всякого дела, и тогда нужно обдумать, правильно или нет он закладывает основание. А коль скоро это достаточно испытано, остальное уже явится следом[252].

Поэтому каждое доказательство, если оно хочет заслуженно носить это имя, должно быть построено на ряде аксиом, которые сами не

другое, и потом, зайдя чересчур далеко в беседе, мы не показались бы сами себе смешными — и я, дающий тебе советы, и ты, их выслушивающий, — потому что ни по одному вопросу не придем к согласию».

251 «В центре [диалога], безусловно, стоит понятие, определение. Уже вторая речь хорошо обобщает это старое сократическое требование (237c). Относительно каждого предмета есть одно начало, если мы действительно хотим совещаться: знать, в чем состоит дело, о котором мы размышляем (ср., например: Лахет. 185b); вслед за тем: сущность (οὐσία). Взаимном соглашением (ὁμολογία), достигнутым друг с другом, и соответствующим образом также с собой самим, мы должны установить понятие, определение (ὅρον) того, каковы свойства (οἶον) вещи, какая сила, значение или функция (δύναμις) положены этому понятию, чтобы вести исследование правильно... Также 238d: "То, чем это является", мы определили (ὃ τυγχάνει ὄν, что как раз есть...); принимая это во внимание, мы хотим теперь обсуждать следующее» (Natorp. Platos Ideenlehre. S. 67).

252 Кратил. 436c–d.

могут быть доказаны, но признаются собеседниками «истинными» — или же, как это принято в сегодняшнем формализме, собеседники просто соглашаются их использовать, поскольку они «работают», при этом не противореча друг другу (кстати, с точки зрения обеих этих позиций неизбежен тот факт, что принципиально невозможно доказать «все»[253]).

в) Нужно использовать точный язык и ясные понятия:

> Я снова спрошу тебя о том, что, казалось бы, совершенно ясно, а я все-таки спрошу: ведь, повторяю еще раз, я задаю вопросы ради последовательного развития нашей беседы, не к твоей невыгоде, а из опасения, как бы у нас не вошло в привычку перебивать друг друга и забегать вперед. Я хочу, чтобы ты довел свое рассуждение до конца, как сам найдешь нужным, по собственному замыслу[254].
>
> Ты коришь меня, что я постоянно твержу одно и то же, а я тебя — наоборот, что ты никогда не говоришь об одном и том же одинаково...[255]
>
> *Пол:* ...красноречие — это, по-твоему, угодничество? — *Сократ:* Нет, я сказал: только *часть* угодничества. Но что это, Пол? В твоем возрасте — и уж такая слабая память?[256]

---

253 «Недоказуемость в математике ничуть не равносильна недействительности, так как не все может быть доказано, а каждое доказательство снова предполагает недоказанные принципы» (Zermelo. Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. S. 112). Более того, теорема Геделя о неполноте доказывает, что в каждой формальной и непротиворечивой арифметике неизбежно существует тезис, который нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Истинность, с точки зрения платоника, зафиксирована, но не доступна для нас с помощью формальных систем. Как сказал физик Р. Пенроуз: «Математическая истина не определяется произвольно правилами какой-либо созданной человеком формальной системы, но имеет абсолютную природу и лежит за пределами любой системы точно определенных правил» (цит. по: Livio. The Golden Ratio. P. 241).

254 Горгий. 454b–c.

255 Горгий. 491b.

Вот это ты мне ясно определи...[257]

Я предоставляю тебе распорядиться любым названием, как тебе это будет угодно; разъясни лишь, к чему именно относишь ты то имя, которое произносишь[258].

Мы стремимся в нашем исследовании, чтобы твое мнение здесь не расходилось с нашим. Сейчас я тебе скажу, что мы думаем; если же ты с этим не согласишься, укажи это нам[259].

Но, дорогой мой, мера в таких вещах, если она хоть сколько-нибудь отстает от действительности, уже не будет в надлежащей степени доказательной[260].

г) Необходимо упорядоченное, постепенное движение, сопровождающееся контролем за правильностью каждого шага:

...в каком порядке располагает каждый все части своей работы...[261]

...и может дать отчет в каждом своем шаге...[262]

Это важный принцип: ход мысли должен протекать таким образом, чтобы слушатель или читатель мог проверять каждый отдельный шаг и, если надо, спрашивать и уточнять:

Протарх: Если бы ты выразился яснее, я, может быть, и мог бы следовать за тобой[263].

---

256 Там же. 466a.

257 Там же. 488d.

258 Хармид. 163d.

259 Лахет. 198b.

260 Государство. 504c.

261 Горгий. 503e.

262 Там же. 501a.

263 Филеб. 23e.

Да, это может быть трудно и утомительно, но без таких усилий мы получаем только видимость знания, что еще хуже, чем невежество:

> Я опасаюсь и того, о чем ты сейчас говоришь, но еще более боюсь я людей, прикоснувшихся к этим наукам, но прикоснувшихся плохо. Полное невежество вовсе не так страшно и не является самым великим из зол, а вот многоопытность и многознание, дурно направленные, — это гораздо более тяжелое наказание[264].

В формальной математической дедукции для получения полной уверенности при каждом шаге указывают, какая аксиома и какое правило использовались; у Платона это невозможно в подобной форме, тем не менее соответствующее выражение согласия («да!», «несомненно!») должно сообщать о том, что слушатель внутренне проверил правильность этого шага. Поэтому платоновские диалоги в своей структуре часто аналогичны дедуктивным доказательствам, что разъясняется в следующей схеме[265]:

---

[264] Законы. 819а. См. также: Законы. 966d–968a, особенно 967d: «Никто из смертных не может стать твердым в благочестии, если не усвоит двух только что указанных положений. Первое — что душа старше всего, что получило в удел рождение; она бессмертна и правит всеми телами; второе — что в звездных телах, как мы не раз говорили, пребывает ум всего существующего. Следует усвоить предваряющие эти положения необходимые знания, чтобы заметить их общность с мусическими искусствами и воспользоваться ими для нравственного усовершенствования в согласии с законами и чтобы быть в состоянии отдать себе разумный отчет во всем том, что разумно. А кто не в состоянии в дополнение к гражданским добродетелям приобрести эти знания, тот едва ли когда-нибудь будет удовлетворительным правителем всего государства: он будет только слугою другим правителям».

[265] Правая сторона схемы взята из: Протагор. 332а–с. Левая сторона схемы демонстрирует выведение правила скобок *K*: $a - (b - c) = a - b + c$. Это правило — последняя строка дедукции. Читатели, желающие проследить за решением по-настоящему, так, чтобы «почувствовать» дух формально-математического мышления, могут обратиться к приложению Г5.

	$[a - (b - c)] + (b - c) = a$
DS	
	$[a - (b - c)] + (b - c) + c = a + c$
A3	
	$[a - (b - c)] + b = a + c$
DS	
	$[a - (b - c)] + b = [(a - b) + b] + c$
DS	
	$[a - (b - c)] + b = (a - b) + (b + c)$
A2	
	$[a - (b - c)] + b = (a - b) + (c + b)$
A1	
	$[a - (b - c)] + b = [(a - b) + c] + b$
A2	
	$a - (b - c) = (a - b) + c$
A3	
	$a - (b - c) = a - b + c$
V	

	Называешь ли ты что-нибудь безрассудством?
Да, называю.	
	Не полная ли ему противоположность – мудрость?
По-моему, так.	
	Когда люди действуют правильно и с пользой, ...?
Нет...	
	Они поступают рассудительно благодаря рассудительности?
Несомненно.	
	А те, кто действует неправильно, поступают безрассудно...?
Мне кажется.	
	Значит, безрассудные поступки противоречат рассудительности?
Да.	
	Безрассудные поступки совершаются по безрассудству, ...?
Согласен.	
	Стало быть, если что совершается с силой, это будет исполнено силы, ...?
Видимо, так.	
	И если действуют быстро, то это быстрый поступок, а если медленно – медленный?
Да.	

Диалог «Парменид» имеет почти такую же структуру: каждый шаг проверяется, и там, где что-то непонятно («постой-ка!», «какое же?», «пока я совершенно себе этого не представляю!»), дается отдельное обоснование. Такой тщательный контроль правильности каждого отдельного шага очень важен:

> Согласимся мы? Подумай получше, прежде чем ответить[266].
>
> Все мы наперебой должны стараться понять, что в наших рассуждениях правда и что ложь[267].

д) ***Согласие с каждым следующим шагом преподавателя должно достигаться в результате действительного понимания, а не слепого доверия к его авторитету:***

> *Сократ:* Что ж, если тебе больше так нравится, буду говорить я. Ты же подтверждай мои слова, если сочтешь их правильными, а если нет — опровергай и стой твердо[268].

---

[266] Горгий. 496с.

[267] Там же. 505е.

> Во всяком случае, рассмотреть надлежит не кто это сказал, но истинны эти слова или нет[269].

> Если ты не сам от себя услышишь, что справедливость полезна, а от другого, не поверь ему[270].

> Только ты наблюдай за мной повнимательнее, как бы мне не сказать чего-нибудь несуразного[271].

> Он [Гомер] — первый наставник и вождь всех этих великолепных трагедийных поэтов. Однако нельзя ценить человека больше, чем истину, вот и приходится сказать то, что я говорю[272].

Отказ от слепого доверия важен и потому, что зачастую ученик способен видеть яснее, чем преподаватель:

> Часто, прежде чем разглядят зоркие, это удается сделать людям подслеповатым[273].

К сожалению, сильная личность преподавателя затрудняет это:

> В твоем присутствии я не решился бы ничего сказать, даже если бы мне это и прояснилось[274].

---

268 Там же. 504с.

269 Хармид. 161с.

270 Алкивиад I. 114е. В 117а Платон устанавливает, что тому, кто согласился с доказательством вопреки своей воле или без ознакомления с ним, не удастся прийти к настоящему знанию. Поэтому еще в 113а требуется, чтобы учащийся сам приводил доказательство. Он должен осознавать: я сам привел доказательство утверждаемого! Важно в этой связи замечание в 117с: «Если кто-нибудь чего-то не знает и уверен в том, что этого не знает, он не станет колебаться в этом отношении». Это является плодотворной основой для более глубокого проникновения в проблему, в то время как кажущееся знание или упование на преподавателя приводят к самодовольству и лени. «Такое непонимание — это причина всех бед и невежество» (118а).

271 Гиппий Больший. 295с.

272 Государство. 595b–c.

273 Государство. 596а.

Призыв к самостоятельному мышлению — это, конечно, не изобретение Платона. П. Гайденко установила, что это требование было неизбежно, учитывая тогдашнюю ситуацию в Греции: «Понятно, что социально-экономические изменения, происходившие в VII–VI вв. до н. э., вели к разрушению сложившихся форм связи между людьми и требовали от индивида выработки новой жизненной позиции. Философия и была одним из ответов на это требование. Она предлагала человеку новый тип самоопределения: не через привычку и традицию, а через собственный разум. Философ говорил своему ученику: не принимай все на веру, думай сам»[275]. Однако Платон осознанно подхватил это требование независимого мышления и придал ему большое значение в сократических диалогах.

Если мы строго следовали всем вышеприведенным указаниям, то, оглянувшись назад, мы увидим успешность и неопровержимость нашей дедукции:

> Но теперь ты видишь сам, что хоть вас и трое и хотя мудрее вас — тебя, Пола и Горгия — нет никого в целой Греции, вы не в состоянии доказать, что надо жить какою-то иной жизнью, чем эта, которая, надо надеяться, будет полезна для нас и в Аиде. Наоборот, как много было доводов, а все опрокинуты, и только один стоит твердо — что чинить несправедливость опаснее, чем терпеть[276].

---

274 Там же. 596а.

275 Гайденко. История греческой философии в ее связи с наукой. М.: Наука, 1980. Введение. (Текст отсутствует в более позднем издании: М.: URSS, 2012.)

276 Горгий. 527b. Н. Бурбаки приводит цитату из «Государства» (510с–е): «Те, кто занимается геометрией и арифметикой... предполагают чет и нечет, три вида углов; они рассматривают их как известные вещи: как только это предположено, они считают, что не должны отдавать в них больше отчета ни себе, ни другим [считая их] ясными для всех; исходя из этого, они действуют по порядку, для того чтобы с общего согласия прийти к тому, что имели в виду рассмотреть» и резюмирует это положение следующим

Первое примечание:

Такая аккуратность в выводах, характерная для большинства диалогов Платона, необходима потому, что наши доводы зачастую — просто набор мнений и предрассудков, а вовсе не настоящие аргументы:

> Услышав одно лишь упоминание об опьянении, одни тотчас стали его порицать, другие — хвалить; все это совершенно неуместно. Каждый из нас пытался это делать при помощи свидетелей и хвалителей. Одни из нас, опираясь на большинство, полагали, что высказывают господствующее мнение; другие основывались на том, что мы видим, как побеждают в сражениях те, кто не употребляет вина. Однако в свою очередь и это у нас осталось невыясненным. Если мы и каждое из остальных узаконений будем разбирать таким образом, то, по-моему, это будет неразумно[277].

В ироническом комментарии Сократ показывает, как его друзья слагают хвалебные речи без оглядки на их истинность или ложность:

> Видно, заранее был уговор, что каждый из нас должен лишь делать вид, что восхваляет Эрота, а не восхвалять его в самом деле. Поэтому-то вы, наверное, и приписываете Эроту все, что угодно, любые свойства, любые заслуги, лишь бы выставить его в самом прекрасном и благородном свете — перед теми, разумеется, кто не знает его, но никак не перед людьми осведомленными. И похвальное слово получается красивое и

образом: «Итак, то, из чего слагается доказательство, — это прежде всего точка отправления, выбранная с некоторым произволом (хотя и "ясная каждому"), за пределы которой, как говорит он немного ниже, и не пытаются выходить; затем исследование, состоящее из ряда промежуточных этапов, проходимых по порядку; и, наконец, согласие собеседника, гарантирующее на каждом этапе правильность рассуждения» (Бурбаки. Очерки по истории математики. С. 23).

[277] Законы. 638d–e.

> торжественное. Но я-то не знал такого способа строить похвальные речи и по неведению согласился говорить в очередь с вами. Стало быть, «язык лишь дал согласье, но не сердце, нет». А на нет и суда нет. Строить свою речь по такому способу я не стану, потому что попросту не могу[278].

Но что еще хуже, нас легко может ввести в заблуждение не только кто-то другой, но и мы сами:

> Добрый мой Кратил, я и сам давно дивлюсь своей мудрости и не доверяю ей. Видимо, мне еще самому нужно разобраться в том, что я, собственно, говорю. Ибо тяжелее всего быть обманутым самим собой. Ведь тогда обманщик неотступно следует за тобой и всегда находится рядом, разве это не ужасно?[279]

Поскольку все это действительно так, мы нуждаемся, по словам Афинянина, *в правильном способе исследования*, который позволит нам решить спорные вопросы:

> Я хочу говорить о том же самом, то есть об опьянении, но иным образом — тем, который мне кажется надлежащим, если только я смогу выяснить для нас правильный способ исследования всех подобных вопросов[280].

---

278 Пир. 198e–199a.

279 Кратил. 428d.

280 Законы. 638e. Можно сказать и так: нам следует чаще «оглядываться на сказанное» и пытаться «смотреть одновременно и вперед и назад» (Кратил 428d). Критичная тщательность важна, конечно же, не только в математике и в философии, но и в других областях, например в литературных произведениях — и литераторы, такие как Л. Н. Толстой, знали это и сознательно стремились к этому: «Ясность, точность, прозрачность формы, полное соответствие ее внутреннему содержанию — это, можно сказать, первое и последнее требование в эстетике Толстого. Отвечая... Леониду Андрееву, он советовал ему больше работать над своими произведениями, "доводя в них свою мысль до последней степени точности и ясности". "Как ни страшно это сказать, — говорит он по другому поводу, — а художество требует еще большей точности, précision, чем наука» (Гуревич. Литература и эстетика. С. 242).

Такой «правильный способ» представляет именно *математическая дедукция*, в которой заложена возможность самокритики и самопроверки. Она важна везде, и не в последнюю очередь в самой математике. Любопытно здесь высказывание знаменитого математика Феликса Хаусдорфа. В предисловии к своему основному труду «Grundzüge der Mengenlehre» он строго подчеркивал необходимость тщательной дедукции: «В области, где абсолютно ничего не является само собой разумеющимся, где правильное часто является парадоксальным[281], а убедительное — ошибочным, вряд ли есть другие средства, кроме полной дедукции, для предохранения себя и читателя от ошибок»[282].

Второе примечание:

Платон не считал, что познание всегда добывается дедуктивно-рациональным путем. Имеются и области, познание которых превосходит возможности нашего разума; в этом случае мы полагаемся на сообщения «более высоких авторитетов»:

> Повествовать о прочих божествах и выяснять их рождение — дело для нас непосильное. Здесь остается только довериться тем, кто говорил об этом прежде нас; раз говорившие сами были, по их словам, потомками богов, они должны были отлично знать своих прародителей. Детям богов отказать в доверии никак нельзя, даже если говорят они без правдоподобных и убедительных доказательств, ибо, если они

---

[281] Хаусдорф сам приводит и доказывает такой парадокс: можно разобрать шар на части таким образом, что эти части, если сложить их новым способом, дадут в итоге два полных шара, каждый из которых равен по размеру первоначальному. (Более точно: Хаусдорф доказал, «*dass eine Kugelhälfte mit einem Kugeldrittel kongruent sein kann*, genauer, dass (von einer abzählbaren Menge abgesehen) die Kugel K in drei Mengen A, B, C gespalten werden kann derart, dass A, B, C und B + C paarweise kongruent sind»). Это действительно «безумный» результат! (См. Hausdorff. Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen. S. 428–433.)

[282] Hausdorff. Gesammelte Werke. Band II. S. 97.

> выдают свой рассказ за семейное предание, приходится им верить, чтобы не ослушаться закона[283].

Поэтому считается целесообразным не полагаться исключительно на свой разум, а взывать к богам о поддержке:

> Итак, приступая к речам, еще раз обратимся с молитвой к богу-спасителю, дабы он указал нам счастливый путь от странного и необычного повествования к правдоподобному выводу[284].

Третье примечание:

Мы увидели, что ценность дедукции и доказательства состоит в том, чтобы «гарантировать» правильность какого-либо утверждения. Но они важны только для нас, смертных существ. Сама правильность утверждения, согласно платоникам, не зависит от нашей возможности или способности доказать ее. Удачно описал это И. Р. Браун: «Платоники… утверждают, что истина отличается от доказательства. Доказательство *П* не делает *П* истиной, скорее это свидетельство того, что *П* истинно. Отсутствие выводов из изначальных постулатов значит только, что мы могли бы навечно остаться в неведении о значении истинности *П*, но *П* все равно имеет это значение. Инстинкты любого платоника подобны инстинктам большинства из нас в отношении естественнонаучных утверждений. Не существует возможности тем или иным путем получить подтверждение тому, что ровно 75 миллионов лет назад с точностью до секунды на том самом месте, где я стою сейчас, стоял тираннозавр. Тем не менее большинство из нас полагают такое

---

283 Тимей. 40d–e. Интересно, что Аристотель также считает доверие оправданным, но он ссылается не на связь с богами, а на практический опыт: «Поэтому недоказательным утверждениям и мнениям опытных и старших внимать следует не меньше, чем доказательствам. В самом деле, благодаря тому что опыт дал им "око", они видят правильно» (Аристотель. Никомахова этика. 1143b 10–15).

284 Тимей. 48d.

утверждение истинным или ложным. Возможность его доказать или опровергнуть не имеет ничего общего с его истинностью или ложностью. Таково же отношение платоника к CH[285]. CH либо действительно истинно, либо действительно ложно, даже если мы не можем доказать ни того ни другого»[286].

2.12. Высшая польза математики

Платон был, без сомнения, очарован математикой и с оживленным интересом следил за ее развитием, особенно тогда, когда она не была связана с непосредственным «практическим применением». Тем не менее самые глубокие устремления Платона были не математическими — и в принципе даже не философскими, — а гуманистически-просветительскими. Это отчетливо видно из следующей цитаты, в которой Платон описывает состояние невежественного человека:

> Кто не в силах с помощью доказательства определить идею блага, выделив ее из всего остального; кто не идет... сквозь все препятствия, стремясь к опровержению, основанному не на мнении, а на понимании сущности; кто не продвигается через все это вперед... — про того, раз он таков, ты скажешь, что ему неведомо ни самое благо, ни какое бы то ни было благо вообще, а если он и прикоснется каким-то путем к призраку блага, то лишь при помощи мнения, а не знания.

---

285 CH означает «континуум-гипотеза» — знаменитая проблема теории множеств. Она предполагает, что «промежуточных» мощностей между счетным множеством и континуумом нет. Доказать эту гипотезу не удалось, и наконец Гедель и Коэн показали, что на основе аксиом теории множеств можно принимать эту гипотезу или не принимать, и это не приведет к противоречиям. В этом смысле гипотеза «неразрешима». При этом платоник все равно уверен, что «в реальности» гипотеза либо истинна, либо нет, несмотря на то что мы не можем узнать, какая возможность действительна (по крайней мере *пока*...).

286 Brown. Philosophy of Mathematics. P. 182. Более подробно мы обсудим эти убеждения платоников в Приложении А.

> Такой человек проводит нынешнюю свою жизнь в спячке и сновидениях, и, прежде чем он здесь пробудится, он, придя в Аид, окончательно погрузится в сон[287].

Математика особенно помогает в том, чтобы очнуться от сонного состояния невежества[288] и приблизиться к истинному знанию и самопониманию. Дело в том, что математик продвигается в поле *абстрактности* с помощью *разума*. При этом надо заметить, что слово «абстрактность» не имеет здесь оттенок «нереальности», поэтому Р. Штайнер по праву предпочитал выражение «свободное от чувственности мышление» и настаивал на том, что это «не абстрактное мышление, а очень, очень настоящее, реальное мышление»[289]. Это мышление возникает тогда, когда исчезают представления, вызванные внешними явлениями. Поэтому Штайнер считает, что лозунг «Негеометр да не войдет!» призывает не к ценности обычной школьной геометрии (которая, конечно, необходима как основание), а к успешному достижению «свободного от чувственности мышления»[290]. Такая математика, в которой истинное познание приобретается не с помощью чувств, а *с применением чистого разума*, является примером для философии. Таким обра-

---

[287] Государство. 534с. Ср. 484с, где Платон различает «слепых» и людей, имеющих «острое зрение».

[288] Ср. слова Лапласа: «Сохраним же тщательно и умножим сокровищницу этих возвышенных знаний, отраду мыслящих существ. Эти знания сослужили важную службу мореплаванию и географии. Но их гораздо большее значение состоит в том, что они рассеяли страхи, вызываемые некогда небесными явлениями, и уничтожили заблуждения, рождавшиеся от незнания наших истинных отношений с природой. Заблуждения и страхи, которые очень скоро возродились бы, если бы светоч науки погас» (Лаплас. Изложение системы мира. С. 318).

[289] Steiner. Mythen und Sagen. S. 246.

[290] «Когда [у человека] исчезают представления, вызванные внешними явлениями, тогда он понимает, что подразумевал греческий философ *Платон*, когда писал над воротами своей школы: "Негеометр да не войдет!" Смысл таков: не должен входить тот, кто не может подняться до свободного от чувственности мышления» (Ibid. S. 244).

зом, она учит нас направлять взгляд *не вниз, а наверх*[291], не к тому, что возникает и исчезает снова и снова, а к истинному, бессмертному существующему:

> Это наука, которой занимаются ради познания вечного бытия, а не того, что возникает и гибнет. — Хорошая оговорка: действительно, геометрия — это познание вечного бытия. — Значит, она влечет душу к истине и воздействует на философскую мысль, стремя ее ввысь, между тем как теперь она у нас низменна вопреки должному[292].

Однако Главкон, собеседник Сократа, все еще понимает математику с обычной точки зрения, задумываясь прежде всего о ее *практической пользе* — для военного искусства, земледелия, корабельного дела и т. д. Такая польза не оспаривается Сократом[293], но обозначается как в лучшем случае второстепенная:

---

291 Это не означает, конечно же, «смотреть вверх на небо» в буквальном смысле, как это саркастически описывает Сократ: «Ты великолепно, по-моему, сам про себя решил, что такое наука о вышнем. Пожалуй, ты еще скажешь, будто если кто-нибудь, запрокинув голову, разглядывает узоры на потолке и при этом кое-что распознает, то он видит это при помощи мышления, а не глазами. Возможно, ты думаешь правильно, — я-то ведь простоват и потому не могу считать, что взирать ввысь нашу душу заставляет какая-либо иная наука, кроме той, что изучает бытие и незримое. Глядит ли кто, разинув рот, вверх или же, прищурившись, вниз, когда пытается с помощью ощущений что-либо распознать, все равно, утверждаю я, он никогда этого не постигнет, потому что для подобного рода вещей не существует познания и человек при этом смотрит не вверх, а вниз, хотя бы он и лежал ничком на земле или умел плавать на спине в море» (Государство. 529b–c).

292 Государство. 527c.

293 См. также: Алкивиад I. 126c — «А благодаря какому искусству государства приходят к согласию относительно числа? — Благодаря искусству арифметики. — Ну а частные лица? Разве не благодаря тому же искусству? — Да, так. — И каждый с самим собой согласен относительно числа благодаря этому же искусству? — Да. — Ну а благодаря какому искусству каждый согласен с самим собой относительно пяди и локтя — какая из этих мер больше? Разве не благодаря измерительному?»

> *Главкон:* Поскольку геометрия применяется в военном деле, ясно, что подходит. При устройстве лагерей... и разных других военных построениях, как во время сражения, так и в походах, конечно, скажется разница между знатоком геометрии и тем, кто ее не знает. — *Сократ:* Но для этого было бы достаточно какой-то незначительной части геометрии и счета. Надо, однако, рассмотреть преобладающую ее часть, имеющую более широкое применение: направлена ли она к нашей цели, помогает ли она нам созерцать идею блага?[294]

Подлинная польза математики состоит в том, что душа, которая занимается математикой, очищается и делается «видящей»:

> Между тем вот что очень важно, хотя поверить этому трудно: в [математических] науках очищается и вновь оживает некое орудие души каждого человека, которое другие занятия губят и делают слепым, а между тем сохранить его в целости более ценно, чем иметь тысячу глаз, — ведь только при его помощи можно увидеть истину[295].

На эту «более высокую пользу» надо обращать внимание также при занятии другими науками, например, астрономией:

> Как, по-твоему, следует изучать астрономию в отличие от того, что делают теперь? В чем польза ее изучения для нашей цели? — А вот как. Эти узоры на небе, украшающие область видимого, надо признать самыми прекрасными и совершенными из подобного рода вещей, но все же они сильно уступают вещам истинным с их перемещениями друг относительно друга, происходящими с подлинной быстротой и медленностью, в истинном количестве и всевозможных истинных формах, причем перемещается все содержимое. Это постигается разумом и рассудком, но не зрением. Или, по-твоему, именно им? — Ни в коем случае. — Значит, небесным узором надо пользоваться как пособием для изучения подлинного бытия, подобно тому как если бы нам

---

294 Государство. 527d.

295 Государство. 527d–e.

> подвернулись чертежи Дедала или какого-нибудь иного мастера либо художника, отлично и старательно вычерченные. Кто сведущ в геометрии, тот, взглянув на них, нашел бы прекрасным их выполнение, но было бы смешно их всерьез рассматривать как источник истинного познания равенства, удвоения или каких-либо иных отношений[296].

На важность для Платона этого аспекта математики также указывает следующее место из беседы Сократа с Главконом:

> Но конечно, сказал он, не меньше это наблюдается и в том случае, когда мы созерцаем тождественное: одно и то же мы видим и как единое, и как бесконечное множество. — Раз так бывает с единицей, сказал я, не то же ли самое и со всяким числом вообще? — Как же иначе? — Но ведь арифметика и счет целиком касаются числа?... — И оказывается, что как раз они-то и ведут к истине... Значит, они принадлежат к тем познаниям, которые мы искали. Воину необходимо их усвоить для войскового строя, а философу — для постижения сущности, всякий раз, как он вынырнет из области становящегося, иначе ему никогда не стать мыслителем[297].

Способность математики к достижению «более высоких» знаний хорошо иллюстрируется также платоновским мифом о пещере[298]. Воспитание математического мышления приводит к освобождению человека от оков, и его ослепленные вначале глаза направляются от силуэтов к настоящим вещам. Однако, если такой просвещенный возвратится в пещеру, он будет принят враждебно, так как те, кто не насладились математическим образованием, ничего не понимают в истинном мире вне пещеры. Это, конечно, досадно, но выхода нет: *Extra matematikam nulla salus*[299].

---

296 Там же. 529c–e.

297 Государство. 525a–b.

298 Там же. 514–518.

299 Это относится, впрочем, не только к философии, но и к политике, что, по мнению Рассела, является некоторым преувеличением: «Нам представ-

Изначально для Платона было важно, чтобы люди, облеченные властью, не оставались в пещере, а вышли из нее и позволили «открыть себе глаза». Такое «просвещение», к сожалению, не происходит легко и автоматически, так как некомпетентный человек в общем вполне доволен своим незнанием, которое он не осознает в качестве такового[300]. Поэтому нужны законы, которые предписывают занятия математикой. Платон в «Государстве» вменяет в обязанность такие занятия стражам, в то время как соответствующее образование не предусмотрено для третьего класса и даже рассматривается как нежелательное:

> Тамошним правителям, я полагаю, просто невыгодно, чтобы у их подданных рождались высокие помыслы...[301]

Однако в написанном под конец жизни произведении «Законы» Платон изменил этот элитарный подход: теперь он требует обучения всего населения, причем такого обучения, которое устраняет не только незнание, но и гораздо более опасное неполное знание:

> *Афинянин:* Да, я опасаюсь и того, о чем ты сейчас говоришь, но еще более боюсь я людей, прикоснувшихся к этим наукам, но прикоснувшихся плохо. Полное невежество вовсе не так страшно и не является самым великим из зол, а вот многоопытность и многознание, дурно направленные, — это гораздо более тяжелое наказание[302].

ляется неразумным настойчивое требование Платона об обучении младшего Дионисия, тирана Сиракуз, геометрии, чтобы сделать из него хорошего царя, но, с точки зрения Платона, это было необходимо. Он был в достаточной степени пифагорейцем, чтобы считать, что без математики невозможно достичь подлинной мудрости» (Рассел. История западной философии. С. 151).

300 «Не занимаются философией и не желают стать мудрыми опять-таки и невежды. Ведь тем-то и скверно невежество, что человек и не прекрасный, и не совершенный, и не умный вполне доволен собой» (Пир. 204а).

301 Пир. 182с.

302 Законы. 819а.

Чтобы преодолеть это «неполное знание», соответствующие занятия нужно начинать уже в раннем детстве:

> Свободные люди должны обучаться каждой из этих наук в таком объеме, в каком им обучается наряду с грамотой великое множество детей в Египте. Прежде всего там нашли простой способ обучения детей счету; во время обучения пускаются в ход приятные забавы: яблоки или венки делят между бо́льшим или меньшим количеством детей, сохраняя при этом одно и то же общее число; устанавливают последовательность выступлений и группировку кулачных бойцов и борцов; определяют по жребию, как это обычно бывает, кому с кем стать в пару. Есть еще и такая игра: складывают в одну кучу сосуды — золотые, бронзовые, серебряные… — столько, чтобы при разделе было целое число, и… в процессе игры происходит необходимое ознакомление с числами. Для учеников это полезно, так как пригодится в строю при передвижениях, перестройках и даже в хозяйстве. Вообще это заставляет человека приносить больше пользы самому себе и делает людей более бдительными. Кроме того, путем измерения длины, ширины и глубины люди освобождаются от некоего присущего всем им от природы смешного и позорного невежества в этой области[303].

«О каком невежестве ты говоришь?» — спрашивает Клиний. Афинянин отвечает, что чувствует стыд за греческий народ:

> Друг мой Клиний, я и сам был удивлен, что так поздно узнал о том состоянии, в котором все мы находимся. Мне показалось, что это свойственно не человеку, но скорее каким-то свиньям. И я устыдился не только за самого себя, но и за всех эллинов[304].

В дальнейшем Афинянин объясняет, что этот позор заключается в том, что все греки считают доказанным, что у двух любых отрезков всегда есть общая мера, в то время как в действительности

---

303 Законы. 819b–c.

304 Там же. 819d.

существуют несоизмеримые отрезки. В ответ на это невежество нужно сказать: «Лучшие из эллинов, это и есть одна из тех вещей, не знать которые, как мы сказали, позорно»[305].

Мы видим здесь, что, согласно позднему Платону, математические знания важны не только для господствующих классов, но и для всех эллинов. Эти знания, не имеющие практической пользы, которыми невозможно заработать деньги, должны, однако, формировать дух народа и просвещать его.

Эту цель занятий по математике, заданную Платоном, удачно сформулировал Прокл следующими словами: «Следует заниматься той геометрией, которая с каждой теоремой делает шаг на пути к горнему и подымает душу ввысь, и не позволяет ей опускаться в область чувственно воспринимаемого и применять геометрию к обычным человеческим нуждам, в погоне за которыми забывают о бегстве отсюда»[306].

Можно спросить: занимаемся ли мы сегодня «той геометрией», той математикой? Тот, кто изучал математику в наших университетах, вполне может в этом усомниться. Тамошние преподаватели вынуждены готовить будущих научных тружеников, а число математических предметов столь велико, что заниматься «философскими вопросами» у многих профессоров и студентов нет ни времени, ни даже желания. Что же касается самих философов, то Андреас Шпайзер сожалел, что наши университеты допускают обучение философии без математики. Философия как предмет высшей школы, сказал он, «беспрерывно меняет форму и содержание так сильно, что это вызывает удивление. Только одно неизменно в течение последних 100 лет, а именно то, что при этом математика остается чужой на этом празднике жизни»[307].

---

[305] Там же. 820b.

[306] Прокл Диадох. Комментарий к первой книге «Начал» Евклида. Введение. Ч. II. Гл. 20.

[307] Speiser. Elemente der Philosophie und der Mathematik. S. 9–10.

Интересно, что есть место, где серьезно используют математику в качестве подготовки для высшего философского мышления, но мало кто знает о нем. Это математико-астрономическая секция в Гетеануме в Дорнахе (Швейцария). На ее примере можно увидеть, как основательная математическое подготовка может способствовать философскому мышлению и расширять его границы, служа для него подготовительной ступенью[308]. В настоящей книге, к сожалению, невозможно представить подобный курс, но в Приложениях Г11 и Г12 мы предлагаем два таких предварительных упражнения.

И вот еще что: во всех произведениях Платона видно его убеждение, что наука должна служить в конечном счете не только просветительским, *но и этическим* целям. Гайденко коротко и удачно выразила это таким образом: «Платон прочно связывает теоретическое познание — науку — с жизнедеятельностью человека и общества. Ни одна из наук не является для него частной в том смысле, как это впоследствии понимал Аристотель: все они вместе образуют единое целое, вершину которого составляет философия, а корни — математика и астрономия»[309]. «Корни»,

---

[308] См. публикации Гетеанума, напр.: Locher-Ernst L. Mathematik als Vorschule zur Geist-Erkenntnis. Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag, 1973; Locher-Ernst L. Urphänomene der Geometrie. Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag, 1980^2; Ziegler R. Mathematik und Geisteswissenschaft. Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag, 1992; Ziegler R. Platonische Körper: Verwandtschaften — Metamorphosen — Umstülpungen. Dürnau: Kooperative Dürnau, 1998; Adam P., Wyss A. Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde. Stuttgart: Verlag Freies Geistesleben, 1994; Штайнер Р. Четвертое измерение. Математика и действительность. М.: Титурель, 2007; Рудольф Штайнер и многомерное пространство. М.: Титурель, 2010. — Многие считают, что в антропософском движении есть «чересчур эзотерические» учения. Я не высказываю здесь свое мнение об этом, хочу только сказать, что как минимум математическая часть антропософии заслуживает внимания — Л. Лохер-Эрнст, например, был профессором математики в техническом институте Винтертура (Швейцарии) и серьезным мыслителем, а Р. Циглер — доктором математических наук.

[309] Гайденко. История греческой философии в ее связи с наукой. С. 179.

«средство», «пример», «путь» — можно разными словами описывать роль математики в нахождении правильного и справедливого образа личной и общественной жизни, но важно, что математика *играет* такую роль. «Если есть общая аналогия существующего, то можно исследовать ее с помощью математики, а затем, с другой стороны, более определенно выводить из нее нормы и законы политического строя»[310]. Можно сформулировать это и более философски: «Путь познания ведет от отдельного математического наблюдения к совокупности математического знания и к обзору различных математических дисциплин и, наконец, отсюда к единому — обобщающему все существующее — систематическому и ноэтическому познанию наивысших причин»[311].

Мы хотели бы завершить данный параграф комментарием, который хорошо подходит к «числовым текстам» Платона, к их смыслу, к их возможностям и к их ограниченности. В. А. Карпунин, комментируя труд Рене де Клере, попробовавшего представить математическую модель творения вселенной Богом[312], писал, что тот «интерпретировал формулу $\frac{A}{0} = \infty$ или $A = 0 \cdot \infty$ таким образом, что формула "Вселенная = $0 \cdot \infty$ = Бог" производит мир "из ничего" = нуль ("ничто"), помноженный (творящая сила Бога) на конкретную бесконечность (конкретная интенция, цель Бога) = "Из ничего" творящей силой Бога, выполняющей Его намерение, производится вселенная. Такова "Божья арифметика"...»[313]. И Карпунин продолжает: «Разумеется, приведенная цепочка равенств не является ни доказательством бытия Божия... ни доказательством сотворения вселенной Богом. Она представляет собой не более чем некоторую модель, иллюстрацию на языке математики убеждения в том, что

---

310 Gaiser. Platons Menon und die Akademie. S. 245.

311 Ibid. S. 262.

312 Клере Р. де. Математическое доказательство необходимости Бытия Божия. Сергиев Посад: Издательство А. Трепова, 1915.

313 Карпунин. Актуальная бесконечность и некоторые традиционные аргументы в пользу бытия Божия. С. 345–346.

Вселенная создана Богом. Думаю, что язык математики удобен для создания подобных моделей прежде всего потому, что сфера математики — сфера чистой творческой интеллектуальной самодеятельности человеческого духа, созданного с богословской точки зрения по образу и подобию Божию. Занимаясь "чистой математикой", человек в какой-то степени уподобляется Богу...»[314]

[314] Там же. С. 346. См. также примеч. 31 (с. 61–62) настоящего издания, где приводятся похожие высказывания нескольких математиков, и список подходящей к этой теме литературы в примеч. 308 (с. 182).

Глава 3.
Области применения математики

Мы уже установили, что Платон сравнительно мало интересовался применением математики в повседневной жизни. Он ценил ее скорее как образец чистого мышления, способного к абстракции. Занятия математикой очищают и оттачивают душевные силы разума, поднимая их на более высокий уровень. Они имеют и психологическое значение: тот, кто не умеет считать, легко может быть устрашен высшими и, возможно, зловещими силами[1]. Однако в некоторых диалогах Платон использует математические факты и методы совершенно конкретным образом. Ниже мы приводим несколько примеров этого.

3.1. Числа и числовые соотношения

В параграфе 2.6 мы сказали, что Платон мог свободно использовать числа для описания философских или нравственных проблем. Приведем теперь несколько примеров.

Первый пример. Душа, согласно Платону, была сотворена раньше тела, а ее положение — повелительницы этого тела — является более почетным. При создании души ее Творец придерживался точных числовых соотношений.

Текст, который мы собираемся интерпретировать, совсем не прост. Так считал, например, В. Еремеев: «Описание принципов

---

[1] Тимей. 40c–d: «Что касается хороводов этих божеств, их взаимных сближений, обратного вращения их кругов и забеганий вперед, а также того, какие из них сходятся или противостоят друг другу и какие становятся друг перед другом в таком положении по отношению к нам, что через определенные промежутки времени они то скрываются, то вновь появляются, устрашая тех, кто не умеет расчислить сроки».

построения антропоморфного космоса, данное Платоном в "Тимее", — одно из самых темных мест в философии этого мыслителя»[2]. Несмотря на кажущуюся непонятность этого фрагмента, нам более близка позиция физика-теоретика и философа Карла Фридриха фон Вайцзеккера: «Конечно, мое понимание Платона не бесспорно, так как в его трудах имеются места, которых я еще до конца не понял, но я убежден, что он точно знал, о чем говорил»[3]. Вот этот текст:

> Слив их [т. е. три начала] таким образом при участии сущности и сделав из трех одно, он это целое в свою очередь разделил на нужное число частей, каждая из которых являла собою смесь тождественного, иного и сущности. Делить же он начал следующим образом: прежде всего отнял от целого одну долю, затем вторую, вдвое большую, третью — в полтора раза больше второй и в три раза больше первой, четвертую — вдвое больше второй, пятую — втрое больше третьей, шестую — в восемь раз больше первой, а седьмую — больше первой в двадцать семь раз. После этого он стал заполнять образовавшиеся двойные и тройные промежутки, отсекая от той же смеси все новые доли и помещая их между прежними долями таким образом, чтобы в каждом промежутке было по два средних члена, из которых один превышал бы меньший из крайних членов на такую же его часть, на какую часть превышал бы его больший, а другой превышал бы меньший крайний член и уступал большему на одинаковое число. Благодаря этим скрепам возникли новые промежутки, по 3/2, 4/3 и 9/8, внутри прежних промежутков. Тогда он заполнил все промежутки по 4/3 промежутками по 9/8, оставляя от каждого промежутка частицу такой протяженности, чтобы числа, разделенные этими оставшимися промежутками, всякий раз относились друг к другу как 256 к 243. При этом смесь, от которой бог брал упомянутые доли, была истрачена до конца[4].

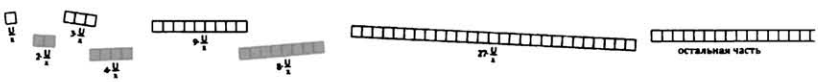
---

[2] Еремеев. Теория психосемиозиса и древняя антропокосмология. С. 19.

[3] Weizsäcker. Platonische Naturwissenschaft im Laufe der Geschichte. S. 327.

[4] Тимей. 35b–36b.

Платон не определяет размер этого «целого» — пусть он будет U. Он также не определяет размер «одной доли» — пусть она составит x. Делить же Творец начал следующим образом: прежде всего он отнял от целого [U] одну долю [$\frac{U}{x}$], затем вторую, вдвое большую [$2\cdot\frac{U}{x}$], третью — в полтора раза больше второй и в три раза больше первой [$3\cdot\frac{U}{x}$], четвертую — вдвое больше второй [$4\cdot\frac{U}{x}$], пятую — втрое больше третьей [$9\cdot\frac{U}{x}$], шестую — в восемь раз больше первой [$8\cdot\frac{U}{x}$], а седьмую — больше первой в двадцать семь раз [$27\cdot\frac{U}{x}$]. Получилось семь долей: одна «единица», три «двойные» доли (как назвал их Платон, т. е. степени с основанием 2: $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ — на рисунке они показаны темными), четыре «тройные» доли (т. е. степени с основанием 3: $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$ — на рисунке серые), и остальная часть:



Между этими долями — единицей, двойными и тройными — образовались «промежутки». После этих слов Платон без каких-либо пояснений переходит на другой уровень рассуждения. Сначала он говорил, что бог просто «отнял» доли, значит, они лежат где-то и между ними нет «промежутков». Но потом он концентрируется только на цифрах 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27 (лежащих в основании долей), которые, как мы можем увидеть, представляют собой семь натуральных чисел, между которыми можно поставить новые числа или «доли».

В каждый промежуток Бог поставил две новые доли (или числа), «два средних члена», которые он отнял от остальной части.

Первый средний член — назовем его H — таков, что он «превышал бы меньший из крайних членов на такую же его часть, на какую часть превышал бы его больший», т. е. $(H - a) : a = (b - H) : b$. Если мы вычислим H из этой пропорции, то увидим, что H является средним гармоническим чисел a и b:

$$\frac{H-a}{a}=\frac{b-H}{b} \quad\rightarrow\quad \frac{H}{a}-1=1-\frac{H}{b} \quad\rightarrow\quad Ha+Hb=2ab \quad\rightarrow\quad H=\frac{2ab}{a+b}$$

Второй средний член — назовем его A — таков, что он «превышал бы меньший крайний член и уступал большему на одинаковое число», т. е. $A - a = b - A$. Значит, A является средним арифметическим чисел a и b:

$$A-a=b-A \quad\rightarrow\quad 2A=a+b \quad\rightarrow\quad A=\frac{a+b}{2}$$

Это значит, что в «двойной» прогрессии 2–4–8 Бог наполнил:
промежуток между 2 и 4 дробями 8/3 и 3,
промежуток между 4 и 8 дробями 16/3 и 6.
Мы получаем прогрессию $2\cdots\frac{8}{3}\cdots3\cdots4\cdots\frac{16}{3}\cdots6\cdots8$

В «тройной» прогрессии 1–3–9–27 Бог наполнил:
промежуток между 1 и 3 дробями 3/2 и 2,
промежуток между 3 и 9 дробями 9/2 и 6,
промежуток между 9 и 27 дробями 27/2 и 18.
Мы получаем прогрессию $1\cdots\frac{3}{2}\cdots2\cdots3\cdots\frac{9}{2}\cdots6\cdots9\cdots\frac{27}{2}\cdots18\cdots27$

В этом месте Платон продолжает свое изложение следующим образом: «Благодаря этим скрепам возникли новые промежутки, по 3/2, 4/3 и 9/8, внутри прежних промежутков». Если мы интерпретируем это так: «разделить соседние дроби» (вторую разделить на первую), то получим действительно эти и только эти три дроби (или, по Платону, «промежутки»):

$$\underbrace{\frac{2}{1}\ldots\frac{8}{3}}_{\frac{4}{3}}\underbrace{\ldots\frac{3}{1}}_{\frac{9}{8}}\underbrace{\ldots\frac{4}{1}}_{\frac{4}{3}}\underbrace{\ldots\frac{16}{3}}_{\frac{4}{3}}\underbrace{\ldots\frac{6}{1}}_{\frac{9}{8}}\underbrace{\ldots\frac{8}{1}}_{\frac{9}{8}} \quad \text{и} \quad \underbrace{\frac{1}{1}\ldots\frac{3}{2}}_{\frac{3}{2}}\underbrace{\ldots\frac{2}{1}}_{\frac{4}{3}}\underbrace{\ldots\frac{3}{1}}_{\frac{3}{2}}\underbrace{\ldots\frac{9}{2}}_{\frac{3}{2}}\underbrace{\ldots\frac{6}{1}}_{\frac{4}{3}}\underbrace{\ldots\frac{9}{1}}_{\frac{3}{2}}\underbrace{\ldots\frac{27}{2}}_{\frac{3}{2}}\underbrace{\ldots\frac{18}{1}}_{\frac{4}{3}}\underbrace{\ldots\frac{27}{1}}_{\frac{3}{2}}$$

Теперь мы видим, что скрывалось за данной конструкцией: эти три дроби соответствуют музыкальным интервалам (3/2 ≈ квинта, 4/3 ≈ кварта, 9/8 ≈ целый тон). И если мы согласимся с интерпретацией М. Бергер, согласно которой ряд четных и нечетных чисел показывают трехмерность пространства[5], то увидим, что, по Платону, Бог-демиург создал Вселенную и душу согласно законам *гармонии*.

Но данная конструкция, видимо, все еще слишком «груба», поэтому начинается заполнение еще более мелких подразделений. Бог «заполнил все промежутки по 4/3 промежутками по 9/8, оставляя от каждого промежутка частицу такой протяженности, чтобы числа, разделенные этими оставшимися промежутками, всякий раз относились друг к другу как 256 к 243».

Возьмем в качестве примера первые дроби первой прогрессии 2/1 и 8/3 с «промежутком» 4/3, т. е. кварту $\frac{2}{1}\cdots\frac{8}{3}$, и заполним ее промежутками x, y, z следующим образом: $\frac{2}{1}\cdots x\cdots y\cdots z\cdots\frac{8}{3}$.

Платоновская конструкция требует, что $\frac{8}{3}:z=\frac{9}{8}$ и $x:\frac{2}{1}=\frac{9}{8}$. Мы получаем $z=\frac{64}{27}$ и $x=\frac{9}{4}$. Из этого следует $y=\frac{z}{x}=\frac{64}{27}:\frac{9}{4}=\frac{256}{243}$. Последная дробь представляет собой полутон.

Значит, кварту $\frac{4}{3}$ Бог заполнил двумя целыми тонами $\frac{9}{8}$ и одним полутоном $\frac{256}{243}$:

$$\underbrace{\frac{2}{1}\cdots\frac{9}{4}}_{\frac{9}{8}}\overbrace{\cdots}^{\frac{256}{243}}\underbrace{\frac{64}{27}\cdots\frac{8}{3}}_{\frac{9}{8}}$$

---

5 Berger. Proportion bei Platon. S. 173.

Мы можем проделать такую операцию со всеми квартами. Тогда все кварты «исчезнут», и мы будем иметь три интервала: квинту **К**, целый тон Ц, полутон П. В итоге «двойная» прогрессия 2–4–8 и «тройная» прогрессия 1–3–9–27 принимают «музыкальный вид»[6]:

Ц П Ц Ц Ц П Ц Ц П Ц Ц Ц и **К** Ц П Ц **К** **К** Ц П Ц **К** **К** Ц П Ц **К**

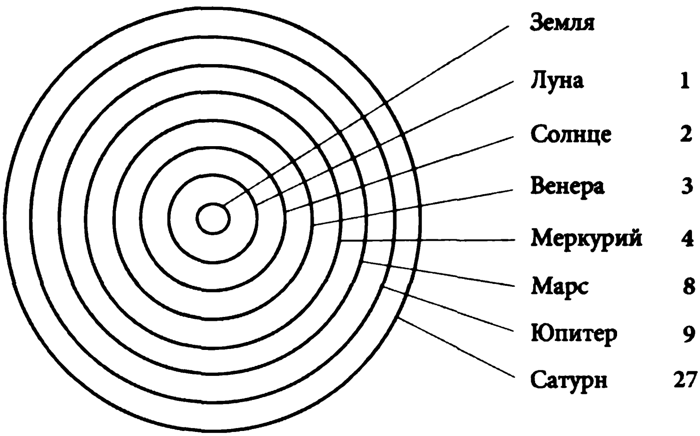
Конечно, Платон не сам изобрел всю эту теорию. Известно, что пифагорейцы тщательно исследовали музыкальные законы. Все полученные Платоном дроби мы встречаем и в пифагорейском строе:

до	ре	ми	фа	соль	ля	си	до
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$

6 Приведенное толкование, представленное такими авторы, как, например, А. Ф. Лосев, В. Е. Еремеев считал формально верным, «но в результате получается очень громоздкая конструкция, не имеющая, пожалуй, никакого отношения к реальному положению дел... Звукоряд, составленный А. Ф. Лосевым посредством всех проделанных им операций, охватывает диапазон в четыре октавы с большой секстой (1–27). Но такой огромный диапазон никогда не использовался в теории древних греков... "совершенная неизменная система" имела диапазон в две октавы. И это максимум, что древние греки могли себе позволить. Меньший диапазон — пожалуйста. Например, малая "совершенная неизменная система" имела диапазон октавы с квартой (иначе, чистой ундецимы)» (Еремеев. Теория психосемиозиса и древняя антропокосмология. С. 22). Далее Еремеев указывает на то, что Платон мыслил космическую душу в качестве объемного образования. Поэтому следует рассматривать ряд чисел в виде трех групп: 1–2–3, 1^2–2^2–3^2 и 1^3–2^3–3^3. «Первая группа будет соответствовать подразделению линии на пропорции музыкального звукоряда диапазоном в октаву с квинтой (иначе, в чистую дуодециму); вторая — аналогичному подразделению плоскости; третья — объему. Таким образом, объемная космическая душа подразделяется на октаву с квинтой по всем трем координатам». Но в главном Еремеев приходит к такому же выводу: «что внешняя часть космической души... коррелирует с интервалами квинты второй октавы. Значит, и космический ум имеет такую же "музыкальную" корреляцию» (Там же. С. 24).

Но интересно, каким образом Платон использовал эти результаты для своего изложения строя Вселенной. Он заканчивает свой рассказ словами: «При этом смесь, от которой бог брал упомянутые доли, была истрачена до конца». Это значит, что мир и душа состоят из фундаментальных интервалов **К**, Ц и П, и только из них. Мир и душа созданы Богом по математическим и музыкальным законам.

Поэтому неудивительно, что цифры 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27 (доли, которые Бог впервые отнял от смеси) отражаются также в орбитах небесных тел (согласно пифагорейской системе мира), и начинает звучать знаменитая гармония сфер:



Кстати, о трех «двойных» и трех «тройных» долях с их промежутками и об их связующих членах (три вторых, четыре третьих и девять восьмых) Платон говорит также в диалоге «Тимей»; там он настаивает на том, что «бог сотворил числа и их отношения», поэтому «никто не сможет разрушить их вечную гармонию»[7].

---

[7] Тимей. 43d.

Второй пример. Платон утверждал, что цель его набросков законов для государства состоит в том, чтобы «сделать людей возможно более счастливыми и дружелюбными»[8]. Для этого необходимо устроить все справедливо:

> Надо разделить на двенадцать частей и самый город, и всю страну. Эти двенадцать частей должны быть равноценными, поэтому те участки, где почва хороша, будут меньше, а где плоха — больше. Всех наделов устанавливается пять тысяч сорок... Граждан также надо разделить на двенадцать частей[9].

Но почему числа 12 и 5040 играют такую фундаментальную роль? Платон объясняет:

> Теперь нужно внимательно рассмотреть, какой смысл в этом решенном нами разделении на двенадцать частей. Ведь внутри этих двенадцати частей есть много подразделений, а также других, вытекающих из этих последних как их естественное порождение. Так мы дойдем и до числа пять тысяч сорок[10].

Значит, числа 12 и 5040 подходят из-за того, что их можно разделить множество раз по-разному: $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$, $5040 = 12 \cdot 420 = 12 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. В этом случае справедливость может распространяться даже на самые мелочи:

> При этом не надо бояться упрека в мнимой мелочности, когда будет устанавливаться количество обиходной утвари, и не допускать несоразмерности даже здесь. Следуя общему правилу, надо считать числовое распределение и разнообразие числовых отношений полезным для всего, безразлично, касается ли это отвлеченных чисел или же тех, что обозначают длину, глубину, звуки и движение — прямое,

---

[8] Законы. 743c.

[9] Там же. 745c–d.

[10] Там же. 746d.

> вверх и вниз или же круговое. Законодатель должен все это иметь в виду и предписать всем гражданам по мере их сил не уклоняться от этого установления. Ибо для хозяйства, для государства, наконец, для всех искусств ничто так не важно и никакая наука не имеет такой воспитательной силы, как занятие числами[11].

Мы не будем спорить с Платоном об этих числах и об особенностях его конструкции. В конце концов, сам Платон знает, что реальность нельзя втискивать в числовой корсет. Поэтому он и говорит о том, что реальная жизнь требует отбрасывать некоторые законы. Но начинать необходимо с идеала[12], т. е. с умозрительной конструкции, при которой в теории гарантируется, что «должности и почести распределяются как можно более равномерно»[13] и которая не допускала бы «ни тяжкой бедности среди некоторых граждан, ни, в свою очередь, богатства»[14]. Для конструирования такого идеала очень помогают подходящие числа. Кроме того, важно, что граждане *понимают* их смысл, *видят* роль этих чисел, и для этого, кстати, необходимо, чтобы числами занимались даже люди от природы вялые и невосприимчивые — ведь это пробуждает их и делает вопреки природе «восприимчивыми, памятливыми и проницательными»[15].

---

[11] Законы. 746e–747b.

[12] «Я держусь того мнения, что правильнее всего в каждом наброске будущего не опускать ничего из самого прекрасного и истинного; это будет служить образцом, к которому мы должны стремиться. Если там встретится что-либо неосуществимое, то, конечно, его нужно будет избегать и не стремиться к его выполнению. Но в остальном надо стараться осуществить то, что ближе всего к подобающему и по своей природе более всего ему сродни. Стало быть, надо дать законодателю возможность довести до конца все его намерения. Но затем надо вместе с ним рассмотреть, что из сказанного им полезно, а что слишком резко для законодательства» (Законы. 746b–c).

[13] Там же. 744c.

[14] Там же. 744d.

[15] Законы. 747b.

Третий пример. В «Государстве» (546b–d) находится число, известное под названием «свадебного». В этом фрагменте Платон старается определить подходящие периоды для бракосочетаний и зачатий:

> Для божественного потомства существует кругооборот, охватываемый совершенным числом, а для человеческого есть число, в котором — первом из всех — возведение в квадратные и кубические степени, содержащие три промежутка и четыре предела (уподобление, неуподобление, рост и убыль), делает все соизмеримым и выразимым. Из этих чисел четыре трети, сопряженные с пятеркой, после трех увеличении дадут два гармонических сочетания, одно — равностороннее, то есть взятое сотней столько же раз, а другое — с той же длиной, но продолговатое: иначе говоря, число выразимых диаметров пятерки берется сто раз с вычетом каждый раз единицы, а из невыразимых вычитается по двойке, и они сто раз берутся кубом тройки. Все в целом это число геометрическое, и оно имеет решающее значение для лучшего или худшего качества рождений. Коль это останется невдомек нашим стражам и они не в пору сведут невест с женихами, то не родятся дети с хорошими природными задатками и со счастливой участью[16].

К сожалению, удовлетворительного толкования этого текста пока не существует[17]. Даже само число, которое Платон имел в виду, нам не известно — разные авторы, согласно Бергер[18], предлагают 12 960 000 (Д. Адам), 24 300 (Р. Брамбо), 10 000 (К. Гайзер), а К. Пиковер думает о числе 216, которое обнаруживается «в неясном для истолкования отрывке из "Государстве"»[19]. Правда, в этом тексте имеются детали, которые понятны, рациональны и

---

[16] Государство. 546b–d.

[17] Крайне любопытную историю самых разных толкований этого текста в течение последних столетий см. в работе: Brumbaugh. Plato's Mathematical Imagination. P. 143–150.

[18] Berger. Proportion bei Platon. S. 84–85.

[19] Pickover. Die Mathematik und das Göttliche. S. 67.

интересны с точки зрения математики; это показывает, что Платон использовал настоящие математические рассуждения[20]. Но «математическое содержание представляется поэтически-риторическими языковыми средствами. Вследствие этого оно, с одной стороны, ускользает, так как не сформулировано на обычном научном языке. С другой стороны, оно представляется более многослойным, так как в дополнение к чисто математической релевантности ему приписываются другие значения, хотя мы и должны признать, что их трудно ухватить»[21]. Поэтому неудивительно, что Нейгебауэр говорит о «числовом мистицизме» и «каббалистических правилах»[22], а Жмудь — об «арифмологических спекуляциях», игравших значительную роль не только у пифагорейцев, но и у Платона[23].

Д. Хелвиг[24] указывает на то, что все якобы приводимые Платоном расчеты — это на самом деле речь муз, которая в действительности является *игрой*. Если в ней и кроется какая-то истина, то мы не узнаем ее, в лучшем случае мы сможем только догадаться. Платон использует здесь «софистическую форму беседы», «горгиевскую риторику», которую он сам критикует в диалоге «Евтидем». Таким образом он уходит из диалектического дискурса и представляет числа как магическую силу, способную действовать на людей. Зачем он делает это — трудно сказать. Но ясно, что числовые соотношения интересуют его: уже число 216, которое можно получить из первой половины текста, демонстрирует свойства, связанные с числами 2, 3, 4 и 5:

$$216 = 2^3 \cdot 3^3 = 6^3, \qquad 216 = 3^3 + 4^3 + 5^3.$$

---

20 Платон говорит о «совершенном числе», т. е. он знал о существовании натуральных чисел, равных сумме всех своих делителей (например, 28 имеет делители 1, 2, 4, 7, 14, и их сумма равна 28). См. также: Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 175–176.

21 Berger. Proportion bei Platon. S. 84.

22 Neugebauer. The Exact Sciences in Antiquity. P. 27.

23 Жмудь. Наука, философия и религия в раннем пифагореизме. С. 232.

24 Hellwig. Adikia in Platons «Politeia». Interpretationen zu den Büchern VIII und IX. Amsterdam: B. R. Grüner, 1980.

Также из текста можно получить геометрический ряд чисел, начиная с числа $3^3 = 27$, и с множителем 4/3: 27, 36, 48, 64:

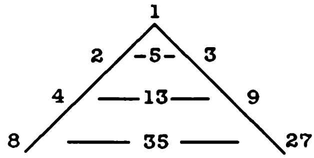
$$27 = \left(\frac{4}{3}\right)^0 \cdot 27\,, \quad 36 = \left(\frac{4}{3}\right)^1 \cdot 27\,, \quad 48 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot 27\,, \quad 64 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot 27\,.$$

Особое толкование дает Я. Фриз[25], который ссылается на текст 545d–e: «Обратимся с мольбой к Музам, чтобы они нам поведали, как впервые вторгся раздор, и вообразим, что они станут отвечать нам высокопарно, на трагический лад и как будто всерьез, на самом же деле это будет с их стороны лишь шутка, и они будут поддразнивать нас, как детей».

Для Фриза текст Платона является загадкой, «шуткой», хотя его тема вполне серьезна. Поэтому нахождение загадочного числа имеет двоякий облик: это головоломка, с одной стороны, и определение «числа геометрического», которое «имеет решающее значение для лучшего или худшего качества рождений» — с другой. А «хорошее качество рождений» — крайне важный аспект хорошего и справедливого государства. И здесь Фриз вспоминает «Законы»: там число 5040, как мы видели, является лучшим средством для учреждения хорошо и справедливо функционирующего государства. Может быть, 5040 — это также «свадебное число»? Любопытно, что это число обладает свойствами, которые хорошо соответствуют частично малопонятным вычислительным инструкциям Платона: его множители ($5040 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$), как пробует подробно доказать Фриз, хорошо соотносятся с текстом Платона, хотя он иногда вынужден подправлять и «адаптировать» текст. Фриз также приводит цитаты из Никомаха, Ямвлиха и Плутарха, которые показывают, что уже древние мыслители мучились с этим текстом, но в которых находятся идеи, которые могут пролить какой-то свет. Плутарх, например, ссылался на диаграмму, которую приписывал Платону:

---

[25] Fries. Platons Zahl, de Republica. 1.8. P. 546. Steph. Eine Vermuthung. Heidelberg: Christian Friedrich Winter, 1823.



Он хвалил число 35 и говорил, что пифагорейцы назвали его «гармонией» из-за того, что оно является суммой чисел 6, 8, 9, 12. Эти числа представляют интервалы греческой октавы: **8 : 6** = 4 : 3 = кварта, **9 : 8** = целый тон, **12 : 9** = 4 : 3 = кварта, а также **12 : 6** = 2 : 1 = октава.

Если мы заметим, что в диаграмме появляются оба ряда из «Тимея» (35b–36b): **2–4–8** и **3–9–27**, которые мы исследовали выше, то мы увидим связь этих двух платоновских текстов. «Гармоническое устройство» необходимо как в устройстве государства, так и в частной жизни. Фриз заканчивает свою попытку толкования утверждением, что Платон никогда не играл числами поверхностно, «применение им чисел имеет глубокое основание в его натурфилософии, несмотря на то что мы их больше не применяем»[26].

Четвертый пример. В нижеследующем тексте Платон рассчитывает, во сколько раз тиран живет хуже хорошего царя, и оказывается, что в 729 раз.

> Значит, тиран будет вести жизнь, совсем лишенную удовольствий, а у царя их будет много. — Да, и это совсем неизбежно. — А знаешь, во сколько раз меньше удовольствий в жизни тирана, чем у царя? — Скажи мне, пожалуйста, ты. — Существуют, как видно, три вида удовольствий: один из них — подлинный, два — ложных. Тиран, избегая закона и разума, перешел в запредельную область ложных удовольствий. Там он и живет, и телохранителями ему служат какие-то рабские удовольствия. Во сколько раз умалились его удовольствия, не так-то легко сказать, разве что вот как… — Как? — После олигархического человека тиран стоит на третьем месте, а

---

26 Fries. Platons Zahl. S. 28.

> посредине между ними будет находиться демократ. — Да. — И сравнительно с подлинным удовольствием у тирана, считая от олигарха, получится уже третье призрачное его подобие, если верно все сказанное нами раньше. — Да, это так. — Между тем человек олигархический и сам-то стоит на третьем месте от человека царственного, если мы будем считать последнего тождественным человеку аристократическому. — Да, на третьем. — Значит, трижды три раза — вот во сколько раз меньше, чем подлинное, удовольствие тирана. — По-видимому. — Значит, это призрачное подобие было бы [квадратной] плоскостью, выражающей размер удовольствия тирана. — Верно. — А если взять вторую и третью степень, станет ясно, каким будет расстояние, отделяющее тирана [от царя]. — По крайней мере ясно тому, кто умеет вычислять. — Если же кто в обратном порядке станет определять, насколько отстоит царь от тирана в смысле подлинности удовольствия, то, доведя умножение до конца, он найдет, что царь живет в семьсот двадцать девять раз приятнее, а тиран во столько же раз тягостнее. — Ты сделал поразительное вычисление! Вот как велика разница между этими двумя людьми, то есть между человеком справедливым и несправедливым, в отношении к удовольствию и страданию. — Однако это число верно и вдобавок оно подходит к [их] жизням, поскольку с ними находятся в соответствии сутки, месяцы и годы. — Да, в соответствии. — Если даже в смысле удовольствия хороший и справедливый человек стоит настолько выше человека подлого и несправедливого, то насколько же выше будет он по благообразию своей жизни, по красоте и добродетели! — Клянусь Зевсом, бесконечно выше[27].

Олаф Жигон подробно истолковал весь текст о страданиях тирана (577с–588а)[28] — за исключением нашего отрывка! О нем он только сказал: «Завершением всего приведенного доказательства является короткая часть, которая выглядит для современного

---

[27] Государство. 587b–588b.

[28] Gigon. Die Unseligkeit des Tyrannen in Platons Staat. S. 129–153.

интерпретатора взбалмошной, так же как и известное место 546b3–d3, — игра чисел, относительно которой мы можем только признать, что не знаем, какое значение она имела для самого Платона»[29]. Другие авторы были менее пессимистичны, они признавали расчеты Платона более или менее ясными, за исключением странных деталей. Почему, например, Платон берет вторую и третью степень? Бергер напоминает нам об античном толковании: «Царь и тиран — трехмерные существа (Arist. Quint. De Mus. III). Поэтому промежуток между ними должен представляться как кубическое число»[30].

Как бы то ни было, ясно, что Платон стремился получить число 729, так как оно есть сумма дней и ночей одного года, и если сказано, что царь живет в 729 раз лучше тирана, это означает, что царь проживает лучше каждый день и каждую ночь в году, — а тиран, соответственно, хуже. Можно что угодно думать о расчетах Платона, но надо признать, что ему удалось представить мораль в форме «рассказа», который нелегко забыть…

Пятый пример. Существует и современная теория, полагающая, что за словами диалогов Платона скрываются числовые соотношения, которые Платон сознательно использовал, дабы придать своим текстам «математическую» структуру, в частности, двенадцатичастную структуру, которая отражает музыкальные взгляды пифагорейцев. Эти структуры обнаруживаются с помощью стехиометрических компьютерных исследований. Как считает Д. Кэннеди[31], это касается как длины диалогов, так и размеров речей в них.

Примеры, подтверждающие первую теорию: в «Апологии» 1200 строк, или 100 × 12. В «Протагоре», «Кратиле», «Филебе» и «Пире» — по 2400 строк в каждом, или 200 × 12. В «Горгии» 3600 строк, или 300 × 12. В «Государстве» 12 000 строк, или 1000 × 12. В «Законах» 14 400 строк, или 1200 × 12.

---

29 Ibid. S. 152.

30 Berger. Proportion bei Platon. S. 71. Примеч. 199.

31 Kennedy. Plato's Forms, Pythagorean Mathematics, and Stichometry. P. 1–31.

Примеры второго утверждения: в «Пире» речи Павсания, Эриксимаха (включая иронизирование над икотой Аристофана) и Аристофана составляют примерно 1/12 от всего диалога каждая. Долгая речь Сократа, включая беседы с Агафоном и Диотимой, занимает 3/12, или 1/4 всего диалога. Речь же Алкивиада — это оставшиеся 2/12 диалога.

Кэннеди резюмирует свои исследования так: «В настоящее время есть несколько видов доказательств того, что диалоги Платона имеют стехиометрическую структуру: продолжительность речей, выстраивание некоторых речей и ключевых понятий в двенадцатичастном порядке, параллельные отрывки и параллельные отрицательные и положительные цепочки рассуждений. Музыкальная интерпретация этих черт является естественной и последовательной: шкала из двенадцати нот с гармоническими и диссонирующими диапазонами лежит в основе поверхностного повествования в диалогах. Доказательство и его интерпретация соответствуют историческому контексту: стехиометрия была обычной практикой и применялась в диалогах Платона, аллегории широко обсуждались, Платон и Академия продвигали новую математику, числовое представление музыкальной гаммы и гармонической теории было хорошо известно, корреспонденты, коллеги и последователи Платона связывали его с пифагореизмом, и неопифагорейцы сделали шкалу из двенадцати регулярно расположенных нот частью своих исследований метафизики, предположительно спрятанной в диалогах»[32].

Это были *примеры* конкретного использования чисел и числовых отношений Платоном. Но до *самого главного* мы пока не добрались. Для этого необходимо обратиться к диалогу «Государство», где Платон обосновывает основополагающую и единственную в своем роде роль чисел — и роль арифметики как науки о числах. Вот каков ход мыслей Платона (все цитаты взяты из: Государство. 525a–526c):

---

[32] Kennedy. Op. cit. P. 26–27.

1) Рассуждение начинается с вопроса: «Кого же иного заставишь ты встать на страже государства, как не тех, кто вполне сведущ в деле наилучшего государственного правления, а вместе с тем имеет и другие достоинства и ведет жизнь более добродетельную, чем ведут государственные деятели? — Никого».

2) Поэтому следует рассмотреть, «*каким образом* получаются такие люди и *с помощью чего* можно вывести их наверх, к свету».

3) Может быть, подойдут «мусическое искусство, и гимнастика, и все остальные искусства»? Нет, они оказываются полезными, но недостаточными.

4) Их недостаточность заключается в том, что они *не подстрекают* разум. «Кое-что в наших восприятиях *не побуждает* наше мышление к дальнейшему исследованию, потому что достаточно определяется самим ощущением». «Если нечто единичное достаточно хорошо постигается само по себе, будь то зрением, будь то каким-либо иным чувством, то не возникает стремления выяснить его сущность».

5) «Но кое-что решительно *требует* такого исследования, поскольку ощущение не дает ничего надежного».

6) Значит, надо искать *другой* предмет обучения: «Если, кроме них, мы уже ничем не располагаем, давай возьмем то, что распространяется на них всех».

7) Подходящим предметом является «*арифметика* и *счет*», т. е. «то общее, чем пользуется любое искусство, а также рассудок и знания; то, что каждый человек должен узнать прежде всего. — Что же это? — Да пустяк: надо различать, что такое один, два и три. В общем я называю это *числом* и *счетом*».

8) Пригодность этих искусств заключается в том, «что как раз они-то и ведут к истине», поскольку относятся «к тому, что ведет человека *к размышлению*, то есть к тому, что мы с тобой ищем».

9) Этот решающий пункт Платон объясняет более подробно. Существуют ощущения, которые, как мы уже сказали, *не*

возбуждают разум: если мы видим, допустим, разные виды пальцев, то они просто разные, и мы удовлетворяемся этим фактом. Но если мы занимаемся *единицей*, ситуация другая. «Если же в нем постоянно обнаруживается какая-то противоположность, так что оно оказывается единицей не более чем ее противоположностью, тогда требуется уже какое-либо суждение: в этом случае душа *вынуждена недоумевать*, искать, будоражить в самой себе мысль и задавать себе вопрос, что же это такое — единица *сама по себе*? Таким-то образом познание этой единицы вело бы и побуждало к созерцанию бытия». «Не меньше это наблюдается и в том случае, когда мы созерцаем *тождественное*: одно и то же мы видим и как единое, и как бесконечное множество».

10) «Раз так бывает с единицей, не то же ли самое и со всяким числом вообще? — Как же иначе?»

11) Это значит, что *арифметика* и *счет* действительно являются теми науками, которые подстрекают разум «и ведут к истине». «Они принадлежат к тем познаниям, которые мы искали. Воину необходимо их усвоить для войскового строя, а философу — для постижения сущности, всякий раз как он вынырнет из области становящегося, иначе ему никогда не стать мыслителем».

12) Заключение таково: «*Эта* наука, Главкон, *подходит* для того, чтобы установить закон и убедить всех, кто собирается занять высшие должности в государстве, *обратиться к искусству счета*».

13) К сожалению, пока «никто не пользуется арифметикой действительно как наукой, увлекающей нас к бытию». Обычно ею занимаются «как попало», «по-торгашески», «ради куплипродажи». Если это так, то спрашивается, как надо заниматься математикой в новом, «философском» смысле.

Последний вопрос является решающим, хотя мы практически ничего не знаем о том, какие средства и методы использовались в Академии для математического обучения, понимаемого в этом новом смысле. В Приложении Г (особенно Г11 и Г12) мы предпринимаем попытку предложить несколько подходящих упражнений, зная, что эта важная область пока почти не исследована.

3.2. Пропорции

Пропорциям отведена в трудах Платона весьма обширная роль, а исследованию этой темы посвящена целая докторская диссертация[33]. Ее автор различает пять областей, в которых Платон использует пропорции: математика, физика, искусство, политика и теория идей, и показывает, «каким образом Платон видит теорию пропорций как часть математики и как он применяет математические пропорции в других областях»[34].

Знакомство Платона с чисто математическими пропорциями доказывает отрывок из «Тимея», в котором говорится:

> Когда из трех чисел... при любом среднем числе первое так относится к среднему, как среднее к последнему, и, соответственно, последнее к среднему как среднее к первому, тогда при перемещении средних чисел на первое и последнее место, а последнего и первого, напротив, на средние места, выяснится, что отношение необходимо остается прежним[35].

То есть пропорция обладает таким свойством, что при соответствующей перестановке ее членов математическое выражение не изменяется:

$$a : b = b : c \iff b : a = c : b.$$

Для Платона это означает, что члены пропорции «образуют между собой единство»[36], и он использует эту идею при объяснении зарождения Вселенной. Дело в следующем: для Творца проблема состояла в соединении несовместимых элементов (огня, земли,

[33] Berger. Proportion bei Platon.

[34] Ibid. S. 61.

[35] Тимей. 31c–32a.

[36] Тимей. 32a.

воды и воздуха) таким образом, чтобы из них возникло унифицированное, устойчивое произведение. Именно это требование и выполняет пропорция, на основании следующего ее качества:

> Однако два члена сами по себе не могут быть хорошо сопряжены без третьего, ибо необходимо, чтобы между одним и другим родилась некая объединяющая их связь. Прекраснейшая же из связей такая, которая в наибольшей степени единит себя и связуемое, и задачу эту наилучшим образом выполняет пропорция[37].

При этом рассматриваемой выше трехчленной пропорции хватило бы, если бы Вселенная была плоскостью, но поскольку она является телом, то возникает необходимость в пропорции с 4 членами: огонь, воздух, вода, земля.

огонь : *воздух* : *вода* = *воздух* : *вода* : *земля.*

Это значит, что отношения между парами этих элементов соответствуют друг другу:

огонь : *воздух* = *воздух* : *вода* = *вода* : *земля.*

Платон заканчивает свое размышление словами:

> На таких основаниях и из таких составных частей числом четыре родилось тело космоса, упорядоченное благодаря пропорции, и благодаря этому в нем возникла дружба, так что разрушить его самотождественность не может никто, кроме лишь того, кто сам его сплотил[38].

Понятно, что Платон использует математическую пропорцию в ограниченном смысле. Так пишет и Бергер: «При описании структуры элементов понятие "среднего пропорционального" лишается

---

37 Там же. 31b.

38 Тимей. 32c. Диоген Лаэртский описывает цель этой конструкции таким образом: «Мир состоит из огня, воды, воздуха, земли; из огня — чтобы быть видимым, из земли — чтобы быть твердым, из воды и воздуха — чтобы быть связным (ибо твердые силы связуются двумя промежуточными, чтобы из Всего возникло Единое), и, наконец, из всех вместе — чтобы быть завершенным и безущербным» (DL. III, 73).

своего количественного аспекта, принятого в математике. Речь идет не об определении размера или числа; количество не имеет значения. На элементы переносится только качественный аспект математического высказывания. Именно такого чисто качественного среднего пропорционального — что математически невозможно — ищет Платон, когда представляет структуру 4 элементов в виде математической модели. Я исключаю вероятность того, что Платон намеревался впоследствии представить с количественной, арифметической точки зрения при расчете круговорота элементов такое качественное соотношение элементов, существование которого предполагается в этом отрезке. Да и как можно было бы определить соотношение двух типов треугольников между собой? Высказывание вида "огонь : вода = 24 треугольника типа А : 24 треугольника типа В" малопоказательно»[39].

Однако можно задать вопрос, не имел ли Платон в виду специальную формулу золотого сечения, а вовсе не любую пропорцию $a : b = b : c$?[40] В этом случае $c = a - b$, и пропорция выглядит как

$$a : b = b : (a - b).$$

В геометрической интерпретации: «Данный отрезок поделен на две части таким образом, что отношение большей части к меньшей равно отношению всего отрезка к его большей части». Или в обычной формулировке, с величинами $a = 1$ и $b = x$:

$$1 : x = x : (1 - x).$$

Из этого следует квадратное уравнение $x^2 + x - 1 = 0$, и отсюда $x = 0{,}618\ldots$ Так что, например, если окно должно быть сделано согласно золотому сечению, то одна его сторона должна составлять 0,618... от другой стороны. Это особое отношение воспринимается не только как красивое и гармоничное и, следовательно, играет значительную роль в искусстве и архитектуре, но и встречается во

---

39 Berger. Proportion bei Platon, S. 144–145.

40 Этот вопрос поставил М. В. Быстров в своем докладе «Знал ли Платон о "золотой пропорции"?» на XXI Всероссийской конференции «Универсум платоновской мысли», проходившей в Санкт-Петербурге 26–27 июня 2013 г.

многих природных явлениях. Математически же интересно следующее: если мы возьмем за исходный отрезок не 1, а x, а за большую часть возьмем $(1 - x)$, то меньшая часть получится равной $x - (1 - x) = 2x - 1$ и пропорция принимает следующий вид:

$$x : (1 - x) = (1 - x) : (2x - 1).$$

Из этого мы опять получаем квадратное уравнение $x^2 + x - 1 = 0$ и $x = 0{,}618\ldots$, т. е. мы вновь имеем золотое сечение, только в уменьшенном масштабе. И это можно повторить сколько угодно раз — перед нами классический пример фрактала. Поэтому, если Платон в своей пропорции имел в виду особую формулу золотого сечения, тогда в ней выражались бы качественные аспекты (такие, как красота, гармония), а не количественные и эти аспекты находились бы в уменьшенном масштабе везде во Вселенной.

Бергер проанализировала большое количество примеров того, как Платон применял пропорции; мы приведем по крайней мере еще один из них, чтобы увидеть, как Платон берет учение о пропорциях из математики и применяет в своих целях. Он говорит в «Горгии», что в некоторых областях существуют некие «неполноценные» виды деятельности, которые при этом претендуют на более высокий статус, и выражает эту мысль в следующем кратком высказывании:

> Чтобы быть покороче, я хочу воспользоваться языком геометрии, и ты, я надеюсь, сможешь за мною уследить: как украшение тела относится к гимнастике, так софистика относится к искусству законодателя, и как поварское дело — к врачеванию, так красноречие — к правосудию[41].

Бергер говорит по этому поводу следующее: «Короткая "формула" с последующим объяснением является стандартным способом рассуждений Платона. Сначала Платон выбирает короткую, резюмирующую формулировку, которая может быть загадочной. Тогда собеседник часто отвечает: "Я не понимаю". За этим выражением непонимания следует подробный комментарий.

---

[41] Горгий. 465b–c.

Дидактическим эффектом такой презентации является двойной "момент осознания". Во-первых, собеседник понял суть дела, а во-вторых, понял "загадочную" короткую формулировку, которую он может удержать в памяти в качестве напоминания»[42].

3.3. Квадрат и диагональ

В «Меноне» есть знаменитая сцена[43], в которой Сократ демонстрирует, что обучение — это припоминание. Задача, которую он ставит перед молодым необразованным рабом, звучит так: дан квадрат со стороной 2 фута и, следовательно, с площадью 4 квадратных фута. Нужно сконструировать квадрат с вдвое большей площадью, т. е. 8 квадратных футов, и вопрос таков: какова сторона этого квадрата?

Сначала раб отвечает, что сторона такого квадрата должна тоже быть в два раза больше, т. е. 4 фута. Сократ показывает, что ответ не подходит: площадь такого квадрата составила бы 16 квадратных футов. Но, может быть, подойдет сторона в 3 фута? Нет, она даст площадь 9 футов, а не 8. Итак, сторона квадрата должна быть меньше чем 3, но сколько? Очевидно, что сторона такого квадрата не может быть целым числом.

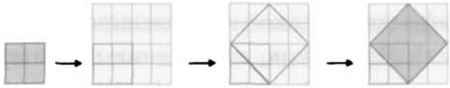
Новая воодушевляющая идея[44] собеседников такова: образовать этот квадрат из диагонали первоначального квадрата следующим образом:

---

[42] Berger. Proportion bei Platon. S. 75.

[43] Менон. 82b–85e.

[44] Можно критически спросить: чья же это идея? По Платону, это припоминает именно раб, у него возникает новая идея. На самом деле это не так. Сократ спрашивает: «Вот эта линия, проведенная из угла в угол, разве она не делит каждый квадрат пополам?» (85a) и таким образом подсказывает рабу главную идею решения задачи. Неудивительно, что Артман пишет: «Подробности платоновской теории обучения как припоминания остаются неясными, так же как и интерпретация эпизода с рабом» (Artmann, Mueller. Plato and Mathematics. P. 9). В Федоне 73a Платон дает дополнительное объяснение: «Когда человека о чем-нибудь



Теперь Сократ утверждает, что он ничему не научил раба — его знания уже содержались в воспоминаниях, и он лишь припомнил их. Таким же образом[45] можно обнаружить и все остальное знание, например знание добродетели:

> Ну, раз мы пришли к согласию насчет того, что неизвестное надо искать, то не хочешь ли попробовать общими усилиями отыскать, что же такое добродетель? — Очень хочу, Сократ[46].

В диалоге «Политик» мы видим использование понятия диагонали в связи с классификацией домашних животных. Когда речь заходит об отделении двуногих от четвероногих, Сократ-

---

спрашивают, он сам может дать правильный ответ на любой вопрос — при условии, что вопрос задан правильно. Между тем, если бы у людей не было знания и верного понимания, они не могли бы отвечать верно». Это значит, что Платон хорошо осознает две стороны медали: важны способности ученика, но важны и действия учителя. Припоминание не работает само по себе, поэтому без Сократа раб никогда не мог бы решить задачу. М. Фреде писал об этом так: «Характерно, что Протагор в одноименном диалоге, описывая традиционную παιδεία в Афинах, говорит (325c–d): "Пока родители живы, они с малолетства учат и вразумляют своих детей и делают это до самой своей смерти. Чуть только ребенок начинает понимать слова, и кормилица, и мать, и наставник, и отец бьются над тем, чтобы он стал как можно лучше". Таким образом, мне представляется, что, если говорить о παιδεία в самом широком смысле, нужно подчеркнуть, что при воспитании ребенка учат тому, что не получается у него самостоятельно, и что возможность обучать ребенка основывается на естественной разумности и способности ребенка к коммуникации» (Frede. Wissen und Bildung in der Antike. S. 173). Ср. также: Законы. 808d — «Без пастуха не могут жить ни овцы, ни другие животные; так и дети не могут обойтись без каких-то руководителей… ребенка гораздо труднее взять в руки, чем любое другое живое существо… Поэтому надо обуздывать его всевозможными средствами…»

45 К. Гайзер исследовал этот путь, особенно метод гипотезы и его роль в математических и философских рассуждениях (Gaiser. Platons Menon und die Akademie. S. 241–292).

46 Менон. 86c.

младший не знает, как это сделать, и спрашивает: «Но каким образом разделить нам эти два рода?» На это чужеземец отвечает: «А таким, как пристало делить тебе и Теэтету, коль скоро вы занимаетесь геометрией». Сократ-младший, конечно же, удивляется: «Каким же именно?» И чужеземец объясняет:

> В соответствии с диагональю и потом — с диагональю диагонали... Разве природа, которую получил в удел наш человеческий род, стоит в ином отношении к ходьбе, чем диагональ, равная квадратному корню из двух?.. Между тем природа всего остального рода по своему свойству есть не что иное, как диагональ нового квадрата, построенного на стороне в два фута[47].

Толкователи немало потрудились над этим текстом. Гайзер ограничился примечанием: «В *Политике* (266а) мы читаем, что при диайрезе [пошаговом ограничении] идей по образцу соотношения стороны и диагонали должно быть построено определенное сечение»[48], а Фаулер в своем большом труде «The Mathematics of Plato's Academy» даже не упоминает этот отрывок. М. Браун уделил этому тексту целую статью, но в выводе лишь констатирует, что «важно то, что в *Политике* 266ab имеется в виду удвоение куба»[49].

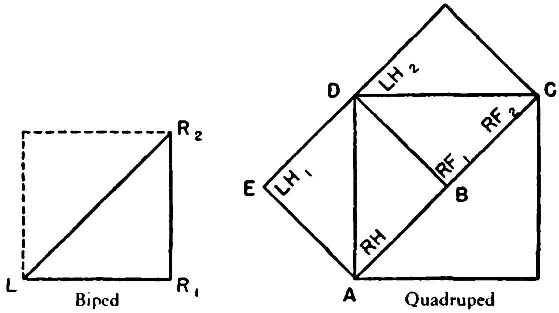
---

47 Политик. 266а. Ср. с переводом Р. В. Светлова: «Конечно, не входит. Но каким же образом мы разделим эти два рода? — Именно тем, который положен тебе и Теэтету, коль скоро вы связаны с геометрией. — И это каким же? — Быть может, диагональю и после того — диагональю диагонали. — Что ты имеешь в виду? — Неужели природа, которая досталась нашему человеческому роду, относится к способности ходить иначе, чем диагональ квадрата со стороной в один фут, равная квадратному корню из двух футов? — Никак иначе. — И, опять, не станут ли тогда оставшиеся роды — с точки зрения квадратного корня — диагональю квадрата нашего корня, если он получит природу удвоенных двух футов».

48 Gaiser. Platons Menon und die Akademie. S. 263. Примеч. 38.

49 Brown. Plato on Doubling the Cube. P. 55. Броун знает, что возникнет вопрос: «Разве то, что текст в *Политике* 266 отсылает к "диагонали", не указывает однозначно, что речь идет о квадрате на плоскости?» Но он отвечает: «Нет, есть основания утверждать, что это еще в большей степени указывает на 3-х мерный многогранник» (Ibid. P. 46).

Только у Брамбо, Бернета[50] и Светлова я нашел толкование, в котором этот текст понимается буквально; Брамбо предлагает следующую зарисовку:



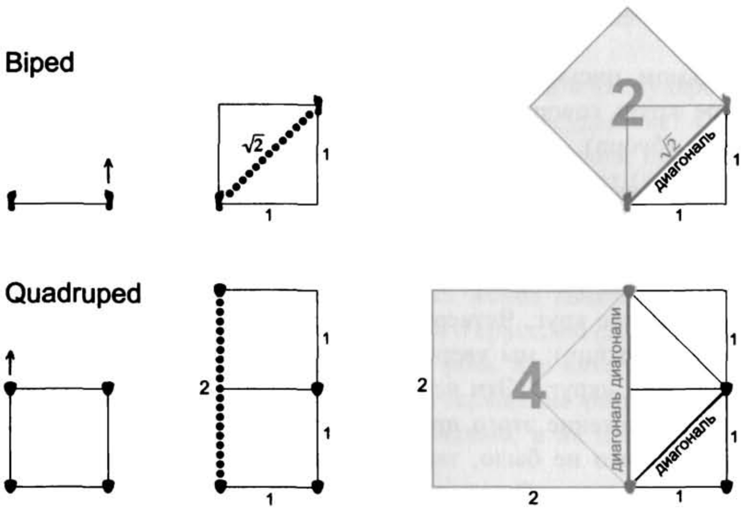
Более подробно ситуацию можно описать так (см. рисунок на следующей странице):

Biped (ходящий на двух ногах) делает один шаг (1 фут) вперед, и получается диагональ квадрата длиной √2, которая является стороной нового квадрата с площадью, равной **2** (~ Biped);

Quadruped (ходящий на четырех ногах) тоже делает один шаг вперед, и получается отрезок длиной, равной 2, который служит диагональю предыдущего квадрата, т. е. действительно, «диагональю диагонали», как пишет Платон, и эта «диагональ диагонали» является стороной еще одного квадрата с площадью, равной **4** (~ Quadruped):

---

[50] Математическую шутку, связанную со спецификой разницы между человеком и свиньей, следует понимать следующим образом: «Природа человека в том, чтобы идти с помощью двух ног, и это остроумно представлено в виде диагонали квадрата со стороной 1, то есть отрезка, чей квадрат/мощность составляет 2 фута (*δυνάμει δίπους*, √2 футов); свинья же, в противоположность этому, ходит с помощью четырех ног, и отрезок, чей квадрат/мощность составляет 4 фута (√4 футов), является диагональю (квадрата построенного на) первой диагонали или, как ее еще описывают (266b5–6), *диагональю нашего δύναμις*» (Burnyeat. The Philosophical Sense of Theaetetus' Mathematics. P. 496).



Получается, что *платоновская иллюстрация* математически верна и в то же время наглядно иллюстрирует мысль, что «наш человеческий род получил равный удел и шагает в ногу с родом из всех существующих самым благородным...»[51]. Но этот вывод очевидно имеет нежелательный и даже смешной оттенок, поэтому в дальнейшем чужеземец ищет другой путь деления. То есть Платон употребляет эту математическую иллюстрацию частично «несерьезно», «шутливо», — и сам это констатирует: «Не усмотрим ли мы и чего-то очень смешного, случившегося с нами при этом делении, — словно мы заправские шуты?»[52]

---

51 Политик. 266c.

52 Политик. 266c. Этот «шутливый» аспект не ускользнул от внимания толкователей. Например: «Таким образом весь этот отрывок из *"Политика"* предстает в шуточном тоне и в нем открыто подмечается его пригодность для комедии» (Brown. Plato on Doubling the Cube. P. 45). Сам Брамбо обсуждал этот текст Платона в разделе «Математические шутки» (см.: Brumbaugh. Plato's Mathematical Imagination. P. 249–259). А вот что заметил Шлейермахер в введении к своему переводу «Политика»: «В повторной похвале этого способа разделения — что он не заботится о больших и

3.4. Круг и шар

В «Седьмом письме» есть знаменитый отрывок, где Платон на примере круга говорит о пяти ступенях осознания[53]. Изначально есть имя (ὄνομα): «круг», «циркуль» и т. д. Затем следует объяснение (λόγος) того, что подразумевается под этим именем: «то, что от центра всюду равномерно удаленное». Третье — это чувственно воспринимаемое, и при этом всегда несовершенное отображение (εἴδωλον) круга, например, нарисованный на бумаге или выдолбленный в камне круг. Четвертая ступень — это субъективная уверенность (ἐπιστήμη): мы уверены, что поняли, что подразумевается под понятием «круг». Эти четыре ступени «всегда могут дать нам только отображение этого предмета, этой этической ценности или чем бы еще это не было, так как они всегда остаются в области человеческой речи. Пятая ступень — "вещь в себе" — благо, красота, справедливость "в себе" — недоступны "слабости логоса", и благоразумный человек не осмелится доверить их человеческому языку... Поэтому чисто дискурсивный метод логоса должен быть дополнен средствами из других сфер, если мы хотим ухватить истину "саму по себе". Чтобы вещь поистине раскрылась, нужна также "родственная" душа для диалектической беседы, в ходе которой понимание спонтанно засверкает в каждом собеседнике. Это, конечно, происходит безмолвно, и разумный человек, который знает, что истина лежит в душе, а не в словах, поостережется писать об этом и предоставлять свое познание чванливому суду нефилософской массы»[54].

В только что обсужденном примере понятие круга само по себе не играет никакой роли — он мог бы быть заменен на любое другое

малых — наряду с верным есть и нечто шутливое; если нет, то Платон был бы справедливо наказан известной плохой шуткой Диогена с ощипанным петухом, которая однозначно отсылает к одной из сделанных Платоном классификаций».

[53] VII Письмо. 342a–344a.

[54] Dönt. Platons Spätphilosophie und die Akademie. S. 25–26.

наглядное и достаточно ясное понятие. В следующих примерах, однако, сама форма круга является важной.

Как можно гарантировать, спрашивает Платон в «Государстве», постоянное функционирование справедливого государства? Ответ: подходящим воспитанием тех, кто принимает решения. Если было положено хорошее начало, то из него возникает движение, замкнутое на себя, как круг, движение, которое, так сказать, раскручивает само себя подобно колесу. При этом после каждого оборота государство оказывается на все более высокой ступени, поэтому правильнее было бы говорить не о круге, а о *спирали*[55].

Круговое движение играет важную роль и в акте познания: с помощью наших глаз мы познаем круговращение разума во Вселенной и можем перенести его, хотя, видимо, и не полностью, на наши мыслительные процессы:

> Как бы то ни было, нам следует считать, что причина, по которой бог изобрел и даровал нам зрение, именно эта: чтобы мы, наблюдая круговращения ума в небе, извлекли пользу для круговращения нашего мышления, которое сродни тем, небесным, хотя в отличие от их невозмутимости оно подвержено возмущению[56].

Круговращение, следовательно, является признаком «здорового» состояния. Так же и душа, живущая на «небе», совершает кругообразные движения. Когда же она воплощается в земном теле, многочисленные сильные ощущения «стали воздействовать на круговращения души и мощно их сотрясать»[57] — «все же пошли вкривь и вкось, всемерно нарушая круговое движение»[58]. Но с

---

55 Государство. 424a: «Да и в самом деле, стоит только дать первый толчок государственному устройству, и оно двинется вперед само, набирая силы, словно колесо. Ведь правильное воспитание и обучение пробуждают в человеке хорошие природные задатки, а у кого они уже были, благодаря такому воспитанию они становятся еще лучше».

56 Тимей. 47b.

57 Там же. 43c.

58 Там же. 43d.

возрастом бурные воздействия становятся слабее, и круговые движения души снова занимают свое законное место. «Если же к этому добавится правильное воспитание, он [человек. — *В. З.*] будет цел, невредим и здоров, избегнув наихудшего из недугов; а если он проявит нерадивость, то, идя по своей жизненной стезе, он будет хромать и сойдет обратно в Аид несовершенным и неразумным»[59].

Помимо круга, Платон также говорит в своих рассуждениях о *шаре*. Вселенная, например, хоть и состоит из частей, представляет собой сплоченное целое, и это очень важно: только так она может сопротивляться разъединяющим ее силам. В то же время Вселенной необходимо принимать определенный вид — но какой? Только самый совершенный, и это — шар, который замкнут сам на себя, и в котором каждая точка равноудалена от центра. Платон пишет:

> Очертания же он [устроитель] сообщил Вселенной такие, какие были бы для нее пристойны и ей сродны. В самом деле, живому существу, которое должно содержать в себе все живые существа, подобают такие очертания, которые содержат в себе все другие. Итак, он путем вращения округлил космос до состояния сферы, поверхность которой повсюду равно отстоит от центра, то есть сообщил Вселенной очертания, из всех очертаний наиболее совершенные и подобные самим себе[60].

Шар был образцовой формой и при создании человеческой головы. Таким образом, голова является отражением Вселенной[61] и, соответственно, господствующей, божественной частью человеческого тела, в то время как остальные его части должны охранять голову от бесцельного «перекатывания» по поверхности земли:

---

[59] Там же. 44b.

[60] Тимей. 33b.

[61] Также Земля является шарообразной — она есть, так сказать, «надутый додекаэдр»: «Итак, друг, рассказывают прежде всего, что та Земля, если взглянуть на нее сверху, похожа на мяч, сшитый из двенадцати кусков кожи» (Федон. 110b).

> Итак, боги, подражая очертаниям Вселенной, со всех сторон округлой, включили оба божественных круговращения в сферовидное тело, то самое, которое мы ныне именуем головой и которое являет собою божественнейшую нашу часть, владычествующую над остальными частями. Ей в помощь они придали все устроенное ими же тело, позаботившись, чтобы оно было причастно всем движениям, сколько их ни есть; так вот, чтобы голова не катилась по земле, всюду покрытой буграми и ямами, затрудняясь, как тут перескочить, а там выбраться, они даровали ей эту вездеходную колесницу[62].

3.5. Нормальное распределение

В следующем небольшом тексте у Платона появляется первое представление о статистических явлениях. Сократ разъясняет, что из отдельных фактов, не находящихся в причинно-следственной связи, нельзя выводить общий закон; говоря конкретно, недопустимо из нескольких отдельных опытов взаимодействия с плохими людьми делать вывод, что все люди плохи.

> Но разве это не срам? — продолжал Сократ. — Разве не ясно, что мы приступаем к людям, не владея искусством их распознавать? Ведь кто владеет этим искусством по-настоящему, тот рассудит, что и очень хороших и очень плохих людей немного, а посредственных — без числа. — Как это? — спросил я. — Так же точно, как очень маленьких и очень больших. Что встретишь реже, чем очень большого или очень маленького человека, или собаку и так далее? Или что-нибудь очень быстрое, или медленное, безобразное, или прекрасное, белое или черное? Разве ты не замечал, что во всех таких случаях крайности редки и немногочисленны, зато середина заполнена в изобилии?[63]

---

[62] Тимей. 44d.

[63] Федон. 89d–90a.

Такие явления были впоследствии подвергнуты Гауссом точному математическому описанию. Известная Гауссова кривая распределения точно выражает то, что уже Платон наблюдал и описал:

3.6. Платоновы тела

В диалоге «Тимей» есть знаменитое место, в котором Платон описывает правильные многогранники[64] и использует их затем для объяснения элементов[65]. Платон исходит из констатации, что огонь, земля, вода и воздух — это тела, и, следовательно, ограничены некоторыми поверхностями. А всякая прямолинейная поверхность состоит из треугольников, и все треугольники можно привести к двум формам: равнобедренным прямоугольным треугольникам и неравнобедренным прямоугольным треугольникам. Все треугольники первого вида имеют одну форму, второго — бесконечное множество форм. Интересно при этом, что Платон

---

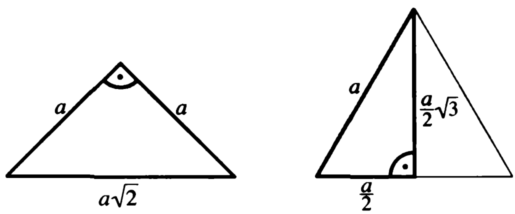
[64] Правильные многогранники называются еще и «платоновыми телами», так как Платон описывал и использовал их в «Тимее». Многогранник является правильным, если: 1) он выпуклый; 2) каждая его грань — правильный многоугольник; 3) все грани конгруэнтны; 4) в каждой его вершине сходится одинаковое число ребер. История и теория правильных многогранников, их употребления Платоном и их роли в современной топологии изложены в работе: Richeson. Euler's Gem — The Polyhedron Formula and the Birth of Topology.

[65] Тимей. 53–55. Эта тема подробно обсуждается в книге: Sachs. Die fünf platonischen Körper.

выбирает из них подходящую для его целей форму по критерию «красоты»[66]:

> Нам же представляется, что между множеством треугольников есть один, прекраснейший, ради которого мы оставим все прочие, а именно тот, который в соединении с подобным ему образует третий треугольник — равносторонний[67].

Таким образом, мы получаем два прямоугольных треугольника (которые будут лежать в основе следующей конструкции элементов), «один из них равнобедренный, а другой таков, что в нем квадрат большой стороны в три раза больше квадрата меньшей», т. е. равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами a и a, и прямоугольный треугольник с катетами $\frac{a}{2}$ и $\frac{a}{2}\sqrt{3}$:



Теперь следующая задача состоит в том, чтобы указать,

> каковы же те четыре рожденных тела, прекраснейшие из всех, которые не подобны друг другу, однако способны, разрушаясь, друг в друга перерождаться. Если нам удастся попасть в точку, у нас в руках будет истина о рождении земли и огня, а равно и тех [стихий], что стоят между ними как средние члены пропорции. Тогда мы никому не уступили бы в том, что нет видимых тел более прекрасных, чем эти, притом каждое из них прекрасно в своем роде. Поэтому надо

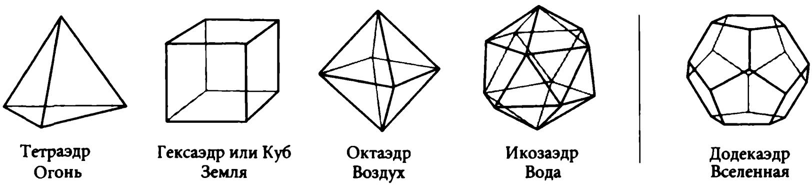
---

66 В современной математике этот критерий также играет немаловажную роль. Французский математик Жак Адамар, например, считал чувство красоты почти единственным инстинктом, пригодным для совершения открытий в математике, а для теоретика чисел Г. Ч. Харди красота являлась критерием ее правильности.

67 Тимей. 54а.

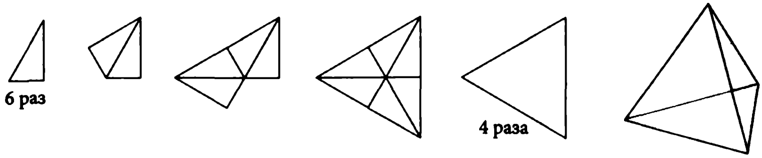
> приложить старания к тому, чтобы привести в соответствие четыре отличающихся красотой рода тел и доказать, что мы достаточно уразумели их природу[68].

Следующие платоновы тела строятся путем неоднократного соединения этих двух видов треугольников:



Платон подробно описывает все эти конструкции; ограничимся здесь примером построения тетраэдра:

> Его первоначало — треугольник, у которого гипотенуза вдвое длиннее меньшего катета. Если такие треугольники сложить, совмещая их гипотенузы, и повторить такое действие трижды, притом так, чтобы меньшие катеты и гипотенузы сошлись в одной точке как в своем центре, то из шестикратного числа треугольников будет рожден один, и он будет равносторонним. Когда же четыре равносторонних треугольника окажутся соединенными в три двугранных угла, они образуют один объемный угол, а именно такой, который занимает место вслед за самым тупым из плоских углов. Завершив построение четырех таких углов, мы получаем первый объемный вид, имеющий свойство делить всю описанную около него сферу на равные и подобные части[69].



---

[68] Тимей. 53d.

[69] Тимей. 54d–55a.

В дальнейшем Платон объясняет свойства элементов на основе этих конструкций. Возьмем снова для примера тетраэдр:

> Посмотрим, почему это об огне говорят, что он горяч? На этот вопрос мы должны ответить, приняв во внимание режущее и разлагающее воздействие его на наши тела. Едва ли не все согласятся, что ощущение от огня — пронзительное; при этом нам следует вспомнить о тонкости его граней и остроте его углов, затем о малости его частиц и о быстроте их бега, ибо все эти свойства таковы, что сообщают огню напор и проворство, и потому ничто не может противостоять его режущей силе. Достаточно вспомнить и принять его в расчет его очертания и то, как они были рождены, чтобы уразуметь: эта природа, как никакая другая, способна проницать наши тела, тончайшим образом расщеплять их и доставлять тому, что мы соответственно зовем теплом, и его свойства и его имя[70].

Применяя теорию первых четырех правильных многогранников, Платон преследовал важную для себя цель. Он опровергал теорию Демокрита по трем пунктам:

1. Элементы — это не комбинация различных атомов, а очень сложные связи.
2. Демокрит не разобрался в состояниях элементов, и его элементы не могут превращаться друг в друга.
3. Согласно Демокриту, истинное познание невозможно, есть только относительная правда органов чувств[71].

---

[70] Тимей. 61d–62a.

[71] Нужно признать Платоновскую критику мировоззрения Демокрита «как объективно оправданную. В то же время из нее с ясностью выводится собственное положительное достижение Платона. Именно он дает завершение теории элементов ионийской натурфилософии, отделяя материю от формы с большей понятийной ясностью. Этим разделением он приходит к тому, что уже лежало в основе первых материалистических теорий ионийцев как предчувствие: Платон понимает элементы как формы проявления, как агрегатные состояния единственного, неизменного и бескачественного

В то же время Платон выстраивает свою собственную теорию рационалистического строения мира и духа. Он назвал те (прямоугольные) треугольники «принципами» (стойхея) огня и других элементов и объяснил, почему он берет правильные многогранники как формы элементов: они могут превращаться один в другой.

> Теперь дóлжно сказать, каковы же те четыре рожденных тела, прекраснейшие из всех, которые не подобны друг другу, однако способны, разрушаясь, друг в друга перерождаться[72].

Аристотель критиковал эту теорию. Ему казалось, что геометрические формы, используемые Платоном, так же как и числа, используемые пифагорейцами, не пригодны для построения космоса, так как «если каждая из двух частей не имеет никакой тяжести, то невозможно, чтобы обе вместе имели тяжесть... А что точка действительно не может иметь тяжести — очевидно... Кроме того, абсурдно, что плоскости могут слагаться только по линии... но если может слагаться, по всей поверхности, то в результате такого сложения плоскостей получится тело, которое не будет ни элементом, ни состоящим из элементов. Кроме того, если различие в тяжести между телами зависит от числа плоскостей, как определено в "Тимее", то ясно, что и линия и точка будут иметь тяжесть»[73], что, по мнению Аристотеля, абсурдно.

основания — материи. Это большое достижение Платона, которое относится к истории физики. Он, пожалуй, осознавал важность этого шага и недвусмысленно приписывал себе приоритет этой идеи (Тимей. 48b). Тот, кто ставит этот приоритет под сомнение, должен знать, что он несправедлив по отношению к Платону» (Sachs. Die fünf platonischen Körper. S. 206).

72 Тимей. 53d.

73 Аристотель. О небе. III. 1. 299a25–300a1. Д. Ричсон говорит об историческом расхождении во взглядах: «Представляет ли собой многогранник твердое тело или он полый? В некоторых определениях утверждается, что многогранники являются твердыми, трехмерными объектами, в то время как другие требуют, чтобы они были полыми и состоящими из двумерных плоскостей, составляющих их "кожу". Тот, кто принимает первое определение, построил бы многогранник из глины, в то время как согласный со вторым сделал бы его из бумаги. Когда представление о многогранниках

Аристотель прав в том, что нелегко объяснить возникновение материальных тел из чисто математических форм, хотя в 5-й главе мы приведем мнение квантового физика Вернера Хайзенберга о том, что эта теория Платона оказалась особенно плодотворной в физике. Сам Платон, конечно, видел эту сложность, но нашел очень интересный выход. Как подробно обясняет Штенцель[74], Платон хотел создать упорядоченную систему границ, определяющих, где и когда можно и должно переходить из одной сферы в другую, особенно из области чувственного в область бестелесного и наоборот. И математика, с ее положением между чувственным миром и миром идей, отлично подходит на роль подобной «границы». Говоря конкретно, Платон исходил из мысленного преодоления проблемы континуума: как можно представить себе, что точка продуцирует линию? Ведь из самих точек никогда не получится отрезок, и представление о движении точки не поможет, поскольку в непрерывности движения кроется та же самая поблема растяжения. Выход, который нашел Платон, таков: линия не является бесконечно делимой, существует минимальная — конечно, очень маленькая — линия, далее не делимая[75]. Эти «элементарные» линии представляют собой «границы», и в то же время «переходы», например, от покоя к движению и наоборот, или от маленького к большому и наоборот, при этом сами они не являются ни тем ни

только появилось, бытовало мнение, что они твердые. Действительно, на протяжении многих веков многогранники именовались "твердыми телами". Позже, когда теория многогранников перешла в топологию, появилось предположение об их пустотности. Это предположение привело к тому, что теоремы о многогранниках были обобщены с теоремами о сферах и торусах, которые являются полыми по определению» (Richeson. Euler's Gem. P. 30). Платон был бы согласен с первым определением — или, может быть, со вторым, если признать, что у этой «кожи» есть хоть какая-то, пусть самая маленькая, толщина.

74 Stenzel. Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles. S. 77–83: «Platons Lehre von den unteilbaren Linien als Versuch einer Theorie des Kontinuums».

75 Мы уже упоминали, что это представление обсуждается также современными физиками. См., напр.: Jonath. Quantik. Wiedererwägungen zu Zahl und Zeit.

другим, но чем-то посередине (см.: Парменид. 156). На этом основании можно рассматривать чисто математические треугольники — и чисто математические платоновы тела, созданные из них — как «границы» и «переходы» между чувственным и умопостигаемым мирами.

Остается один вопрос: Платон выбирает два треугольника в качестве основания своей конструкции, потому что они «прекраснейшие». Что он имеет в виду? Сам он этого не объясняет, только замечает, что «обосновывать это было бы слишком долго», хотя это и важно, поэтому он «объявляет конкурс» на еще более подходящие формы: «Если кто-нибудь выберет и назовет нечто еще более прекрасное... мы подчинимся ему не как неприятелю, но как другу»[76]. Но, по мнению Артмана[77], обосновать выбор Платона совсем не сложно. Эти два треугольника являются самыми прекрасными потому, что в них заложена простая пропорция[78], которая соединяет первые четыре платоновы тела[79]. «Прекраснейшая связь», по мнению Платона, это пропорция $a : b = b : c$. И мы находим такую пропорцию в конструкциях с этими двумя видами треугольников:

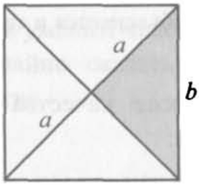
---

[76] Тимей. 53d.

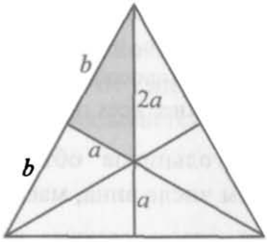
[77] Artmann, Schäfer. On Plato's «Fairest Triangles». P. 255–264.

[78] Тимей. 53d: «...земли и огня, а равно и тех [стихий], что стоят между ними как средние члены пропорции...»

[79] Тимей. 31b–32a: «Однако два члена сами по себе не могут быть хорошо сопряжены без третьего, ибо необходимо, чтобы между одним и другим родилась некая объединяющая их связь. Прекраснейшая же из связей такая, которая в наибольшей степени единит себя и связуемое, и задачу эту наилучшим образом выполняет пропорция, ибо, когда из трех чисел — как кубических, так и квадратных — при любом среднем числе первое так относится к среднему, как среднее к последнему, и соответственно последнее к среднему, как среднее к первому, тогда при перемещении средних чисел на первое и последнее место, а последнего и первого, напротив, на средние места выяснится, что отношение необходимо остается прежним, а коль скоро это так, значит, все эти числа образуют между собой единство».



$a : b = b : 2a$



$a : b = b : 3a$

Это означает, что все вещи во Вселенной связаны с помощью простейших чисел 1, 2 и 3. (Дополнительно можно отметить, что в этих треугольниках также и углы представляют простую пропорцию 30° : 60° : 90° = 1 : 2 : 3). Такая гармоничная простота — это красота.

3.7. Вино, масло, мед и счет

Платон временами хотел немного отдохнуть от утомительных «исследований о вечно существующем» и с удовольствием[80] применял свою «теорию треугольников» к физическим, физиологическим и психологическим явлениям. Так, он объясняет мягкость и твердость предметов следующим образом:

> Твердым зовется то, что заставляет податься нашу плоть, мягким — то, что под воздействием последней подается само; и вообще названия эти употребляются соотносительно. Но податливо все то, что имеет малые основания; напротив,

---

[80] «Тот, кто отдыха ради отложит на время беседу о непреходящих вещах ради этого безобидного удовольствия — рассматривать по законам правдоподобия происхождение [вещей], обретет в этом скромную и разумную забаву на всю жизнь» (Тимей. 59c–d). Такие замечания являются типичными для Платона. Д. Хелвиг пишет: «Платоническая философия игрива, так как она не претендует на совершенство, но знает, что благодаря своей условности она есть только отражение истины, и поэтому она готова быть поставленной под сомнение и уступить более убедительным λόγοι» (Hellwig. Adikia in Platons «Politeia». S. 80).

> вид [тела], покоящегося на квадратных основаниях и потому особо устойчивого, оказывается самым неподатливым, причем его высокая способность к отпору объясняется и тем, что как раз он плотнее всех прочих[81].

Теория треугольников объясняет также качества различных жидкостей, в том числе вина, масла и меда:

> Но самые многочисленные виды вод, смешиваясь друг с другом, сочатся в произращенных землей растениях, и оттого их род получил имя соков. Поскольку же от смешений вышло большое многообразие, то большинство родов осталось без особого названия; однако четыре вида, таящие в себе огонь, получили, как особенно примечательные, свои имена. Первый из них имеет свойство разогревать душу и вместе с ней тело: он наречен вином. Второй – гладкий и вызывает рассеивание зрительного огня, а потому явлен глазу прозрачным, блестящим и лоснящимся, это вид подобных елею масел; к нему относятся смола, касторовое масло, а также сам елей и то, что имеет его свойства. Третий обладает способностью расширять суженные поры рта до их естественного состояния, вызывая этим ощущение сладости: он получил родовое наименование меда[82].

Однажды Сократ ради забавы доказывал известному мудрецу Гиппию заведомо ложное утверждение, обращаясь при этом за помощью к арифметике. Гиппий утверждал, что не может быть так, что «один и тот же человек был и правдив и лжив»[83]. Тогда Сократ аргументирует следующим образом: Гиппий очень умен, а также весьма опытен в искусстве счета. Он может мгновенно подсчитать, сколько будет трижды семьсот, и не ошибиться: трижды семьсот – это две тысячи сто. В этом Гиппий оказывается «правдивым». Но тот же Гиппий может, если захочет, дать и неправильный ответ: «трижды семьсот — это две тысячи двести». И так как он точно

---

[81] Тимей. 62b.

[82] Тимей. 59e–60b.

[83] Гиппий Меньший. 365c.

знает, что его ответ неправилен, то его ложь — это самая настоящая стопроцентная ложь. Значит, Гиппий также очень умелый лжец (ведь не столь умелый человек, в отличие от Гиппия, желая солгать, мог бы случайно сказать правду!) Оказывается, что Гиппий и правдив, и лжив.

3.8. Вспомогательные примеры

Платон часто использовал примеры из различных областей жизни либо для иллюстрации своих философских соображений, либо как образец правильного мышления. Среди таких примеров — применение сверла и челнока[84], окрашивание предмета[85], отпечаток на воске[86], методы продаж бессовестных торговцев[87]. Такие небольшие вспомогательные примеры Платон берет и из математики, разумеется, в ограниченном смысле; в «Теэтете», например, речь идет о восприятии и возможности ошибочных и правильных представлений, а в качестве примера используются правильные и ошибочные расчеты[88], но апелляция к числам здесь не является строго необходимой, ход мысли мог бы выразиться и по-другому. То же

---

[84] Кратил. 388a. Употребление: «Выходит, имя есть некое орудие обучения и распределения сущностей, как, скажем, челнок — орудие распределения нити» (388b).

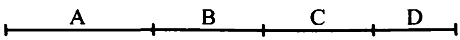
[85] Лисид. 217c. Употребление: «Значит, и то, что ни плохо ни хорошо, иногда от присоединения плохого не становится плохим до поры до времени, а бывает, что и становится» (217e).

[86] Теэтет. 194c. Употребление: «Если в чьей-то душе воск глубок, обилен, гладок и достаточно размят, то проникающее сюда через ощущения отпечатывается в этом… сердце души… и возникающие у таких людей знаки бывают чистыми, довольно глубокими и тем самым долговечными…» (194c).

[87] Протагор. 313d. Употребление: «Так вот, если ты знаешь, что здесь полезно, а что — нет, тогда тебе не опасно приобретать знания и у Протагора, и у кого бы то ни было другого; если же нет, то смотри, друг мой, как бы не проиграть самого для тебя дорогого» (313e–314a).

[88] Теэтет. 195e–196b; см. также: Гиппий Больший. 302a–303b.

самое происходит с вопросом об отношении целого к его частям[89]. В знаменитой притче о линии Платон объясняет разницу мира умопостигаемого и мира видимого с помощью линии, разделенной на два неравных отрезка[90], но, опять же, сама геометрия играет в ней незначительную роль. Можно, конечно, вывести из пропорции, которую приводит Платон, что средние части B и C равны:



$$(A+B) : (C+D) = A : B = C : D$$

$$\text{I} \quad \frac{A}{B} = \frac{A+B}{C+D}$$

$$\text{II} \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \rightarrow A = \frac{BC}{D}$$

$$\rightarrow \text{I}' \quad \frac{BC}{BD} = \frac{\frac{BC}{D} + B}{C+D} \rightarrow \frac{C}{D} = \frac{B(C+D)}{D(C+D)} \rightarrow B = C$$

Но мы не знаем, имел ли этот факт какое-то значение для Платона. Можно только сказать, что Платон использовал *математические* примеры осознанно и довольно часто, и это показывает, что он — по крайней мере во второй половине жизни — непрерывно занимался математикой и постоянно обнаруживал какие-то взаимоотношения между математикой и философией.

3.9. Идеальные числа

Об «идеальных числах» (ἰδεῶν ἀριθμός или εἰδητικός ἀριθμός) Платон высказался только в конце жизни в неких особенных лекциях, не дошедших до нас (по мнению Чернисса, они попросту были выдуманы![91]) Поэтому мы знаем о них очень мало. Наши источники: одно указание Аристотеля[92], намеки в «Филебе»[93], в

---

89 Теэтет. 198a–c.

90 Государство. 509d–511e.

91 Cherniss. The Riddle of the Early Academy.

92 Аристотель. Метафизика. XIII. 4, 1078 b.

93 Филеб. 15a–b; 16c–e; 56e.

«Государстве»[94] и в «Законах»[95], и фрагменты из лекции Платона Περὶ Τἀγαθοῦ, которые были открыты лишь в 1941 г.[96] Об идеальных числах можно сказать приблизительно следующее:

Движения небесных тел, их положение по отношению друг к другу, последовательность дней и лет — все это не является неизменным, вечным и постоянным. Неизменны только идеи, лежащие в основе чудесного устройства неба. Они должны находиться в какой-то связи, для того чтобы способствовать единому целому.

Платон описывал эту связь идей между собой, понимая идеи как числа[97], однако числа более высокого уровня, чем математические. «Идеальные числа, согласно Платону, нельзя сложить; в чем-то они подобны идеям отдельных чисел; например, идеальное число четыре — это идея для всех четверок, которые встречаются при вычислении и подсчете у людей. Но это описание тоже не совсем правильно. Эти идеальные числа являются смешением пифагорейских[98] и платоновских теорий, которые почти не присутствуют в известных нам диалогах Платона; скорее всего, Платон развивал эту теорию только в пожилом возрасте, и наших знаний о ней крайне недостаточно»[99].

---

94 Государство. 529c–e.

95 Законы. 967.

96 См.: Beth. The Foundations of Mathematics. P. 28. Примеч. 49.

97 «Теперь совокупность идей, довольно смело редуцированная, интерпретируется как числовая определенность в пределах от Одного до Бесконечности» (Dönt. Platons Spätphilosophie und die Akademie. S. 43).

98 Аристотель свидетельствует о том, что уже пифагорейцы соединяли числа и высшие идеи: они «усматривали… много сходного с тем, что существует и возникает, — больше, чем в огне, земле и воде (например, такое-то свойство чисел есть справедливость, а такое-то — душа и ум, другое — удача…); так как, далее, они видели, что выразимы в числах; так как, следовательно, им казалось, что все остальное по своей природе явно уподобляемо числам и что числа — первое во всей природе, то они предположили, что элементы чисел суть элементы всего существующего и что все небо есть гармония и число» (Аристотель. Метафизика. I. 5. 985b).

99 Kirchmann. Die Metaphysik des Aristoteles. Примеч. 54 к книге I. 6.

Согласно П. Наторпу[100], Платон в последней фазе своего развития почувствовал необходимость как-то обосновать не только разнообразие явлений, но и разнообразие идей. Ясно при этом, «что под идеей как числом подразумевалась не конкретная *субстанция*, а формальный *закон*. Субстанцию сделал из нее только Аристотель, в русле его общего превратного толкования теории идей»[101]. Идеальные числа можно понимать как обобщения чисел в качественно расширенном смысле[102].

---

[100] Natorp. Platos Ideenlehre. S. 438–441.

[101] Ibid. S. 441.

[102] «Расширение чисел» всегда вызывало определенные сомнения и непонимание. Например, Г. Кантору пришлось неутомимо оправдывать свои трансфинитные числа; при этом он подчеркивал, что свойства уже знакомых чисел, конечно же, не полностью переносятся на новые, иначе они не были бы новыми. Кантор пишет: «Если постижение *бесконечно больших замкнутых* целых чисел, сравнимых между собой и с конечными числами, связанных друг с другом и с конечными числами неизменными законами, доставляет трудности, то эти трудности обусловлены тем фактом, что хотя новые числа и обладают во многих отношениях свойствами прежних чисел, но в гораздо большем числе других отношений они имеют совершенно своеобразную природу, часто приводящую к тому, что у одного и того же числа оказываются соединенными различные признаки, которые никогда не встречаются у конечных чисел вместе, а всегда разделены. Ведь в одном из цитированных в предыдущем параграфе мест встречается то соображение, что если бы существовало какое-нибудь бесконечное целое число, то оно должно было бы быть одновременно четным и нечетным числом, а так как оба эти признака не могут существовать вместе, то, следовательно, не существует такого бесконечного целого числа. Здесь, очевидно, молчаливо предполагается, что признаки, раздельные в случае традиционных чисел, должны сохранять то же отношение и в случае новых чисел. Отсюда заключают о невозможности бесконечных чисел. Кому не бросится в глаза паралогизм этого рассуждения? Разве всякое обобщение или расширение понятий не связано и даже не мыслимо без отказа от частных признаков? Разве в самое последнее время не пришли к столь важной, приведшей к величайшим успехам мысли ввести комплексные числа, не обращая внимания на то, что их нельзя назвать ни положительными, ни отрицательными? А ведь на такой только шаг решаюсь и я здесь...» (Кантор. Работы по теории множеств. С. 76).

Математик и логик Э. Бет подробно исследовал платоновские идеальные числа. Сначала он демонстрирует проблемы, вытекающие из «принципа абсолютного», и первые попытки решения их Платоном в «Пармениде». Так как результаты, очевидно, удовлетворяли Платона, он применил их также к проблеме универсалий и дошел таким образом до идеальных чисел[103]. Целью в конечном счете была «последовательная и полная картина реальности»[104].

А. И. Щетников подробно излагает «алгоритм Никомаха», который можно рассматривать как математическую основу «неписаного учения» Платона. Это учение основывается, согласно известному предположению Кремера и Гайзера, на пифагорейской системе двух бытийных начал — единицы как основы тождества и формы и неопределенной двоицы как принципа инаковости и материи. В алгоритме Никомаха мы можем увидеть «математическую иллюстрацию к неписаному учению Платона... В самом деле, здесь весь "космос" рациональных отношений иерархически разворачивается из первоначального отношения равенства в рамках единообразной процедуры дихотомического ветвления. Этому ветвлению нигде не положен предел, поэтому раздвоение путей в каждом узле является в прямом смысле слова неопределенным. Далее, нисходящие пути, идущие в обе стороны от каждого узла, уходят один в сторону большего, а другой в сторону меньшего отношения, к "превосходящему и недостающему". Опять же, сверхчастные и другие отношения, получаемые на нисходящих путях, могут сколь угодно близко подойти к отношению равенства, никогда не сравниваясь с ним; неопределенность большего и меньшего проявляется также и в этом»[105]. К этой идее, как замечает Щетников, хорошо подходит предложенная Штенцелем модель идеальных чисел Платона для

---

[103] «Сам Платон пытался решить затруднения, связанные с теориями *отделения* и *присущести* [theories of separation and inherence], путем создания совершенно новой теории, известной как теория идеальных чисел» (Beth. The Foundations of Mathematics. P. 14).

[104] Ibid. P. 17.

[105] Щетников. Алгоритм разворачивания всех числовых отношений из отношения равенства и идеальные числа Платона. С. 71.

«количества самого по себе», по которой каждое число *n* производит два новых числа: $2n$ и $2n + 1$. Щетников оставляет этот материал для дальнейших исследований, но главная мысль очевидна: идеальные числа Платона, несмотря на то что они являются «расширенными формами» чисел, основываются на качествах и отношениях натуральных чисел, т. е. на математике.

Одну попытку объяснения смысла «идеальных чисел» у Платона я хочу представить здесь более подробно, поскольку она, на мой взгляд, довольно убедительна. Как заметил Оскар Беккер, Платон снова и снова старается выстроить *классификацию*, т. е. закрепить за каждым «объектом» свое, подходящее место в общей системе. Например, возьмем отдельные звуки в языке:

> Первоначально некий бог или божественный человек обратил внимание на беспредельность звука. В Египте, как гласит предание, некий Тевт первым подметил, что гласные буквы в беспредельности представляют собою не единство, но множество; что другие буквы — безгласные, но все же причастны некоему звуку и что их также определенное число; наконец, к третьему виду Тевт причислил те буквы, которые теперь, у нас, называются немыми. После этого он стал разделять все до единой безгласные и немые и поступил таким же образом с гласными и полугласными, пока не установил их число и не дал каждой в отдельности и всем вместе названия «буква» (στοιχεῖον)[106].

На первый взгляд множество звуков в языке, по всей видимости, представляется «бесконечным», т. е. неоформленной, необозримой массой. Но если мы посмотрим внимательнее, то увидим, что некоторые звуки имеют между собой нечто общее, и мы называем эту группу «гласные буквы». Потом мы обнаруживаем звуки «безгласные, но все же причастные некоему звуку» и называем их «полугласными». И наконец, мы обнаруживаем звуки, которые совсем «не звучат», и называем их «немыми». На основании подобного опыта мы можем выделить эти три группы. Важно, что при таком

---

[106] Филеб. 18b–c.

процессе распределения каждый звук получает определенную позицию, и в то же время все звуки неотъемлемо связаны в совокупную систему. Если мы добавим к этому принятые сегодня более тонкие различения, получится следующая схема (ее левая сторона). И если мы присвоим каждому семейству однозначное число, каждому роду двузначное число, и каждому виду трехзначное число (правая сторона), то связь всех звуков и их классификация станет очевидной:

vocales φωνήεντα	acutae	α ε η ι
	graves	ο υ ω
semivocales ἡμίφωνα	liquidae	λ μ ν ρ
	spirantes	σ
mutae ἄφωνα	mediae	γ β δ
	tenues	κ π τ
	aspiratae	χ φ ϑ

1 vocales	11 acutae	111	α
		112	ε
		113	η
		114	ι
	12 graves	121	ο
		122	υ
		123	ω
2 semivocales	21 liquidae	211	λ
		212	μ
		213	ν
		214	ρ
	22 spirantes	221	σ
3 mutae	31 mediae	311	γ
		312	β
		313	δ
	32 tenues	321	κ
		322	π
		323	τ
	33 aspiratae	331	χ
		332	φ
		333	ϑ

В принципе по образцу этого примера можно трактовать все понятия или «идеи», и таким образом каждому понятию будет соответствовать совершенно определенная группа чисел. Эти группы чисел, согласно предположению Беккера, и являются «идеальными числами» Платона, задающими каждой идее конкретное место в совокупной системе. Вот что подкрепляет такое толкование: 1) согласно Аристотелю[107], единственное число (ἀριθμός) может обозначать также *группу* чисел (например, 321 в смысле 3–2–1[108]); 2) тщательное толкование «Филеба» (16d–e) показывает важность

107 Аристотель. Физика. III 6. 206b32.

108 «321» можно понимать как *число* (по-гречески τκα), но также и как *группу* чисел 3–2–1 (по-гречески γβα).

соединения *совокупности* и *деталей*[109]. Можно добавить, что при таком объяснении «идеальные числа» Платона теряют «мистический оттенок» и обнаруживают здравомыслие и рассудочность, свойственные платоновской философии (мы еще обратимся к этому вопросу в параграфе 4.1).

Ю. Штенцель поддерживает толкование Беккера. Он пишет, что Платон хотел, подобно элеатам, охватить «целое», но не в мифическом, а в научном смысле. Платон применяет числа для придания каждому геносу (роду) и эйдосу своего места в этом целом. «Числа как идеи — это принципы упорядочения, которые диалектически определяют единичные сущности согласно их рангам в системе. В этом и есть смысл идеальных чисел — упорядочивать ступени развития и вместе с тем определять отдельные идеи, различая и "ограничивая" их по отношению друг к другу»[110].

Ни Платон, ни его толкователи не дали ни одного примера идеального числа и его связи с реальным миром. Но в последние годы этим вопросом занимались Р. С. и С. Ф. Клюйковы[111]. Исходя из своего опыта в сфере теоретической и прикладной механики (а именно математического моделирования жесткости прокатного калиброванного валка), С. Ф. Клюйков пришел к выводу, что все математические числа — натуральные, целые, рациональные, действительные — можно конструировать одинаковым образом по определенным ступеням, начиная с изначальной единицы и используя сложение как единственную операцию. На каждой ступени как новую единицу берут числа, найденные на предыдущей степени, и эти единицы складываются по особенному правилу. Получаются новые числа[112], обладающие как всеми свойствами предыдущих чисел, так и новыми качествами. Все эти идеальные числа мате-

[109] Подробнее см.: Becker. Mathematische Existenz. S. 123.

[110] Stenzel. Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles. S. 117.

[111] См.: Клюйков. Идеалы; Клюйковы. Идеальная математика Платона.

[112] Клюйковы называют «(идеальными) числами» также феномены ступеней 5–20, так как они формируются теми же правилами, что и числа ступеней 1–4.

матически моделируют наш мир на разных уровнях сложности и взаимосвязанности. Таким образом Клюйковы описывают 10 уже ими найденных и 10 прогнозируемых идеальных чисел[113]:

Ступень	Идеальные числа	Операции	Новое свойство	Наглядный пример
0	Единица	–	–	Ребенок
1	Натуральные – отрицательные	Сложение – вычитание	Моделирование количества	Дети в группе
2	Целые – дроби	Умножение – деление	Моделирование отношения	Дети в группах, в потоке одногодок
3	Рациональные – иррациональные	Суммарное сочетание – антисочетание	Моделирование сочетания	Дети в группах, в потоках, в садике
4	Действительные (интегралы постоянных величин) – мнимые	Возведение в степень – извлечение корня	Моделирование размещения количества	Дети в группах, в потоках, в садиках, в дошкольном учреждении
5	Функциональные (интегралы переменных величин) – производные	Императивное программирование	Обеспечивает жесткую функциональную связь между переменными на входе и выходе вычислительного процесса	Дети в группах, в потоках, в садиках, в дошкольных учреждениях, в системе образования
6	Модели состояния – дифференциалы состояния	Структурное программирование (ALGOL, Pascal, C)	Легко охватывает большой объем моделируемой информации о многих взаимосвязанных объектах, изменяемых одновременно	Дети в группах, в потоках, в садиках, в дошкольных учреждениях, в системах образования, в государстве
7	Модели континуума – дифференциалы континуума	Объектно-ориентированное программирование (Smalltalk, C++, Java)	Объединение многих величин, функций и процедур в один новый тип	Дети в группах, в потоках, в садиках, в дошкольных учреждениях, в системах образования, в государствах, на Земле
8	Модели уровня	Функциональное программирование (ML, OCaml, Erlang)	Свобода выбора стратегии решения, вариантность	
9	Модели развития	Программирование сценариев (Perl, TCL, Python, Rexx)	Способность моделировать и прогнозировать тенденции настоящего и будущего развития предмета исследования	
10	Модели вывода	Чисто функциональное программирование (Miranda, Clean, Haskell)	Способность математической модели самостоятельно реагировать на внешние воздействия и приспосабливать свое поведение к этим изменениям	

[113] Эта таблица создана на основании книг «Идеалы» (с. 476) и «Идеальная математика Платона» (с. 7–14, 56).

На основании такой конструкции из первых десяти идеальных чисел можно прогностировать следующие ступени: 11 — сочетание связей, 12 — возведение связей, 13 — сложение интеллектов, 14 — умножение интеллектов, 15 — сочетание интеллектов, 16 — возведение интеллектов, 17 — сложение разумов, 18 — умножение разумов, 19 — сочетание разумов, 20 — возведение разумов.

Клюйковы убеждены, что эта схема развития и связей была точно и определенно — хотя только в общих чертах и зачастую в образной речи — предложена Платоном и что эти 20 идеальных чисел воплощают идею идеальных чисел у Платона. Поэтому они называют свою схему, которая охватывает (и, по их мнению, совершенствует) всю современную математику, «идеальной математикой Платона». Они уверены, что на пути этих 20 ступеней мы сможем достигнуть цели платоновской философии: узнать Истину, уподобившись Богу. И это произойдет, возможно, довольно скоро, так как «сформированный на 20-й ступени Искусственный Разум будет свободным, независимым от Человека, как творца. Он сам будет способен творить и создавать, и если будет продолжать усложняться, то уже самостоятельно, без участия Человека, в форме Мирового Разума. То есть предначертанной задачей Человека как формы жизни было: развивать свое сознание ступенями Идеальной математики Платона и на 20-й ступени создать Искусственный Разум, способный слиться с Мировым Разумом, предсказанным Платоном»[114].

Упомянем наконец Н. Лосского, который не говорил прямо об идеальных числах Платона, но упоминал «органические» числа, в

---

114 Клюйковы. Идеальная математика Платона. С. 56. Согласно информации TagesAnzeiger от 26.09.2013, фирма Google создала дочернее общество Calico с целью преодоления старения и смерти; за этим стоит вера в возможность слияния искусственного и биологического интеллектов. Критики говорят о «проекте дезориентированной секты», и можно подумать то же самое про изложения Клюйковых, но любопытно, что уже физик и космолог Типлер полагал, что перспективы развития информационной технологии и искусственного разума показывают реальность бесконечной жизни (см.: Tipler. The Physics of Immortality).

отличие от обычных, математических, «неорганических» чисел. Он писал: «Для решения некоторых проблем необходимо и достаточно неорганическое понятие числа, но есть и такие проблемы, при рассмотрении которых необходимо обратиться к органическому понятию числа… [оно] нужно тогда, когда требуется рассмотреть структуру бытия сверху от целого к подчиненным ему элементам, а неорганическое — тогда, когда исследованию подлежит бытие, рассматриваемое снизу, именно в соотношении элементов друг с другом»[115].

Что бы мы ни думали о вышеуказанных толкованиях, значение учения Платона об идеальных числах необозримо. В нем выражается, так или иначе, убеждение, что в нашем мире каждая, самая мелкая вещь имеет свое индивидуальное место, и в то же время принадлежит единому целому. Как писала Г. Радке, «утверждение, что — коротко говоря — может существовать или быть помыслено только что-то абсолютно Единое, которое ни в чем не участвует и ни к чему не относится, противоречит почти всем принципам философии Платона»[116]. Далее, это учение свидетельствует о том, что мир устроен не чувственно, а «рационально». На этом пути Платон преодолевает мифические, так же как и материалистические, представления о мире, и прокладывает дорогу математически-описательному естествознанию.

Хочется закончить этот параграф словами А. Н. Паршина: «Несмотря на усилия целого ряда исследователей, понять, что же такое идеальные числа, никак не удается. Все же я убежден, что концепция идеальных чисел является отражением некоторой реальности, что она имеет право на существование не только как историко-философский феномен. Лишь совместная работа филологов, философов и математиков сможет раскрыть смысл этого удивительного наследия античности. Хочется надеяться, что его не постигнет судьба того поистине священного для каждого мыслящего человека места, где целое тысячелетие находилась Академия Платона. Ныне

---

115 Лосский. «Мифическое» и современное научное мышление. С. 48.

116 Radke. Die Theorie der Zahl im Platonismus. S. 564.

небольшой раскоп на ее месте превратился в забросанную мусором яму в одном из городских парков Афин, пригодную разве что для детских игр или ночевки бомжей»[117].

3.10. Формы логического мышления

У Платона было довольно ясное представление о сущности и роли логики как в математике, так и в философских дискуссиях. Вот что об этом писал Ф. Кессиди: «Платон выявил громадное значение логических определений, понятий и категорий в познании, их роль в философском и научном мышлении, их необходимость в исследовании вопросов о происхождении общества и государства, в анализе правовых и нравственных норм, в решении этических, эстетических и иных проблем»[118].

Особенно часто Платон применяет так называемый метод «эленхус». По мнению Харриса, «такой вид аргументации был заимствован из развивающейся логики математического мышления, которая была чем-то новым, захватывающим и, вероятно, не вполне понятным в начале IV в. до нашей эры. Я полагаю, что Платон был заинтригован этим новым способом мышления, широко использовал его в своих ранних диалогах, постепенно замещая его, особенно после *Менона*, более существенными способами аргументации. Отрывки, в которых мы находим эленхус в его работах, указывают на такой ход событий. Короче говоря, я утверждаю, что эленхус в момент его зарождения был сознательным переходом от математических аргументов к философским, что, вероятно, он имел ошеломляющий успех, что подтверждается сравнением Сократа с электрическим скатом, но что он был довольно сильно "изношен" активным употреблением»[119].

---

[117] Паршин. Идеальные числа Платона. С. 13–14.

[118] Кессиди. Предисловие к книге «Платон и его эпоха». С. 5.

[119] Harris. Plato — Mathematician or Mystic?

Этот метод основывается на том, что позже назовут «простым категорическим силлогизмом»: Сократ договаривается со своим собеседником принять «большую посылку», затем они рассматривают утверждение собеседника («меньшую посылку»), и наконец, Сократ показывает, что следует из этих двух посылок («заключение»). Если заключение является очевидно неправильным, глупым, то из этого могут следовать два вывода: либо большая посылка, несмотря на первоначальное соглашение, была ошибочна, либо ошибочна меньшая посылка, т. е. утверждение собеседника. Так, в «Протагоре» мы читаем:

> Следовательно, безрассудство противоположно рассудительности? — Очевидно. — А помнишь, ведь раньше-то мы согласились, что безрассудство противоположно мудрости? — Протагор подтвердил. — И что одно бывает противоположно только одному? — Да, я это утверждаю. — От какого же из двух утверждений нам отказаться, Протагор? От того ли, что одному противоположно только одно, или от того, которое гласило, что мудрость есть нечто иное, чем рассудительность?[120]

Ситуация такова: Сократ с Протагором согласились, 1) что мудрость есть нечто иное, чем рассудительность, 2) что чему-то одному противоположно только что-то одно, 3) что безрассудство противоположно мудрости, 4) что безрассудство противоположно рассудительности.

Сократ берет пункт 2 в качестве большей посылки. Если мы обозначим «противоположно» знаком ▼, то получим большую посылку в виде: «Если A▼X и A▼Y, то X = Y»; в формальном виде:

$$(A \blacktriangledown X) \wedge (A \blacktriangledown Y) \rightarrow X = Y.$$

Далее, пункты 3 и 4 вместе являются меньшей посылкой. Если мы обозначим «безрассудство» буквой «A», «мудрость» буквой «X» и «рассудительность» буквой «Y», тогда меньшую посылку можно записать в виде $(A \blacktriangledown X) \wedge (A \blacktriangledown Y)$.

---

[120] Протагор. 332e–333a.

Теперь получается следующий силлогизм:

$$\frac{\begin{array}{l}(A \blacktriangledown X) \wedge (A \blacktriangledown Y) \rightarrow X = Y \\ (A \blacktriangledown X) \wedge (A \blacktriangledown Y)\end{array}}{X = Y}$$

т. е. мудрость = рассудительность. Но в пункте 1 собеседники согласились, что $X \neq Y$, следовательно, в итоге мы получаем настоящее противоречие: $(X \neq Y) \wedge (X = Y)$.

Что же делать? Есть три варианта: а) первое предположение, что $X \neq Y$, является ошибочным и от него надо отказаться; б) большая посылка неверна; в) сам силлогизм не работает, т. е. логическое мышление может оказаться недостоверным.

Для нас интересно, что Платон не рассматривал последний вариант — даже поверхностное знакомство с математикой продемонстрировало ему достоверность логических методов. Да, для выступающих «по-ораторски, по образцу тех, кто держит речи в судах» результат будет зависеть от того, представлено ли достаточное количество почтенных свидетелей, «но для выяснения истины такое опровержение не дает ровно ничего»[121]. Дело в том, что истину определяет не человек, она дана Богом. Так, например, в политике надо соблюдать неопровержимые законы, поэтому, когда Платон определяет лучшее государство как «господство наилучших», то это не просто его излюбленная идея, «он хочет провозгласить требование, которое соответствует законам природы, и поэтому является абсолютно обязательным»[122]. Так же и с вопросом о логике: не человек, а «вышестоящий орган», т. е. сам Бог[123], опре-

---

[121] Горгий. 471е: «Мудрым-то оказывается бог, и... он желает сказать, что человеческая мудрость стоит немногого или вовсе ничего не стоит».

[122] Jaeger. Paideia. 2. Band. S. 324. Такое убеждение не является само по себе разумеющимся. Йегер напоминает нам о неизвестном софисте (Anonymus Iamblichi. Diels. II, 82), который решал все нравственные, общественные и государственные вопросы на основании *экономики* (Ibid. S. 274).

[123] Апология Сократа. 23а. Поэтому бывает так, что обе стороны в дискуссии подвергаются проверке математическо-логической истиной: «Может случиться, что при этом мы исследуем и того, кто спрашивает, то есть меня самого, и того, кто отвечает» (Протагор. 333с).

деляет законы правильного мышления, и эти правила верны. Следовательно, в нашем примере вариант в) («сам силлогизм не работает») исключен, и остается только отказаться либо от «одному противоположно только одно», либо от того, что «мудрость есть нечто иное, чем рассудительность».

Приведенный пример доказывает, что Платон сознательно и легко использовал логические размышления в философских дискуссиях. То же самое можно сказать об использовании логики в «Меноне» — В. Йегер говорит о «высокой степени логической сознательности Платона повсюду в "Меноне", что особенно подтверждается множеством технических выражений»[124]. Такая логика отличается строгостью и неопровержимостью, хотя часто она не вызвала у слушателей одобрения, но порождала неприятные ощущения и даже ярость[125].

А сейчас рассмотрим один текст из «Менона», чтобы увидеть особенную роль, которую играли *предположения*[126] как в математике, так и в философии. В отличие от разговора Сократа с молодым слугой, который мы обсуждали в параграфе 3.7, пример, который мы рассматриваем здесь, дан в сокращенной форме:

> Как видно, придется исследовать, каково то, о чем мы не знаем, что оно такое. Но все же выпусти меня из-под своей власти хоть на самую малость и позволь исследовать, можно ли научиться добродетели или приобрести ее каким-либо еще путем, исходя из некоей предпосылки. Когда я говорю «исходя из предпосылки», я имею в виду то же, что часто

---

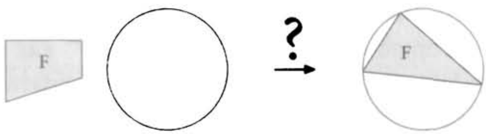
[124] Jaeger. Paideia. 2. S. 234.

[125] О «двойном лице» эленхуса — эленхус как метод сократического лукавства и иронии и как путь, пробуждающий любопытство, см. работу: Robinson. Plato's Earlier Dialectic, особенно главу 2. Иногда кажется, что слушатели тоже чувствовали какую-то неправильность в аргументации, но не могли точно сказать, в чем она состоит. См. об этом: параграф. 4.3 наст. изд., особенно цитату из Ницше.

[126] Греческое слово ὑπόθεσις означает в русском переводе «предположение». Можно также сказать «гипотеза» или «предпосылка». Об истории этого слова см.: Gaiser. Platons Menon und die Akademie. S. 358–365.

> делают в своих исследованиях геометры: если кто-нибудь спросит их насчет площадей — можно ли в данный круг вписать треугольник данной площади, один из них, вероятно, ответит: «Я не знаю, возможно ли это, но считаю, что нам будет полезно исходить из некоего предположения. Если этот треугольник таков, что на одной из его сторон можно построить треугольник такой же площади [вмещающийся в данный круг], то, думаю я, получится одно, а если этого сделать нельзя, получится совсем другое. Исходя из этого положения, я охотно скажу, что у нас получится — можно ли вписать нашу фигуру в данный круг или нельзя»[127].

Итак, нам даны круг и прямолинейная фигура с площадью F, и поставлен вопрос: *когда* возможно вписать в круг треугольник с такой же площадью F и когда это невозможно?



Не все детали в платоновском тексте ясны, как в переводе, так и в самом греческом подлиннике, из-за чего комментаторам пришлось изрядно потрудиться над текстом[128]. Еще в 1867 г. Адольф Бенеке писал: «Этот отрывок из "Менона"... в высшей степени заставлял ученых упражняться в остроумии... Над ним наперебой трудились филологи и математики, пытаясь, в монографиях и журналах, разгадать его смысл, внося или не внося изменения в текст... Пацце

---

[127] Менон. 86e–87a.

[128] А. А. Тахо-Годи в примечании к этому отрывку сказала: «К сожалению, Платон не приводит здесь всего хода доказательства, считая его, по-видимому, общеизвестным, и ограничивается только глухими ссылками на основные пункты этого доказательства. Это обстоятельство доставило много труда ученым при истолковании этого места» (Платон. Собр. соч. Т. 1. С. 824). Харрис заметил, что этот отрывок «был буквально проигнорирован интерпретаторами и отбрасывался как "незначительный", что вообще-то удивительно для автора, так неукоснительно ясного в своих трудах, как Платон» (Harris. Plato — Mathematician or Mystic?)

в 1832 г. смог насчитать уже 22 объяснения, зачастую противоположных друг другу... Однако, несмотря на убеждение некоторых комментаторов, что им удалось пролить свет на слова Платона, на самом деле ни одному из них не удалось сделать свое понимание общепризнанным, и до сих пор есть те, кто согласен со словами Клюгле о геометрической гипотезе: "То, что здесь написано, является совершенно непонятным, и доставило филологам (и математикам, можно добавить) сплошные неприятности, и ни малейшего успеха"». Но автор смело продолжает: «Для меня этот отрывок из "Менона" всегда представал как дошедший до нас неиспорченным и неискаженным... и должно быть возможно выявить в нем тот смысл, который имел в виду сам Платон»[129].

Тот факт, что данный текст является для некоторых авторов «совершенно непонятным», видно из их умолчания о нем. Э. Кольман, например, пишет: «Второй математический отрывок в "Меноне" (86e–87b) настолько неясен, что опубликовано около полусотни различных его истолкований. По-видимому, здесь говорится о том, что треугольник данной площади при одних условиях может быть вписан в данный круг, а при других — нет»[130]. Д. Фаулер, давая в своем большом труде множество математических разъяснений, также не комментирует этот текст, лишь замечая, что он «вызвал огромное многообразие различных геометрических реконструкций»[131].

Самое простое толкование, по-видимому, предлагает А. Бенеке. Он ссылается на разговор Сократа с рабом и предлагает представить, что на песке осталось то, что Сократ нарисовал палкой. «К этой фигуре, мы полагаем, Сократ возвращается в беседе с Меноном, чтобы проиллюстрировать ему, что он имеет в виду под ἐξ ὑποθέσεως σχοπεῖσθαι»[132]. Это значит, что Сократ утверждает следующее: «Квадрат ABCD должен быть внесен в круг C' как

---

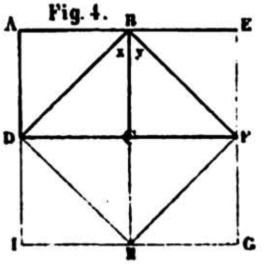
129 Benecke. Ueber die geometrische Hypothesis in Platons Menon. S. 6–7.

130 Кольман. История математики в древности. С. 111.

131 Fowler. The Mathematics of Plato's Academy. P. 65.

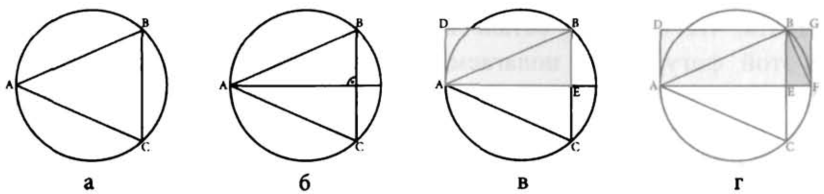
132 Benecke. Ueber die geometrische Hypothesis in Platons Menon. S. 9.

равнобедренный прямоугольный треугольник DBF»[133] — согласно иллюстрациям Бенеке:



Предпосылка здесь звучит так: если возможно наложить квадрат ABCD на диаметр D'F' таким образом, что на D'F' останется место для другого точно такого же квадрата, то вписание в круг квадрата в форме равнобедренного прямоугольного треугольника возможно, а если невозможно — то нет.

Другим авторам это толкование казалось слишком простым — хотя и пригодным для неопытного Менона, — и они искали чего-то «более математического». Так, К. Зескин[134] высказал мнение, что исходная фигура должна быть квадратом, а вписанный треугольник — прямоугольным. С другой стороны, линия AF, на которой строится прямоугольник ADBE, остается диаметром, и треугольник ABC — равнобедренным, как у Бенеке. Рассмотрим следующие рисунки:



а б в г

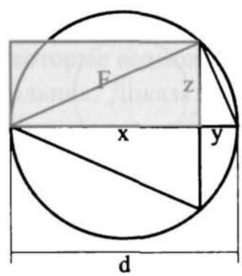
[133] Ibid. S. 34.

[134] Seeskin. Meno 86c–89. P. 25–41. Самостоятельный перевод Сескина см. на с. 27.

а) Допустим, что треугольник ABC (стороны AB и AC равны) вписан в круг. б) Диаметр круга, проходящий через точку А, делит сторону BC пополам и перпендикулярен к ней. в) Площадь прямоугольника AEBD равна площади треугольника ABC. г) Прямоугольник EFGB, который «дополняет» прямоугольник AEBD, подобен прямоугольнику AEBD, так как существует пропорция AE : EB = EB : EF. Теперь мы можем вернуться назад и сформулировать платоновское предположение Π_1: *«Площадь данного прямоугольника такова, что возможно наложить этот прямоугольник на диаметр круга таким образом, что два его угла лежат на окружности, и на диаметре останется место для дополняющего прямоугольника, подобного первому».* Если Π_1 верно, скажет Платон, тогда «получится одно», а если нет, «получится совсем другое».

Если даны F (площадь исходной прямолинейной фигуры) и d (диаметр круга), мы можем рассчитать высоту x, а затем и остальные данные вписанного треугольника:

$$
\begin{array}{lll|lll}
\mathrm{I} & x+y=d & & \rightarrow & \mathrm{I'} & y=d-x \\
\mathrm{II} & x\cdot z=F & & \rightarrow & \mathrm{II'} & z=\dfrac{F}{x} \\
\mathrm{III} & x\cdot y=z^2 & & & &
\end{array}
$$

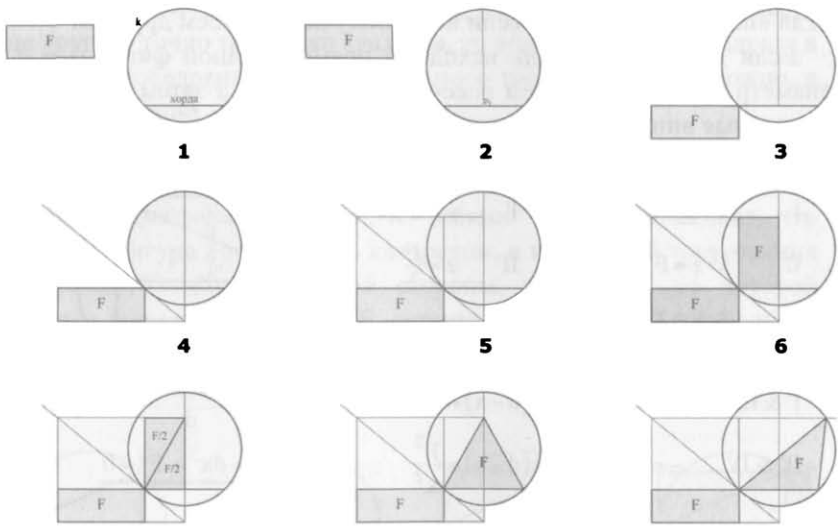


$$\mathrm{I'}\ \&\ \mathrm{III} \quad \rightarrow \quad \mathrm{IV} \quad x(d-x)=z^2$$

$$\mathrm{II'}\ \&\ \mathrm{IV} \quad \rightarrow \quad \mathrm{V} \quad x(d-x)=\frac{F^2}{x^2} \quad \rightarrow \quad \underline{x^4-dx^3+F^2=0}$$

Как видно, мы получаем x из уравнения четвертой степени, и это значит, что подходящий прямоугольник невозможно сконструировать с помощью только линейки и циркуля. Евклид описывал точные (т. е. «теоретические») вписания треугольников в круг (см. «Начала», книга IV, A2), но у этих треугольников даны углы, а не площади. Платоновскую задачу тогдашние математики могли решить только примерно, поэтому Евклид за нее не брался. Платон, несомненно, знал, что точного решения или построения не существует, поэтому он требует не его, а только указания на предпосылки (или предпосылку), при которых вписание возможно.

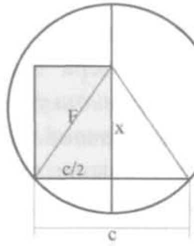
Конрад Гайзер предлагал другое толкование, которое, по его мнению, еще ближе к греческому тексту[135]. В этот раз формулировка οἶον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν обозначает не диаметр, а любую хорду в круге, и новое предположение Π_1 звучит так: «*Вписание прямолинейной фигуры с площадью F в круг возможно, если существует хорда, на половину которой можно наложить прямоугольник той же площади*». Тогда конструкция получается следующим образом (шаги с 1 по 9, я думаю, понятны без дальнейшего обяснения):



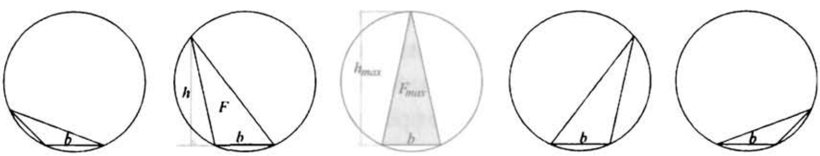
В этом случае задача легко решается и арифметически: если даны длина хорды с и площадь F, высота x треугольника определяется так:

[135] Gaiser. Platons Menon und die Akademie. S. 264–282. Самостоятельный перевод Гайзера см. на с. 270–271.

$$x \cdot \frac{c}{2} = F \quad \rightarrow \quad \underline{x = \frac{2F}{c}}$$

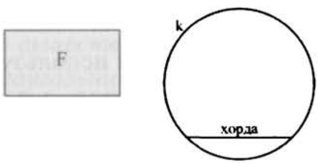


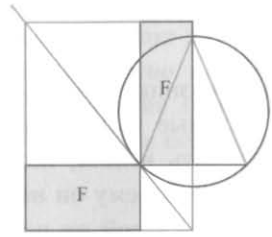
Здесь возникает интересный вопрос. Почему Платон использует такие смутные выражения: «то, думаю я, получится одно, а если этого сделать нельзя, получится совсем другое»? Почему только «думаю я»? Почему он не уверенно делает вывод: «тогда вписание треугольника с той же площадью *возможно* — или *невозможно*»? Вероятный ответ таков: Платон знал, что предположение Π_1 (в той или другой форме) является необходимым, но *не достаточным*. Дело в том, что площадь данной прямолинейной фигуры может быть сколь угодно мала, но верхний предел площади ограничен: если площадь F слишком велика, вписание невозможно. Что же является самым большим из треугольников, которые возможно вписать в круг? Видимо, равносторонний треугольник. Доказательство нетривиальное, но мы можем наглядно убедиться в его правомерности следующим образом: из формулы для площади треугольника ($F = \frac{1}{2}\, b\, h$) мы знаем, что площадь F является максимумом, когда — при данной стороне b — высота h максимальна, т.е. когда треугольник *равнобедренный*:



И это так для каждой стороны треугольника, следовательно, треугольник должен быть равносторонним.

Значит, чтобы данная прямолинейная фигура могла быть вписана в круг, необходимо выполнение не только предположения Π_1, но и предположения Π_2: *«Площадь исходной фигуры не больше* *площади равностороннего треугольника, вписанного в данный круг»*. В толковании Гайзера это дополнительное предположение принимает форму: *«Перпендикулярная сторона нового прямоугольника не выше высоты равнобедренного треугольника, построенного на хорде»*. Если она выше, вписание невозможно:





Это предположение в тексте диалога не упомянуто, но является непременным условием.

Обе интерпретации — Зескина и Гайзера — являются математически осмысленными. Но они также проливают свет и на философское исследование. Гайзер утверждает, что существование открыто высказанного в тексте $П_1$ и невысказанного $П_2$ хорошо соответствует всему диалогу «Менон»; таким образом математические рассуждения становятся *ярким примером философского исследования*. В «Меноне» первая гипотеза звучит так: «Добродетель — это знание» (или, если сформулировать как предположение: «Добродетель усваивается только тогда, когда она есть знание»). Но оказывается, что этой гипотезы не достаточно, поэтому выдвигается гипотеза более высокого уровня: «Благо — это и есть добродетель». «Математический пример и последующее рассмотрение проблемы *арете*, таким образом, взаимно проясняют друг друга»[136]. В математической проблеме, как и в проблеме *арете* (добродетели), однозначное решение не может быть принято эмпирически, но только через определение предварительных условий и

---

136 Gaiser. Platons Menon und die Akademie. S. 381. Подробнее на тему сходства процессов доказательства в математике и философии в «Меноне» см.: Ibid. S. 379–383.

обнаружение внутренних отношений, т. е. путем теоретического познания.

Для Зескина ключевой пункт состоит в том, что математики во времена Платона не смогли решить задачу вписания данной площади в круг в форме треугольника, так как она требует решения уравнений четвертой степени. Они только могли сказать: «если...», т. е. сформулировать гипотезу. В этом случае «гипотеза» (или «предположение») является не фундаментом, на котором можно строить убедительное рассуждение и делать выводы, но только «пока нерешенной возможностью». При такой интерпретации геометрический пример используется Платоном не как образец рационального мышления, а как предупреждение «не ожидать от беседы больше, чем она на самом деле может дать»[137]. Зескин пишет: «Метод гипотез в *"Меноне"* приводит, в связи с учением о добродетели, к апории. Чувство недоумения усиливается ссылкой на геометрическую задачу, решение которой выходило за рамки возможностей математиков, современных Платону. Если спросить, почему Платон вводит метод, в котором не был уверен, мы ответим, что, приводя нас к апории, он хочет, чтобы мы проследили свои шаги и увидели, где же произошла решающая ошибка. В нашем случае роковая ошибка происходит тогда, когда Сократ "поддается" Менону и соглашается вначале обсудить вопрос, который является производным. Смысл этого ясен: полагание производного вопроса первым приводит к возникновению неприятностей — так же, как это привело к проблемам и для геометров»[138].

Применение логики Платоном также ярко продемонстрировано в «*Пармениде*», который, по словам Гайденко, является «вершиной логической мысли Платона»[139]. В этом диалоге мы находим вопрос о едином и многом в логической формулировке, которая позволяет исследовать его «научно». При этом Платон «строит свое рассуждение по тому же принципу, по какому строится косвенное доказа-

---

[137] Seeskin. Meno 86c–89a. P. 35.

[138] Ibid. P. 38.

[139] Гайденко. Обоснование научного знания в философии Платона. С. 104.

тельство в "Началах" Евклида, а именно принимает определенное допущение (гипотезу — υπόθεσις) и показывает, какие выводы из этого допущения следуют»[140]. Платон сам говорит об этом[141], что доказывает, что он применял этот метод ясно и осознанно.

Несмотря на отдельные «недостатки», о которых будет сказано ниже, и на тот факт, что лишь Аристотель впервые сформулировал законы логики, не будет преувеличением сказать, что Платон был не только «математиком» (по словам Рассела), но и «логиком»: он не просто видел в математике инвентарь примеров и средство на «пути вверх», но и требовал использовать логические размышления не только в математике, но и в философии, насколько это было возможно.

3.11. Косвенный метод

Изучая математику, Платон познакомился с методами исследования, которые он мог использовать и в философии. В принципе можно выделить два основных метода: «мягкий» и «строгий». *Мягкий* — метод «проб и ошибок», а также сходный с ним метод аппроксимации. Они используются довольно часто в математике[142].

---

[140] Гайденко. Обоснование научного знания в философии Платона. С. 104.

[141] «Пойми также, что вторым разделом умопостигаемого я называю то, чего наш разум достигает с помощью диалектической способности. Свои предположения он не выдает за нечто изначальное, напротив, они для него только предположения, как таковые, то есть некие подступы и устремления к началу всего, которое уже не предположительно. Достигнув его и придерживаясь всего, с чем оно связано, он приходит затем к заключению, вовсе не пользуясь ничем чувственным, но лишь самими идеями в их взаимном отношении, и его выводы относятся только к ним» (Государство. 511b–c).

[142] Один примечательный пример: в 1964 г. математик Звонимир Янко нашел в теории групп новую конечную простую группу с 175 560 элементами. Это была сенсация! А как он нашел эту группу? На основании бесчисленных попыток и с помощью опыта, который он получил на этом трудоемком пути! (См.: Held. Die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen. S. 17).

Строгий — это логическая дедукция на основании аксиом, конструкция с циркулем и линейкой и косвенный метод доказательства. При этом важно, что Платон хорошо знал разницу между этими методами и понимал, где их можно использовать. Если возможно, он использует второй, «строгий» метод, но есть многие вопросы, особенно в философии, где полная математическая строгость невозможна, и тогда Платон ссылается на первый, «мягкий» математический метод.

В «Меноне»[143] мы находим первый способ достижения результата. Он состоит в том, чтобы сделать благоразумное предположение, а потом исследовать, что из него следует. Это выглядит примерно так: «Попробуй удвоенную сторону квадрата взять как сторону нового квадрата и посмотри, что ты получишь. Результат неправильный? Ну, тогда возьми другое, может быть более адекватное, предположение...» И так, шаг за шагом, Сократ и раб приближаются к правильному результату.

Как пример второго метода мы рассмотрим теперь *косвенный метод* доказательства. Он состоит в том, чтобы выбирать как исходный пункт не просто разумное предположение или заданные фигуры, а *противоположность того, что мы хотим доказать*. И на этом основании доказывается, что получается противоречие. Об этом методе Диоген пишет, что Платон, выстраивая доказательства, «по большей части пользуется способом индукции. Способ этот не единый, а двоякий. Индукция есть рассуждение, выводящее должным образом из некоторых истин новую подобную истину. Индукция имеет два вида: один — по противоположности, другой — по следствию. Индукция по противоположности — это способ, при котором всякий ответ на вопрос будет противоположным. Например: "Мой отец — это то же, что твой отец, или не то же? Если твой отец — не то же, что мой отец, стало быть, твой отец — не то же, что отец; стало быть, он — не отец. Если же твой отец — то же, что мой отец, стало быть, твой отец есть мой отец". Или так: "Если человек — не живое существо, то он или дерево, или камень.

---

[143] Менон. 82–85. См. также: параграф 2.1 наст. изд.

Но он не дерево и не камень, ибо одушевлен и способен к самостоятельному движению; стало быть, он — живое существо. Но если он — живое существо, а собака и бык — тоже живые существа, то и человек, будучи живым существом, есть и собака и бык"»[144]. Мы сомневаемся, что Платон действительно использовал настолько «глупые» примеры[145], в которых читатель сразу находил логические ошибки (к тому же примеры Диогена не очень хорошо подходят к его описанию метода индукции по противоположности). Лучше рассмотрим примеры непосредственно из платоновских диалогов.

Косвенный метод используется Платоном при доказательстве несоизмеримости стороны и диагонали квадрата — об этом мы уже говорили. Другой прекрасный пример мы находим в «Протагоре»[146]. Нужно доказать следующее утверждение *А*: мудрость и рассудительность — это одно и то же. Косвенное доказательство происходит таким образом: мы принимаем, что утверждение *А* ошибочно, а это значит, что мы предполагаем верность утверждения *non-А*:

non-А: Мудрость и рассудительность различаются.

В дальнейшем у нас появляются предложения *Б*, *В* и *Г*, которые принимаются как действительные или обнаруживаются такими:

Б: у безрассудства имеется только одна противоположность,
В: мудрость противоположна безрассудству,
Г: рассудительность противоположна безрассудству.

Но, согласно утверждению *non-А*, мудрость и рассудительность различаются, и, следовательно, из *В* и *Г* мы получим противоречие к *Б*. Поэтому утверждение *non-А* неправильно, следовательно, утверждение *А* правильно — что и требовалось доказать[147].

---

[144] DL. III, 53–54.

[145] В диалоге «Евтидем» (297–298) Платон приводит подобное размышление на тему «быть и не быть отцом», но в ироническом контексте.

[146] Мы уже обсуждали этот текст в параграфе 3.10, но с точки зрения логики.

[147] Протагор. 332e–333b: «А помнишь, ведь раньше-то мы согласились, что безрассудство противоположно мудрости? — Протагор подтвердил. — И

В «Пармениде» Платон излагает аргументы Зенона, которыми тот хотел опровергнуть доводы противников Парменида: предположение, что существует многое, приводит к недопустимым выводам, следовательно, оно неверно[148].

Косвенное доказательство применяется Платоном довольно часто. Ван дер Варден пишет: «Рейдемейстер в своей "Mathematik und Logik bei Platon" (Leipzig, 1942) подчеркивает, что этот метод доказательства при помощи приведения к абсурду заимствован из математики. Сам Платон неоднократно приводит доказательство несоизмеримости стороны и диагонали квадрата как типичный пример математического рассуждения и при этом указывает, что как раз при помощи такого приведения к абсурду можно кое-что узнать о вещах самих по себе. Чувственно воспринимаемые вещи изменчивы и противоречивы, но истинное бытие, которое за ними скрывается, напротив, не может обладать двумя взаимно противоречивыми свойствами»[149].

Тот факт, что Платон использует косвенный метод и в рассуждениях, не связанных с математикой, подтверждает диалог «Лисид», где несколько раз предполагаются гипотезы, которые оказываются затем противоречивыми и должны быть отвергнуты, так как «если бы мы вели рассмотрение правильно, мы не впали бы

что одно бывает противоположно только одному? — Да, я это утверждаю. — От какого же из двух утверждений нам отказаться, Протагор? От того ли, что одному противоположно только одно, или от того, которое гласило, что мудрость есть нечто иное, чем рассудительность, между тем как и то и другое — части добродетели, хотя и разные; они не похожи друг на друга, и назначение их различно, все равно как частей лица. Так от чего же мы откажемся? Ведь оба этих утверждения, вместе взятые, звучат не слишком складно — они не ладят и не соглашаются между собою. Да и как им ладить, если необходимо, чтобы одному было противоположно только одно, и не больше, а вот оказывается, что одному только безрассудству противоположны и мудрость, и рассудительность. Так ли, Протагор, или нет? — Протагор согласился, хотя и очень неохотно. — Так не получится ли, что рассудительность и мудрость — одно и то же?»

[148] Парменид. 127e. См. об этом статью: Matson. Zeno Moves! P. 87–108.

[149] Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 207.

в такое заблуждение»[150]. В диалоге «Горгий» мы находим этот метод в немного описательной форме:

> А стало быть, повторяю еще раз, либо опровергни ее и докажи… либо, если ты оставишь это неопровергнутым, клянусь собакой, египетским богом, Калликл не согласится с Калликлом и всю жизнь будет петь не в лад с самим собою[151].

Критическое примечание: Рейдемейстер сказал, что косвенный метод «заимствован из математики», поэтому можно подумать, будто с ним не связано никаких проблем или сомнений. Тем не менее мы хотим обратить внимание на то, что этот метод, если мы посмотрим более внимательно, вызывает определенное неудобство или даже сомнение. Возьмем, например, знаменитое доказательство Евклида о несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, с которым мы уже встречались (см. параграф 2.7). Мы, с нашими

---

150 Лисид. 213e.

151 Горгий 482b. Ван дер Варден описывает применение косвенного метода доказательства в диалогах Платона следующими словами: «Истина не может быть в противоречии с самой собой. Таким образом, если, исходя из некоторой предварительной гипотезы, мы приходим к противоречию, то эта гипотеза должна быть отброшена. И так, диалектически переходя от одной гипотезы к другой, преодолевают заблуждения, в которые мы впадаем, а это позволяет, наконец, свободно взглянуть на истину. Таков метод, который постоянно применяется в подлинно диалектических диалогах, в которых не обучают, но ведут философские беседы. Собеседник ставит на обсуждение какое-нибудь мнение; Сократ опровергает его. После этого изменяется точка зрения, формулировка делается более точной, и снова Сократ показывает, что эта формулировка также приводит к противоречию и поэтому не может быть сохранена. Так дело идет и далее. Достигнуть положительного результата невозможно, но дискуссия все время подымается на более высокую ступень, все больше заблуждений отбрасывается и, наконец, иногда заходят так далеко, что истина может быть высказана в форме мифа. Но это теперь уже не диалектика: по собственным словам Платона, диалектика есть точный метод доказательства, и в диалогах Платона никогда не встречается иного метода доказательства, кроме опровержения принятых гипотез» (Ван дер Варден. Пробуждающаяся Наука. С. 206–207).

современными математическими выражениями, можем перечислить некоторые проблемы: (1) Мы хотим доказать, что $\sqrt{2}$ не рационален. Но прямое доказательство этому до сих пор не найдено. (2) Мы исходим из ложного предположения, что $\sqrt{2}$ рационален, и демонстрируем, что это предположение действительно ложно. Значит, мы доказали *противоположность* того, что мы должны были доказать. (3) Мы доказали не то, что $\sqrt{2}$ существует, но только то, что он не рационален, *если* существует. (4) Так как рациональные числа идентичны дробям целых чисел, и дроби целых чисел являются либо конечными, либо бесконечными, но периодическими десятичными дробями, то получается, что $\sqrt{2}$, если он не рационален, является бесконечной непериодической дробью, — но, разумеется, только при условии, что такое «число» вообще существует. (5) Наше доказательство не дает возможности полностью записать $\sqrt{2}$ в форме десятичной дроби. То, что мы видим или можем записать, это всегда лишь рациональные приближение. (6) Наше доказательство основано на действительности логического принципа *tertium non datur*, но этот принцип не применяется повсюду в математике, по крайней мере не в представлениях интуиционистов.

3.12. Аксиоматический метод

Греки довольно скоро пришли к выводу, что достигнуть несомненных результатов в математике можно только при условии совершенно четкого прояснения для самих себя предпосылок и значений используемых понятий. Поэтому Евклид начинает свои «Начала» списком определений, постулатов и общих понятий (аксиом).

В философии гениальным создателем аксиоматического метода был Аристотель[152]. Но уже Платон знал суть этого метода[153].

---

[152] См.: Scholz. Die Axiomatik der Alten. S. 27–44.

[153] «Наиболее важным вкладом древних греков в разработку основ математики были, вероятно, аксиоматический метод и понятие доказательства. На них настаивали еще в Академии Платона, а навысшего развития эти

В диалоге «Протагор» он показывает, как запутанна и бесплодна философская беседа о возможности научить добродетели, если заранее точно не договориться о том, что нужно понимать под добродетелью. Поэтому мы находим в конце диалога требование начать все сначала, однако в этот раз предварительно определить аксиоматическую основу[154]. Если это требование выполнено, можно относительно легко решить поставленную задачу[155].

Платон постоянно требует предварительных разъяснений исходного положения и уточнения используемых понятий и в философских диспутах:

> Во всяком деле, юноша, надо для правильного его обсуждения начинать с одного и того же: требуется знать, что же именно подвергается обсуждению, иначе неизбежны сплошные ошибки. Большинство людей и не замечает, что не знает сущности того или иного предмета: словно она им уже известна, они не уславливаются о ней в начале рассмотрения; в дальнейшем же его ходе это, естественно, сказывается: они противоречат и сами себе, и друг другу. Пусть же с нами не случится то, в чем мы упрекаем других[156].

идеи достигли в Александрии около 300 г. до н. э. в *Началах* Евклида. Эти понятия дошли до наших дней, подвергшись лишь некоторым косметическим изменениям» (Foundations of Mathematics // Encyclopædia Britannica Online).

154 Протагор. 361с: «Меня же, Протагор, когда я вижу, как все тут перевернуто вверх дном, охватывает сильное желание все это выяснить, и хотелось бы мне, после того как мы это разберем, разобраться и в том, что такое добродетель, и снова рассмотреть, можно ей научить или нет». См. также: Менон. 86d — «Если бы я мог повелевать не только собою, но и тобою, Менон, мы бы ни за что не стали исследовать, можно ли научиться добродетели или нельзя, прежде чем мы не нашли бы, что же такое сама добродетель».

155 Протагор. 360е–361а: «Да ведь я спрашиваю обо всем этом... только ради того, чтобы рассмотреть, как обстоит дело с добродетелью и что это такое — добродетель. Я знаю, если это будет раскрыто, тогда лучше всего выяснится и то, о чем каждый из нас держал столь длинную речь».

156 Федр. 237с.

В целом Платон придает большое значение строгости и ясности изложения как в математике, так и в философии. В «Федре», например, он различает два вида риторики: риторика как искусство и риторика как простое изготавливание. Только первой подобает имя науки, так как

> кто не учтет природные качества своих будущих слушателей, кто не сумеет различать существующее по видам и охватывать одной идеей все единичное, тот никогда не овладеет искусством красноречия настолько, насколько это возможно для человека. Достичь этого без усилий нельзя, и человек рассудительный предпримет такой труд не ради того, чтобы говорить и иметь дело с людьми, а для того, чтобы быть в состоянии говорить угодное богам и по мере сил своих делать все так, чтобы им это было угодно. Ведь те, кто мудрее нас с тобой, Тисий, утверждают, что человек, обладающий умом, должен заботиться о том, как бы угодить не товарищам по рабству — им разве лишь между прочим, — но своим благим владыкам, потомкам благих родителей. Поэтому, если путь долог, не удивляйся: ради великой цели надо его пройти[157].

Но крайне интересно, что Платон так же хорошо знал суть аксиоматического метода в математике. В «Государстве» мы находим следующее описание:

> Те, кто занимается геометрией, счетом и тому подобным, предполагают в любом своем исследовании, будто им известно, что такое чет и нечет, фигуры, три вида углов и прочее в том же роде. Это они принимают за исходные положения и не считают нужным отдавать в них отчет ни себе, ни другим, словно это всякому и без того ясно. Исходя из этих положений они разбирают уже все остальное и последовательно доводят до конца то, что было предметом их рассмотрения[158].

---

[157] Федр. 273e–274a.

[158] Государство. 510c–d.

Говоря другими словами, некоторые понятия и правила безоговорочно и без доказательств устанавливаются в начале рассуждения, и из них делаются выводы. Любопытно: если мы прочтем современное определение аксиоматического метода[159], то увидим то, что уже давно было проницательно обнаружено и описано Платоном. При этом нельзя забывать, что этот метод не есть вся математика, он лишь один, хотя и важный, ее аспект[160].

В параграфе 2.2 мы говорили об убеждении Платона в том, что статус философии выше статуса математики, и об этом мы будем говорить также в параграфе 4.7. Что касается аксиоматического метода и функций философии в этой сфере, обозначим здесь взгляды Платона в трех аспектах:

1) о самом методе;

2) о его сути;

3) о необходимости философского мышления в этом вопросе:

---

159 Например: «Аксиоматический метод — один из способов дедуктивного построения научных теорий, при котором: 1) выбирается некоторое множество принимаемых без доказательств предложений определенной теории (аксиом); 2) входящие в них понятия явно не определяются в рамках данной теории; 3) фиксируются правила определения и правила выбора данной теории, позволяющие вводить новые термины (понятия) в теорию и логически выводить одни предложения из других; 4) все остальные предложения данной теории (теоремы) выводятся из 1 на основе 3» (URL: http://www.moscow-faq.ru/articles/science/2008/December/3213).

160 «Математика рассматривается как доказательная наука. Но это лишь один из ее аспектов. Математика, представленная в готовом виде, выглядит как исключительно демонстративная. Она состоит только из доказательств. Но математика, находящаяся в стадии возникновения, равна любой другой форме человеческого знания в процессе становления. Нам приходится догадаться о какой-либо математической теореме, прежде чем ее доказать...» (Pólya. Mathematik und plausibles Schliessen. Band 1. S. 10). О принципиальной недостаточности аксиоматического метода при обосновании математики см.: Heitsch. Mathematik und Weltanschauung. S. 133.

1) В каждой точной науке при всех доказательствах необходимо устанавливать все предпосылки, на которых доказательство основывается.

2) Если дело состоит не просто в «формально правильной игре», а в поисках «истины», «правды», то необходимо раскрывать сущность этих предпосылок и объективное значение их бытия.

3) Математик как таковой не в состоянии выявить фундамент аксиоматического метода и «реальность» самих аксиом; это может сделать только философ-диалектик.

Глава 4.
Экскурсы

Непредвзятый читатель платоновских текстов зачастую встречается с местами, вызывающими у него сильные сомнения или даже откровенное несогласие. Наряду с этим в диалогах имеются и спорные вопросы, требующие дальнейшего обсуждения. Далее мы рассмотрим несколько подобных вопросов, что даст нам возможность понять мышление Платона и влияние математики на его философию еще чуть более точно.

4.1. К вопросу о мистике и эзотерике у Платона

В этом параграфе мы задаемся вопросами: отражались ли в мышлении Платона мистико-эзотерические представления и практики? Если да, то какую роль они играли? Каким образом и с какой целью Платон использовал в своих диалогах мифы? Далее: как он относился, например, к пифагорейскому мистицизму или к Элевсинским мистериям? Был ли он сам «посвященным»? Кроме того: представляла ли собой Академия «эзотерический клуб», т. е. доверял ли Платон самые важные основы своего учения лишь узкому кругу последователей? И последнее: если мы обнаружим у Платона действительно «мистические элементы», как увязать их с его математическими взглядами?[1]

---

[1] Если в дальнейшем мы говорим о *мистике* и о *мифах*, то, как известно, мистика — это особенная вера и практика, а миф — это «слово о богах и героях» (см.: Тахо-Годи. Греческая мифология. С. 8). Эти два понятия совокупно описывают область, отличную от повседневной жизни и не основанную на логически-разумных способностях человека.

Положительный аспект отношения Платона к мистике

На вопрос о том, существовали ли мистические элементы в мышлении Платона, некоторые авторы отвечают положительно. Бурбаки, например, пишет, что в трудах Платона «математика... постоянно используется в качестве иллюстрации или модели (и даже иногда дает пищу его склонности, как и склонности пифагорейцев, к мистицизму)»[2]. И. Яглом также говорит о мистических элементах в учении Платона, которые не смог принять «гораздо более трезвый ум» Аристотеля[3]. Мы не будем спорить, был ли ум Платона «менее трезвым», — может быть, он был просто «более открытым», особенно к формам мысли, связанным со сферами, лежащими вне узкого логически-рационального мышления. Поэтому Платон так часто использует мифологические сюжеты в своем творчестве, считая их полезными и правдоподобными. А. Тахо-Годи, подробно исследуя употребление мифов Платоном, установила: «Воображение, являющееся сутью мифа, имеет для Платона вполне положительный характер, никак не противореча истине»[4].

---

2 Бурбаки. Очерки по истории математики. С. 11–12.

3 Яглом. Математика и реальный мир. С. 26.

4 Тахо-Годи. Греческая мифология. С. 65. На положительном, более «богатом» характере мифического миропонимания — в отличие от научного миропонимания, склонного к ограниченному взгляду на объекты как «лишенные жизни» и с его манерой «идиотически повторять вечно порождение одного и того же рода актов» — настаивал Н. Лосский (Лосский. «Мифическое» и современное научное мышление. С. 44). Также положительный, но в то же время и критический, ограничивающий взгляд на мифы мы находим у Гегеля: «Миф есть всегда форма изложения, которая, принадлежа к более древней стадии, вносит чувственные образы, изготовленные для представления, а не для мысли. Но в этом мы должны видеть бессилие мысли, которая не умеет упрочиться самостоятельно и, таким образом, еще не есть свободная мысль. Миф есть одно из средств воспитания, так как он является приманкой, влекущей нас заняться содержанием. Но он затемняет мысль чувственными образами и поэтому не может выразить то, что хочет сказать мысль. Когда понятие достигает зрелости, оно больше не нуждается в мифе. Часто Платон говорит, что трудно выразить мысль об

Значительно также свидетельство Диогена, согласно которому Платон строил в Академии святилище муз[5]; в связи с этим стоит принять во внимание характер ландшафта и атмосферу, в которой Платон жил и работал: «Каждого, кто шел из Афин через пригород Керамик в Академию, охватывал трепет, ибо вся дорога была обрамлена каменными стелами, воздвигнутыми в честь выдающихся храбрецов, сражавшихся за свободу Афин на суше и на море. Философия и воспоминания о великих предках всегда соседствовали здесь, придавая оттенок особой значительности платоновской школе. В этом тихом уголке за пределами Афин, возле реки Кефиса, среди широколистых платанов и старых маслин, серебристых тополей и густых вязов там и здесь виднелись статуи муз и жертвенники этим богиням исскусства. Одно из масличных деревьев было столь древним, что афиняне почитали его вторым после той маслины, которую в городе посадила сама богиня Афина. Приспособления для гимнастических упражнений, оставшиеся от гимнасия, отнюдь не мешали статуям Прометея и Гефеста, Геракла и Эрота. Мудрый титан Прометей и не менее мудрый божественный мастер Гефест, многострадальный герой Геракл и крылатый бог Эрот, который, по словам Сократа, означает вечную устремленность, обитали под тенистыми деревьями на веселых лужайках. От жертвенника Прометею по старинной традиции начинался во время празднества в честь богини Афины и Прометея бег с факелами до города, тот самый, о котором Платон вспоминает в своем сочинении *Государство*»[6]. «Вначале Платон беседовал, прогуливаясь под деревьями в роще Академа, а затем в своем доме, где устроил святилище муз и так называемую экседру, залу для занятий»[7]. Этой созданной Платоном вполне «мистической» атмосфере Академии

этом предмете, и он поэтому расскажет миф, — это во всяком случае легче» (Гегель. Лекции по истории философии. С. 139).

5 DL. III, 1; IV, 18–19.

6 Лосев, Тахо-Годи. Платон — Аристотель. С. 44.

7 Там же. С. 46.

соответствуют некоторые места в его диалогах, например в «Федре»:

> Сияющую красоту можно было видеть тогда, когда мы вместе со счастливым сонмом видели блаженное зрелище, одни — следуя за Зевсом, а другие — за кем-нибудь другим из богов, и приобщались к таинствам, которые можно по праву назвать самыми блаженными...[8]

Оказывается, Платон, в отличие от своего учителя Сократа, настроенного совсем не мистически, одобрительно относился к мистическим сферам, он «восстанавливает миф, реактивируя некоторые тезисы орфизма и религиозные компоненты»[9]. Об этом положительном отношении Платона к мифам пишет Тахо-Годи: «Платон, как это хорошо известно, негодует на изображение и толкование мифов у Гомера или Гесиода, он критикует и осуждает их неблагочестивое мифотворчество (см. его "Государство") именно потому, что сам он вкладывает в слово "миф" весьма большой смысл и приписывает ему слишком значительное воздействие на отдельного человека и общество в целом»[10].

---

8 Федр. 250b.

9 Реале, Антисери: Западная философия от истоков до наших дней. Т. I. С. 100.

10 Тахо-Годи. Миф у Платона как действительное и воображаемое. С. 58. Стоит отметить: убеждение Платона, что мифы «имеют смысл», мы находим и у современных мыслителей. Физик-теоретик и философ Вайцзеккер описал значение мифов следующими словами: «Великий религиозный миф является способом ориентироваться в жизни и в мире. Миф в этом смысле является старейшим органом разума» (Weizsäcker. Die Sterne sind glühende Gaskugeln und Gott ist gegenwärtig. S. 90). Курт Гедель, знаменитый математик и логик, «во многом был, очевидно, довольно мистическим мыслителем, который верил, что все мы несем в себе часть космического духа, отделенного от материи, и с помощью этого духа мы в состоянии, по его мнению, обнаруживать математические истины, если мы ищем их правильным способом» (Barrow. Ein Himmel voller Zahlen. S. 192). Мордухай-Болтовской писал, что сущность важных проблем можно охватить только «переходя из сферы науки в сферу гипернауки, мистического опыта» (Мордухай-Болтовской. Философия — Психология —

Особенный подход Платона к мистике

Несмотря на все сказанное, мы не можем вообразить Платона подлинным мистиком. Настоящий мистик — это тот, кто кричит: «Как лань желает к потокам воды, так желает душа моя к Тебе, Боже»[11]. Такой крик — это «основной крик души всех мистиков. Изсохшее, истосковавшееся мое "я" хочет прикоснуться к Источнику. И в странных словах говорят мистики об этом, в странных, непонятных, в неожиданных, парадоксальных выражениях»[12]. Таких странных, непонятных слов мы не найдем у Платона. Если он переживал некий мистический опыт, то последний был рассмотрен и обработан его трезвым умом. Мифы также не играли для него фундаментальной роли, Платон просто *использовал* их, когда ему это было нужно — или когда ему казалось, что мифы могут выразить какой-то смысл лучше, чем рациональный дискурс, или когда он хотел обратиться прямо к сердцу и воле собеседников, так как «убеждать

Математика. С. 401). Эгмонт Колерус в своем труде по истории математики справедливо установил: «Блестящие умы должны быть комплексными натурами, прямо-таки нерациональными, иначе они не могли бы охватывать комплексную, нерациональную структуру мира» (Colerus. Von Pythagoras bis Hilbert. S. 207). И что касается развития математики, Колерус установил, что математика всегда должна была располагаться и действовать на краю метафизики и даже мистики, «иначе она не достигла бы самых блистательных вершин своего успеха» (Ibid. S. 353–354). В соответствии с этим нельзя отрицать мистические и экстатические переживания некоторыми людьми соответствующих образов и представлений. В своем большом труде о видениях Эрнст Бенц критиковал радикальную антимистическую позицию, заявив: «Наше нынешнее время так боязливо защищает себя от всех потрясений трансцендентного, что отправляет современных носителей визионерских способностей прямо в психиатрическую больницу, имея добросовестную цель — освободить их от визионерских "расстройств"...» (Benz. Die Vision. S. 17). Кстати, буквально это и случилось с Юлиусом Робертом фон Майером, который открыл закон сохранения энергии: его целый год держали в психушке, чтобы «вылечить» от таких безумных идей! (см. подробности: Locher-Ernst. Mathematik als Vorschule zur Geist-Erkenntnis. S. 213–223).

11 Псалом 41 : 2.

12 Арсеньев. Об избыточествующей жизни. С. 148.

же с помощью воображения (dia mythologias), вообще говоря, удобнее и легче, чем с помощью поучения (dia didaches, Политик. 304c)»[13]. Этому самостоятельному и выборочному подходу соответствует тот факт, что в платоновских диалогах слово «миф» имеет разные оттенки, «то совершенно нейтральные то, наоборот, чрезвычайно напряженные смысловым образом»[14]. Например, под категорию мифа могут подпадать и «чисто философские построения (Теэтет. 164e; Горгий. 493d)»[15].

Можно спросить: почему бы не отказаться от «мифологической» речи и не говорить только «прямо и здраво»? Платон ответил бы так: иногда это очень трудно или вообще невозможно. Если мы, например, спрашиваем, «какова душа, — это всячески требует божественного и пространного изложения, а чему она подобна — это поддается и человеческому, более сжатому; так мы и будем говорить»[16]. Поэтому Сократ продолжает свое изложение о природе души таким образом: «Уподобим душу соединенной силе крылатой парной упряжки и возничего...»[17] Как правильно констатировал Мурелатос: «Согласно Платону, соответствующие средства в натурфилософии — это, на самом деле, приемы мифического высказывания и математической метафоры»[18]. Эти средства можно успешно использовать, потому что, «несмотря на вымысел и даже

---

13 Тахо-Годи. Миф у Платона как действительное и воображаемое. С. 59.

14 Там же. С. 58–59. Тем не менее, как замечает Тахо-Годи, эти разные тексты «свидетельствуют иной раз о противоречивых и даже на первый взгляд исключающих друг друга представлениях, сохраняя, однако, в глубине своей поразительное единство и свидетельствуя об удивительной целеустремленности мысли Платона».

15 Там же. С. 66.

16 Федр. 246a.

17 Там же. В 244d Сократ даже не отрицает, что иногда неистовство, если оно дано людям богами, прекраснее рассудительности, человеческого свойства. Но такое неистовство не означает погружения в мистическое, неразумное состояние.

18 Mourelatos. Knowledge, Speculation, and Myth in Plato's Accounts of the Order and the Distances of Celestial Bodies. P. 102.

на "словесную ложь"... миф содержит всегда нечто истинное... нечто правдоподобное... Облик мифа... не лишенного лжи, ничуть не мешает его внутренней правде...»[19].

Но даже если мы не можем отказаться от «мифологической» речи, нужно понимать, что мифы имеют свои границы и «недостатки». Тахо-Годи пишет: «Платон, сам обладая мастерством аналитика, явно чувствует недостаточность мифа, когда философу приходится прибегать к настоятельным доказательствам и убеждениям. Не раз вполне очевидно он резко противопоставляет воображение и вымысел мифа размышлениям и рассуждениям того словесного высказывания, которое по-гречески именуется "логосом"»[20]. И далее: «Когда Платону требуется привести тщательно подобранную аргументацию для доказательства выдвинутого тезиса, а не вдохновенно расточать живописные подробности, герои его диалогов упорно и систематично именуют свои самые смелые и невероятные построения логосом»[21]. Например, «рассказ о людях-куклах в руках богов (Legg. I 644c–645b) в своем чистом беспримесном виде именуется мифом (645b), но, как только кончилось его изложение и вступила в силу связь с общим ходом мысли, с анализом главной темы, он тут же получает название "размышления" (logismos) или "рассуждения" (diatribe 645c)»[22].

---

[19] Тахо-Годи. Миф у Платона как действительное и воображаемое. С. 60–61.

[20] Там же. С. 70.

[21] Там же. С. 72.

[22] Там же. С. 73. Задача мифа состоит в том, чтобы «вывести жизнь на пути объяснения ее закономерностей, стремиться и ее, и человеческую практику осознать вне всякой магии, направить ее разумно и целесообразно. Вот почему, как это ни парадоксально, миф не существует без функций мышления, но само же мышление призвано этот миф признать несостоятельным и избавиться от него. Отсюда — извечное слияние и извечная борьба мифа и мышления в течение тысячелетий, отсюда же — задача науки изучить развитие человеческого мышления, идущего сначала по путям мифологического освоения жизни, а в дальнейшем вступающего в противоречие с мифом, отрицающего миф и развивающегося в борьбе за самостоятельность» (Там же. С. 11).

Действительно, снова и снова мы видим, как Платон использует мистические выражения, придавая им при этом особенный смысл, подчиняя их разумному мышлению. В «Теэтете», например, он говорит, что зло существует только на земле, но не у богов, поэтому «следует пытаться как можно скорее убежать отсюда туда», уподобившись богу. Но такое бегство невозможно путем мистических ритуалов. Уподобиться богу, по Платону, «значит стать разумно справедливым и разумно благочестивым»[23]. Другой пример приводит Асмус: «На первый взгляд может показаться, будто, заговорив о "припоминании", Платон покидает почву трезвого философского исследования и всецело отдается во власть мифотворческой фантазии… Но в оболочке этого мифа выражено и философское содержание. Это мысль о связи всех знаний, которая отражает всеобщую связь всех вещей»[24].

Сплошь и рядом мы находим у Платона убеждение, что не экстатическое состояние, а диалектический процесс позволяет вникнуть в истинную природу вещей. Например, в «Федоне» Платон говорит, что Сократ в один прекрасный день услышал человека, который читал отрывок из книги Анаксагора, утверждая, что, согласно Анаксагору, *разум* упорядочивает все, являясь причиной всех вещей. Это чрезвычайно понравилось Сократу, который надеялся с помощью учения Анаксагора достичь понимания строения Вселенной[25]. В «Государстве» мы читаем про узоры на небе, украшающие область видимого, что «это постигается разумом и рассудком, но не зрением»[26].

---

[23] Теэтет. 176a–b.

[24] Асмус. Платон. С. 73–75.

[25] Федон. 97c: «Однажды мне кто-то рассказал, как он вычитал в книге Анаксагора, что всему в мире сообщает порядок и всему служит причиной Ум; и эта причина мне пришлась по душе, я подумал, что это прекрасный выход из затруднений, если всему причина — Ум. Я решил, что если так, то Ум-устроитель должен устраивать все наилучшим образом…»

[26] Государство. 529c–d. Этот «трезвый ум» Платона не всегда признавался исследователями. Так, Мурелатос замечает относительно астрономических рассуждений в «Государстве» и «Тимее» (38) следующее: «Историки науки

Довольно удачно описывает ситуацию Д. Реале: «Для него [Платона] миф есть нечто большее, чем фантазия, миф — выражение веры и доверия. Во многих диалогах, от "Горгия" и дальше, мы видим желание некой формы рациональной веры: миф ищет разъяснения в логосе, а логос хочет найти завершение в мифе. Платон, значит, верит в силу мифа, когда разум достигает своих пределов и крайних возможностей, он интуитивно превозмогает эти границы, поднимая дух в его трансцендирующем усилии. Кроме того, необходимо заметить, что миф, употребляемый Платоном систематично, существенно отличается от дофилософского мифа, не знавшего логоса. Речь идет о мифе, который... есть более чем восторг фантазии, выражение веры, но еще более того, миф, который не подчиняется логосу как таковому, но дает стимул последнему. Это миф, который в процессе сотворения выступает демифологизированным, а от соприкосновения с логосом сбрасывает свои фантастические элементы, удерживая при этом силу аллюзии, намека и эвристической интуиции»[27].

Платон и пифагорейский мистицизм

Пифагорейский мистицизм, несомненно, оказал влияние на платоновскую философию. Младший пифагореец Филолай, например, дружил с Платоном и продал ему, как говорят[28], три пифагорейские книги, тем самым сподвигнув его к написанию диалога «*Тимей*», который можно назвать «пифагорейски окрашенным»[29]. При этом

часто осуждали Платона за предложенную им чисто умозрительную модель расстояний семи планет. На самом деле, предложенные им спекулятивные намеки так осторожны, так уклончивы, так со всех сторон подстрахованы, и так открыто символичны, что это порицание совершенно необоснованно» (Mourelatos. Knowledge, Speculation, and Myth in Plato's Accounts of the Order and the Distances of Celestial Bodies. P. 96).

27 Реале, Антисери. Западная философия от истоков до наших дней. Т. I. С. 100–101.

28 «Диону в Сицилии он [Платон] поручил купить у Филолая три пифагорейские книги за сто мин» (DL. III, 9).

29 Pichot. Die Geburt der Wissenschaft. S. 332.

важно, что пифагорейская мистика и ее мифы не были расплывчатым пристрастием к сверхъестественному познанию или экстатическими практиками; более правильно говорить вместе с В. А. Шапошниковым о «мифе математическом»[30]. Д. Ричсон пишет: «Что выделяет пифагорейцев, так это их способы очищения ума. Они добивались очищения не через медитацию, а путем изучения математики и естествознания. Предельное единение с Божеством, как утверждалось, проистекает из понимания порядка Вселенной, а ключом к пониманию Вселенной было понимание математики»[31]. Тот факт, что группа математиков играла значительную роль в пифагорейском союзе, не позволил пифагорейцам полностью погрузиться в иррациональную мистику. Поэтому Пишо справедливо говорит о «математическом рационализме» пифагорейцев, отмечая их «замечательный вклад в рождение и развитие математики»[32].

Этот рациональный аспект пифагореизма был созвучен идеям Платона. А там, где взгляды и обычаи пифагорейцев являлись действительно мистически-эзотерическими, Платон обходился с

---

30 «Мифология "Тимея" насыщена математическими элементами. Это не просто миф, но *миф математический*» (Шапошников. Математическая мифология и пангеометризм. С. 141).

31 Richeson. Euler's Gem. P. 38.

32 Pichot. Die Geburt der Wissenschaft. S. 398. Правда, Аристотель критиковал стремление пифагорейцев видеть в числах основу всего существующего, которое приводило их к необоснованным экстраполяциям: «Они видели, что свойства и соотношения, присущие гармонии, выразимы в числах; так как, следовательно, им казалось, что все остальное по своей природе явно уподобляемо числам и что числа — первое во всей природе, то они предположили, что элементы чисел суть элементы всего существующего и что все небо есть гармония и число. И все, что они могли в числах и гармониях показать согласующимся с состояниями и частями неба и со всем мироустроением, они сводили вместе и приводили в согласие друг с другом; и если у них где-то получался тот или иной пробел, то они стремились восполнить его, чтобы все учение было связным» (Аристотель. Метафизика. A5. 985b32–986a7). Но подобное стремление приводить реальность в соответствие предвзятой теории не является само по себе следствием мистических взглядов и часто свойственно совершенно не мистическому мировоззрению.

ними *по-своему*, далеко уходя от «орфического духа». Я. Мансфельд говорит в этой связи о «решающем переосмыслении»[33], а Г. Раппе — о «радикальной переделке»[34] пифагорейских мистических взглядов у Платона. К. Бретшнейдер также считал, что Платон «обладал слишком ясным духом и был в достаточной степени эллином, чтобы довольствоваться только пифагорейской мистикой и символикой», но «охотно признавал подчеркнутую Пифагором важность точных исследований, в особенности математических, в качестве подготовительной школы абстрактного мышления и основы для всего спекулятивного познания»[35]. Итак, то, что Платон заимствовал от пифагорейцев, можно назвать «трезвым мистицизмом».

Интересно также, как Платон относился к решающим аргументам пифагорейцев. Они говорили: небесные тела божественны, следовательно, они передвигаются точно и гармонично. Платон переворачивает эту аргументацию: небесные тела двигаются точно, гармонично, благоразумно, следовательно, они божественны. Другими словами, для пифагорейцев предпосылка аргумента — это мистическое видение божественности небесных тел; у Платона предпо-

---

33 Mansfeld. Die Vorsokratiker I. S. 99: «В платоновской школе пифагорейские мысли... были приняты и развивались, но при этом были решительно переосмыслены».

34 «Идея возрождения в связи с представлениями о переселении душ считается исходящей от Пифагора, и влияние пифагорейцев на Платона вполне вероятно. Тем не менее следует не упускать из виду радикальную переделку этих представлений в концепции Платона» (Rappe. Archaische Leiberfahrung. S. 235).

35 Bretschneider. Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. S. 138. О'Миара интересно пишет о том, как Прокл видел отношения Платона с пифагореизмом: главные аспекты платоновской теологии, математики и физики «можно сводить к пифагореизму», но Платон все равно не является просто его представителем. «Уникальное место Платона было снова подчеркнуто чуть позже [в *Платоновской Теологии* 13,8 и далее], где Прокл утверждает, что теологию Платона отличает от теологии орфиков, пифагорейцев и халдеев именно ее *научный характер*» (O'Meara. Pythagoras Revived. P. 148; курсив мой).

сылка — это обучение математике, с помощью которой мы осознаем, что планеты передвигаются по математическим правилам[36].

Платон и Элевсинские мистерии

Мы говорили о *пифагорейском* мистицизме. Но существовали также Элевсинские[37] и другие древние мистерии, многие из которых своими корнями уходили в религиозные культы древнего Египта и Вавилона. Может быть, они имели большее влияние на Платона?

Здесь, прежде всего, надо осознать, что мы знаем крайне мало достоверного о древних мистериях и религиозных убеждениях вообще. Как замечает немецкий ученый Нейгебауер, распространенное представление о том, что большинство древних документов связаны с религией, магией или числовой мистикой, является необоснованным»[38]. Что касается Элевсинских мистерий, значительная часть этих обрядов никогда не была зафиксирована письменно[39], поэтому достоверных сведений не достаточно, чтобы оценить влияние мистерий на взгляды Платона.

Тем не менее ряд исследователей подобное влияние допускают. Так, С. Поздняков считает, что Платон «достаточно широко использовал образы мистерий для выражения собственных идей, а

---

36 Такой образ мышления мы находим две тысячи лет спустя у Кеплера. У него есть и мифологические элементы, но он отстраняется, находя в них и разумное содержание: «Вы можете видеть, что его [Фладда] главная радость состоит в непонятных, загадочных картинах действительности, в то время как я стремлюсь пролить яркий свет познания именно на факты природы, скрытые во тьме. Первое — это дело химиков, герметиков и парацельсов, а второе — задача математиков» (Kepler. Weltharmonik. S. 362).

37 Подробное описание этих мистерий у Элиаде: История веры и религиозных идей: От каменного века до элевсинсих мистерий. С. 258–267; подробнее см.: Кереньи. Элевсин –Архетипический образ матери и дочери.

38 Neugebauer. The Exact Sciences in Antiquity. P. 18.

39 «Письменные и изобразительные свидетельства относились главным образом к первым ступеням посвящения, которые не требовали соблюдения секретности» (Элиаде. История веры и религиозных идей: От каменного века до элевсинских мистерий. С. 261).

аллюзии на их тему встречаются во многих платоновских диалогах»[40]. Как полагают многие историки, элевсинские мистерии имели огромную роль в жизни древних греков. «Ничто не может сравниться с чувством глубокого благоговения, которое испытывали к Элевсинским мистериям самые серьезные умы древнего мира, философы, государственные мужи, ораторы, историки и поэты. Начиная от Пиндара и до Платона, от Исократа и до Цицерона, все согласно признают, что мистерии глубоко влияли на души людей»[41].

Но опять возникает вопрос, как Платон использовал те знания и опыт, которые он, возможно, имел в этой сфере. И мы снова увидим, что он обращался с ними свободно и своеобразно. С одной стороны, платоновский Сократ неоднократно говорит о «внутреннем голосе», т. е. о неком мистическом опыте[42]; он также утверждает, что «прорицательница в Дельфах и жрицы в Додоне в состоянии неистовства сделали много хорошего для Эллады — и отдельным лицам и всему народу, а будучи в здравом рассудке, — мало или вовсе ничего»[43]. Это значит, что Платон не считал заслуживающим уважения лишь «сухой, односторонний разум»; он признавал, что настоящее знание может быть получено и из мистических переживаний, поэтому истинный мудрец знает, например, что надо молиться[44]. Так, Платон пишет, что «только человек...

---

40 Поздняков. Платон и Элевсинские мистерии.

41 Шарль Диль; цит. по: Мень. История религии. Т. IV. С. 37.

42 См., например: Федр. 242b–c — «Лишь только собрался я, мой друг, переходить речку, мой гений подал мне обычное знамение, — а оно всегда удерживает меня от того, что я собираюсь сделать: мне будто по́слышался тотчас же какой-то голос, не разрешавший мне уйти, прежде чем я не искуплю некий свой проступок перед божеством».

43 Федр. 244b.

44 См., например: Федон. 117с: «Но молиться богам и можно и нужно»; Филеб. 61b: «Так начнем же смешивать, Протарх, вознося молитву — Дионису, Гефесту или другому богу, чей почетный удел — это смешение»; Государство. 327а: «Вчера я ходил в Пирей вместе с Главконом, сыном Аристона, помолиться богине»; Законы. 687d: «Для дорогих нам людей мы

всегда посвящаемый в совершенные таинства, становится подлинно совершенным»[45]. Но, как мы уже сказали выше, при всем этом ум не теряет свою определяющую роль, поскольку даже «занебесная область», к которой всегда стремились мистики всех времен и народов, по Платону, зрима лишь «кормчему души — уму»[46].

Итак, между учением Платона и соответствующими мистическими учениями обнаруживаются «не только типологические и доктринальные параллели, но и существенные смысловые отличия... В "Федре" Платон говорит о нескольких путях приобретения углубленного религиозного опыта, среди которых прорицательство, птицегадание, очистительные ритуалы и молитвы, а также поэзия, которая "охватывает нежную и непорочную душу" в творчестве. [Но] все они сильно уступают наивысшей форме исступления души — прозрению вечной истины через философию»[47].

После Платона

Ученики и последователи Платона довольно скоро стали развиваться в совсем другом направлении, нежели их учитель. Когда мы читаем, например, «Послезаконие» Филиппа Опунтского, то чувст-

---

в наших молитвах просим того же, чего они просят сами себе»; Тимей. 27b: «Что ж, Тимей, тебе, кажется, пора говорить, по обычаю сотворив молитву богам»; Федр. 279b: «Разве не следует помолиться перед уходом?»

45 Федр. 249c.

46 Там же. 247c: «Занебесную область не воспел никто из здешних поэтов, да никогда и не воспоет по достоинству. Она же вот какова (ведь надо наконец осмелиться сказать истину, особенно когда говоришь об истине): эту область занимает бесцветная, без очертаний, неосязаемая сущность, подлинно существующая, зримая лишь кормчему души — уму; на нее-то и направлен истинный род знания».

47 Поздняков. Платон и Элевсинские мистерии. См. также суждение Кереньи: «Говоря о *telete*, *myesis*, *epopteia* и "счастливых *phasmata* в своем рассказе об этом высшем *visio beatifica*, Сократ подтверждает созерцание видений в Телестерионе Элевсина». Все равно эти видения «не удовлетворили философа, и поэтому он указывает на их призрачный, расплывчатый характер» (Кереньи. Элевсин — Архетипический образ матери и дочери. С. 117).

вуем себя перенесенными в совсем другой мир по сравнению с диалогами Платона[48]. Ван дер Варден замечает, что в математическом отрывке «Послезаконий» находится «совершенно ясный мистический элемент… Здесь речь идет совсем не о трезвом естествознании, но о мистическом единении с божественным творцом новопосвященного, которому стали известны тайны чисел и гармонии»[49]. Таким же образом Спевсипп, племянник Платона и его преемник на посту главы Академии, вновь обратился к мистической

---

[48] См., напр., следующее пессимистичное рассуждение о мире в целом: «Каждому живому существу с самого начала тяжко появиться на свет. Прежде всего тяжело быть причастным утробному состоянию, затем идет само рождение, далее взращивание и воспитание; все это, как мы признаем, сопряжено с тысячью тягот. Жизнь наша краткотечна, даже если не принимать в расчет каких-то особых бедствий, но лишь такие, что выпадают на долю каждого в скромных размерах. Краткотечность эта позволяет человеку свободно вздохнуть только, как кажется, в середине его жизни. А быстро подступающая старость заставляет каждого, кто только не преисполнен детских чаяний, отказаться от желания вновь возвратиться к жизни, ведь человек принимает в расчет прожитую им жизнь» (Послезаконие. 973d–974a). В целом Филипп довольно сильно склоняется к идеям пифагорейцев; это видно, например, в следующем отрывке: «Но что действительно удивительно и божественно для вдумчивого мыслителя, так это присущее всей природе удвоение числовых значений и обратное ему отношение, что наблюдается во всех видах и родах [вещей]» (990e). Также пифагорейская идея об исключительности снова начинает играть довольно важную роль: «Впрочем, и сейчас остается в силе наше первоначальное правдивое утверждение, что людям, за редким исключением, невозможно стать совершенно блаженными и счастливыми: это было правильно нами указано. Но люди божественные, рассудительные и причастные по своей природе всей остальной добродетели, а вдобавок еще овладевшие всем, что имеет отношение к блаженной науке (мы уже указали, в чем это состоит), — такие люди, и только они одни, получают в удел обладание всеми божественными дарами» (992c–d).

[49] Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 218. Кажется, что Платон не избегнул той же участи, что и его учитель математики Архит Тарентский, которого в поздней Античности связывали с таинственно-эзотерическим аспектом пифагорейской традиции. В Средние века Архита представляли и одним из великих мудрецов Античности, и даже магом!

нумерологии пифагорейцев[50]. И это направление, которое позже приняло форму неоплатонизма[51], оказалось долговечным — вспомним, например, Николая Кузанского[52] или, из Новейшего времени, Михаэля Штельцера[53]. Но сам Платон, если можно так сказать, не был неоплатоником...

---

50 Псевдо-Ямвлих цитирует в своих «Theologoumena arithmeticae» отрывок из работы Спевсиппа о значении чисел. Здесь очевидно, что Спевсипп вновь ориентируется на пифагорейцев, и его не отпугивают «мистические аналогии». (См.: Pichot. Die Geburt der Wissenschaft. S. 375–377).

51 Для Плотина экстатическое переживание в принципе означало вершину познания, он говорил так: «А потом, поднятая как бы на волне Ума еще выше, она вдруг усматривает что-то, сама не ведая, что и как. В этом своем видении она чувствует одно, что ее взор наполнен светом, но вне себя чего-нибудь другого она не видит; видит один свет — и больше ничего» (Плотин. Эннеады. VI, 7, 36). Математика играла у Плотина подчиненную роль; Порфирий пишет: «Он (Плотин) вовсе не был незнаком с тезисами геометрии и арифметики, механики, оптики и музыки; практически применять их, однако, ему не было дано» (Порфирий. Жизнь Плотина. 14).

52 Николай Кузанский всю свою жизнь занимался математикой, но не ради нее самой, а для того, чтобы получить аргументы и образы для своих богословских изложений. Смотри, например, созерцание «бесконечного треугольника» и его переложение на «самую большую Троицу» (Об ученом незнании. I, 19): «Все это ясно видно на нашем примере, где простейшая линия есть треугольник, и наоборот, простой треугольник есть линейное единство. Здесь видно также, что сосчитываться на счет "один", "два", "три" углы треугольника не могут, раз каждый находится в любом другом. Как говорит Сын Божий: "Я в Отце, и Отец во Мне". С другой стороны, истина треугольника требует, чтобы углов было три, а значит, здесь поистине и три угла, и каждый — максимальный, и все — один максимум. Истина треугольника требует, сверх того, чтобы один угол не был другим; так же и истина единства простейшей сущности требует, чтобы три не были какими-то различными тремя, а одним, так что это тоже здесь истинно. Соедини видимые противоположности в предшествующем им единстве, как я сказал, и получишь не один да три или наоборот, а триединое, или едино-троичное. И это — абсолютная истина».

53 См. такую цитату о смысле числа 6: «Тяга к сладкому и сексу является архетипичной. Каждой конкретно существующей части присуще стремление к слиянию. Смысл частей заложен в завершающей цели слияния. Есть, конечно, различие степени ступенчатости в зависимости от "степени сознания" частей. Даже у камня есть стремление к синтезу. Но если у

Некоторые цитаты

Добавим в качестве некого предварительного результата вышесказанного некоторые цитаты. П. Наторп пишет в своем большом комментарии к Платону, что, конечно, можно принять рискованную гипотезу, что Платон пришел к своим трансцендентным убеждениям исходя из идей Гераклита, Пиндара, Эмпедокла, учений мистерий и пифагорейцев, но при этом важно, что Платон «благодаря решающему влиянию Сократа подчинил себя науке, воспитавшей его методом серьезного самоконтроля, и счел своим основным долгом основательно трудиться, дабы обрести уверенность в этой области, и в течение этого времени он возложил на себя суровое бремя воздержания от высказывания своих внутренних религиозных убеждений — от которых, таким образом, только иногда и почти нечаянно что-то проступает — до тех пор, пока он не приобретет уверенности в себе для выступления с этими убеждениями...»[54]. Ван дер Варден установил, что диалектический процесс Платона совершенно свободен от элементов мифа[55].

камня вследствие его тяжести это выражается в стремлении к центру земли, то в живом и растительном мире это ведет с помощью сладкого к эротическому миру человека. Удовлетворение художника в создании своих произведений и расчеты математика не что иное, как различные формы выражения принципа шесть/секс (Sechs/Sex). Для разных людей сладкое различается. Формы различны, а принцип тот же самый. В числе 6 даются простые ответы на такие глубокие вопросы, как смысл жизни» (Штельцер. Символика Чисел. С. 86). Русское издание, кстати, содержит только первую часть оригинального труда: Stelzer. Die Weltformel der Unsterblichkeit. В нем обсуждаются и Платоновы тела в аспекте применения их «символического содержания» к мировоззренческим вопросам.

54 Natorp. Platos Ideenlehre. S. 528. См. также примечательное место в Федре (247c): «Занебесную область не воспел никто из здешних поэтов, да никогда и не воспоет по достоинству. Она же вот какова (ведь надо наконец осмелиться сказать истину, особенно когда говоришь об истине)...»

55 «По собственным словам Платона, диалектика есть точный метод доказательства, и в диалогах Платона никогда не встречается иного метода доказательства, кроме опровержения принятых гипотез» (Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 206–207).

А. Ф. Лосев пишет: «Учение Платона об ипотезе, методе и законе не имеет ничего специфически идеалистического и уж тем более ничего мистического»[56]. М. Колло-Страйт приходит к следующему выводу: хотя Платон и использовал мистериальную терминологию, он преобразовывал ее и полностью ставил на службу своим высказываниям. Правда, Платон выражался и следующим образом: «Только человек... всегда посвящаемый в совершенные таинства, становится подлинно совершенным»[57]. Но что означает такая формулировка? Думаю, вот что: «В момент воспоминания душа находится в менее тесном контакте с телом, зато она ближе к разумному, на которое она похожа (ср.: Федон. 78b–84b) и по которому она тоскует. Действительная чистота человека, следовательно, достигается не очистительными обрядами Элевсинских мистерий, но активностью nous... Подлинно "восторженными" являются для Платона не те, кто прошел всевозможные ритуалы очищения; *"вакханты" здесь, на мой взгляд, не кто иной, как только истинные философы* (Федон. 249c)»[58].

---

56 Лосев. Платоновский объективный идеализм и его трагическая судьба. С. 13. См. также следующие замечания Лосева о «Федре»: этот диалог «обычно понимают слишком мистически и мифологически, слишком эротически. На самом же деле весь диалог там ставит своей целью определение того, что такое настоящая риторика и как в ней упражняться (Phaedr. 228bc, e). И действительно, те три речи, которые составляют центральное содержание диалога, рассматриваются просто как примеры риторического построения, и весь конец диалога (257c–279c) только и посвящен теории риторики. В этой теории содержатся весьма важные рассуждения, которые не имеют никакого отношения ни к эросу, ни вообще к мифологии, ни к идее прекрасного. Например, выставляется требование давать истинные определения того, чему будет посвящена речь (259e–260c); что есть подлинное, а не ложное бытие (260a, 262c); что нужно все возводить к одной идее, а идею уметь разделять на виды вплоть до неделимого вида (265d–266a); что диалектика и представляет собой умение возводить частное к общему и из общего выводить частное (266bc). Где же здесь объективный идеализм, где тут мистика, мифология?» (Там же. С. 15).

57 Федр. 249c.

58 Colloud-Streit. Fünf platonische Mythen im Verhältnis zu ihren Textumfeldern. S. 144. Ср. также размышления Гегеля: «Платон, таким образом, при-

Намного раньше к такому же результату пришла Ева Сакс. Она тщательно изучила теорию элементов в «Тимее» и выявила: 1) что Платон в этом диалоге внес исправления в теорию элементов атомистов; 2) что его изложение абсолютно лишено пифагорейской символики; 3) что вместо нее он использовал математические инструменты, которые подсказало ему новое стереометрическое открытие Теэтета. Сакс пишет: «В то время как все считали "Тимей" в целом "физической сказкой", в которой остроумные эстетствующие конструкции заключили союз с таинственным пифагорейским мистицизмом, неожиданно появилось понимание, что в "Тимее" содержится настоящее естествознание... Туман пифагорейского мистицизма, которым окутан "Тимей", является произведением наследников Платона, начиная с Спевсиппа, Ксенократа, Филиппа. Они повинны в этом неоднократном недоразумении и некотором искажении, они превратили науку в мистицизм, и они видели в мифе откровение истины»[59].

писывает пророчество неразумной, телесной стороне человека, и, хотя часто думают, что у Платона пророчество и т. д. приписывается разуму, это все же неверно; пророчество, говорит он, есть некий разум, но разум в неразумии. "Достаточным доказательством того, что Бог дал дар пророчества именно человеческому неразумию, служит тот факт, что никакой человек, обладающий своим разумом, не делается причастным божественному и истинному пророчеству, а получает дар такого пророчества человек лишь тогда, когда или сила его ума во сне скована, или тот человек, который благодаря болезни или одержимости впал в безумие". Платон, следовательно, объявляет ясновидение более низкой способностью, чем сознательное знание. "Разумный же лишь должен объяснять и толковать такое пророчество; ибо тот, кто еще находится в состоянии сумасшествия, не может его обсудить. Хорошо поэтому было сказано еще в древние времена: делать свое и познавать самого себя свойственно лишь разумному человеку". Платона делают патроном голой восторженности. Как видим, это совершенно неверно» (Гегель. Лекции по истории философии. С. 199).

59 Sachs. Die fünf platonischen Körper. S. 6–7. Это суждение поддерживается Ван дер Варденом, который пишет: «Магия чисел относится к области магии, а мистика чисел — к мистике... Неопифагорейцы вроде Никомаха Геразского (*100 г. н. э.*) и *Ямвлиха* (*300 г. н. э.*) *наслаждаются* такой мистикой чисел. Ямвлих в своем "Арифметическом богословии" без конца

И наконец, обратимся к А. Тахо-Годи: «Миф, в котором слиты воедино мысль и воображение, который устремлен в будущее и ощущается некоей достоверной реальностью, конструируется Платоном, можно сказать, по типу его вечных идей. Он — образец (paradeigma) и даже "образец образца" (paradeigmatos paradeigma) для разных типов действительности. И эта его действительность устремлена и нацелена в будущее вопреки всем стародавним традициям, которые всегда идеализировали и мифологизировали прошлое. Платон, философ и поэт, уверенно возводит здание своей идеальной мечты, своего мифа об абсолютном благе, добре и красоте, в чем бы они ни воплощались — в науке, обществе, морали или законодательстве, оставаясь, однако, утопией, осуществленной теоретически, чисто умозрительно»[60].

Об «эзотерическом характере» платоновской философии

Но остается еще один вопрос: была ли платоновская философия особенным учением для узкого круга приверженцев? Тахо-Годи замечает о пифагорейцах: «По их примеру занятия были двух типов: более общие, для широкого круга слушателей, и специальные, для узкого кружка посвященных в тайны философии»[61]. Эти «специальные» занятия можно понимать вполне нейтрально, ведь в каждой науке есть области, доступные только кругу избранных. Но уже Диоген Лаэртский привнес свою оценку, когда писал, что «словами Платон пользовался очень разными, желая, чтобы его учение не было легкоуяснимым для людей несведущих»[62]. А современные

говорит о мистическом и божественном значении чисел» (Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 133–134). См. также следующее замечание Ван дер Вардена: «Ямвлих упоминает его [Феодора] в своем Каталоге пифагорейцев, но это не много нам говорит, ибо Ямвлих был фантазером и склонен был причислить к пифагорейцам всех знаменитых математиков. Поэтому будем лучше держаться Платона...» (Там же. С. 197).

60 Тахо-Годи. Миф у Платона как действительное и воображаемое. С. 82.

61 Лосев, Тахо-Годи: Платон — Аристотель. С. 45.

62 DL. III, 38. О «несведущих» А. Шопенгауэр писал: «Невероятно большое число людей по своей природе решительно неспособно к каким-нибудь

писатели судят еще более резко: «Стремление научно охватить философию Платона может представлять собой более чем трудную и в конечном счете неудачную затею, так как подобные исследования относятся в большинстве случаев только к внешней оболочке его учения и достигают ядра лишь в особых случаях. Но именно это ядро и является самым интересным, потому что то, что Платон представил и описал завуалированным образом в своей "официальной философии", было, на самом деле, мистическим опытом. Точка зрения Платона — это точка зрения мистика, который осознавал, как все мистики, что такой опыт в конечном счете не может быть описан словами»[63]. К. Олер, безусловно опытный платоновед, также говорит о «специальной эзотерической доктрине Платона», которая представляет самую суть его философии; диалоги, напротив, являются лишь очень эффективным средством общественной работы Академии, «рекламной литературой с одновременно пропедевтическо-протрептической[64] и политической функцией, которая документирует намерения Платона по изменению общества и его политические обязательства»[65]. В. Еремеев пишет следующее: «Крайняя туманность изложения, касаю-

---

иным целям, кроме материальных, и даже не может понимать других целей. Поэтому стремление только к истине слишком велико и эксцентрично, чтобы можно было ожидать, будто все, будто многие, будто просто даже некоторые искренне примут в нем участие» (Мир как воля и представление. Предисловие ко второму изданию).

63 Mooser. Evolution — Gott, Zufall oder Geist? S. 192.

64 В греческой риторике «протрептическая речь» означает «убеждающая, склоняющая на свою сторону речь» (Мочалова. Метафизика ранней академии и проблемы творческого наследия Платона и Аристотеля. С. 230).

65 Oehler. Der entmythologisierte Platon. S. 92. Олер рекомендует вспомнить, «что вы чувствовали, когда впервые читали платоновские диалоги, или что вы чувствуете, если после чтения текстов Аристотеля снова читаете диалоги Платона. Это чувство одураченности, это ощущение, что тот, кто знает "все", намеренно держит вас в состоянии человека, который знает разве что чуть больше чем совсем ничего...» Однако он противоречит сам себе, ведь если у читателя действительно создается *такое* впечатление, то платоновские диалоги были плохой рекламой для Академии!

щегося важных мест, прежде всего, с "математическими" высказываниями... была призвана, видимо, скрывать смысл написанного от непосвященных»[66].

Но это мнение о существовании «тайного учения» Платона разделяют далеко не все исследователи. Чернисс, например, детально занимался этим вопросом и пришел к выводу, что такого тайного учения не было и что в диалогах представлена вся философия Платона[67]. Об этом рассуждал и Вайцзеккер: Платон в «Тимее» явно намекает на то, что он о чем-то умалчивает, «так как он, очень загадочно, вводит несколько предложений с точными утверждениями, но мне кажется, что Платон не имел в виду ничего другого, нежели эти точные утверждения, хотя он и не объяснил их»[68]. Согласно Вайцзеккеру, мы вполне можем говорить о «неписаном учении» Платона в русле тюбингенской школы (Крэмер, Гайзер), но только в том смысле, что оно представляло собой гипотезы в естествознании, устно обсуждаемые с коллегами и учениками, и Платон просто не хотел ненужной болтовни об этих предварительных гипотезах.

Этой точке зрения, придающей эзотерическому, тайному учению Платона центральное положение, а диалогам — вторичное, энергично возражал в своих двух статьях К. фон Фриц[69]. Мы не

---

66 Еремеев. Теория психосемиозиса и древняя антропокосмология. С. 19. Мнение, что учение Платона было предназначено лишь для небольшого круга избранных, обычно опирается на философский отрывок в «Седьмом письме» и на сообщения об устных отзывах учеников Платона (см., напр.: Krämer. Arete bei Platon und Aristoteles). Сам Еремеев ссылается на Тимей 28с: «Конечно, творца и родителя этой Вселенной нелегко отыскать, а если мы его и найдем, о нем нельзя будет всем рассказывать». Но этот текст говорит не об эзотерической доктрине, а просто о том, что есть вещи, понимание которых требует особенных усилий, опыта и знания.

67 См.: Cherniss. The Riddle of the Early Academy.

68 Weizsäcker. Platonische Naturwissenschaft im Laufe der Geschichte. S. 337.

69 Fritz. The Philosophical Passage in the Seventh Platonic Letter and the Problem of Plato's "Esoteric" Philosophy. P. 408–447. Перепечатка в сборнике: Fritz. Schriften zur griechischen Logik. Band 1. S. 175–213. Fritz. Zur Frage der "esoterischen" Philosophie Platons. S. 215–227.

можем здесь детально обсуждать исследования фон Фрица, однако кратко упомянем четыре аргумента: 1) Это правда, что Платон говорил, что его учение доступно только немногим и что для этого необходимо «духовное просветление». Но это утверждение не имеет ничего общего с эзотерикой — любой преподаватель, стремящийся познакомить своих слушателей со сложными вопросами, испытывает то же самое. 2) Не подлежит сомнению, что Платон не мог в своих диалогах зафиксировать все свои идеи, просто потому, что до самой старости он стремился к новым знаниям. Однако из этого никак не следует, что главным для Платона было некое тайное устное учение, а в диалогах речь идет лишь о каких-то второстепенных вещах. Подобный взгляд не имеет под собой достаточных оснований. 3) Трудности общения, о которых Платон говорит в «Седьмом письме», касаются не только письменного общения, но и устного; разница лишь в степени. 4) Эзотерика обычно отличается тем, что ее приверженцы некритически принимают учение мастера, вне зависимости от того, поняли они его или нет; но Платон вел себя совсем не как учитель такого рода, ему были нужны не просто слушатели и верующие, а собеседники, способные к самостоятельному и критическому мышлению[70].

---

[70] Интересен также взгляд Гегеля: «Другой трудностью, по мнению некоторых историков философии, является то обстоятельство, что у Платона различают двоякого рода философские учения — эзотерическое и экзотерическое. Теннеман говорит: "Платон воспользовался тем правом, которое имеет каждый мыслитель, ибо каждый мыслитель имеет право сообщать из своих открытий лишь столько, сколько он находит нужным, и сообщать их лишь тем, от которых он ожидает, что они способны воспринимать их. У Аристотеля тоже была эзотерическая и экзотерическая философия, и разница между ним и Платоном состоит лишь в том, что у него эти учения отличались друг от друга только формально, а у Платона различие между ними было также и материальным". Как это наивно! Выходит так, как будто философ владеет своими мыслями, как внешними предметами. Но философская идея есть нечто совершенно другое, и не человек владеет ею, а, наоборот, она владеет человеком. Если философы высказываются о философских вопросах, они необходимо должны следовать своим идеям; они не могут спрятать их в карман. Даже в тех случаях, когда они и говорят с некоторыми людьми внешне, идея все же

К этому перечню можно добавить и пятый, наверное даже решающий пункт: как замечает И. Н. Мочалова, лекция «О Благе», *и только она одна*, была записана многими учениками Платона, и этот факт «подтверждает ее уникальность, тем самым ставя под сомнение концепцию тюбингенцев, настаивающих на регулярном чтении лекций под таким названием»[71].

Толкование нескольких текстов

Далее мы приведем четыре примера текстов из платоновских диалогов, в которых попытаемся перепроверить все вышесказанное. Таким образом мы увидим детально, каким способом и с какой целью Платон использовал мифы и мистические элементы.

Первый пример. В «Тимее» Тимей сознательно использует «миф», но сразу же объясняет, почему и в каком смысле он это делает:

> А потому не удивляйся, Сократ, что мы, рассматривая во многих отношениях много вещей, таких как боги и рождение Вселенной, не достигнем в наших рассуждениях полной точности и непротиворечивости. Напротив, мы должны радоваться, если наше рассуждение окажется не менее

содержится в том, что они высказывают, если только оно не бессодержательно. Для передачи какого-нибудь внешнего события требуется немного, но для сообщения идеи требуется умение. Она всегда остается чем-то эзотерическим, и философы никогда не дают исключительно экзотерическое учение. Все это — поверхностные представления» (Гегель. Лекции по истории философии. С. 131–132).

71 Мочалова. Метафизика ранней академии и проблемы творческого наследия Платона и Аристотеля. С. 251. Ср. также: «Однако следом за отрицанием письменной фиксации сущности своего учения, Платон в Седьмом письме подчеркивает, что "это не может быть выражено в словах, как остальные науки (Pl. Ep. VII, 314c), что ставит под сомнение утверждение эзотеристов, ибо получается, что учение Платона невыразимо вообще — ни в устной, ни в письменной форме… Такое различие свидетельствует не о тайном учении, а характеризует степень сложности предмета беседы, так как длительные беседы требуют "всестороннего и обстоятельного разыскания"» (Там же. С. 253).

> правдоподобным, чем любое другое, и притом помнить, что и я, рассуждающий, и вы, мои судьи, всего лишь люди, а потому нам приходится довольствоваться в таких вопросах правдоподобным мифом, не требуя большего[72].

То есть «миф» в рассказе Тимея — это просто манера изложения, подобная тому, как, например, мы сегодня говорим о классической модели атома, напоминающей систему планет, хотя наши ученые утверждают, что на самом деле все не так просто и атом не подлежит наглядному изображению.

Второй пример касается применения чисел, которые с самого первого своего появления в философской традиции были связаны с мифической символикой. Платон отвергает эту символику, у него числа становятся носителями изначальных идей, на которых строится все последующее мышление, — Штенцель говорит в этой связи о «фундаментальной параллели между идеями и числами»[73].

Рассмотрим символ числа три: это Y, старинный символ, идущий из древних времен матриархата. Он сопоставляется с образом трехликой Гекаты, властвующей над рождением и смертью, счастьем и бедами. Из этой символики Платон берет только *формальную структуру* и ставит ее в своей системе на подходящее место. «Теперь это больше не богиня луны (которая давно уже приняла угрожающий облик ведьмы), управляющая судьбой в момент перепутья, а разум, который приобретает свою собственную автономию и авторитет в процессе свободного обмена мнениями»[74].

Третий пример. В «Государстве» Сократ приводит миф о морском божестве по имени Главк и особенно подчеркивает, что «прежние части тела Главка либо переломаны, либо стерлись, либо изуродованы волнами, а вдобавок еще он оброс раковинами, водорослями и камешками, так что гораздо больше походит на чудовище, чем на

---

[72] Тимей. 29c.

[73] Stenzel. Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles. S. 146.

[74] Tydecks. Mathematik-Visionen aus der Zeit des Faschismus. Kapitel 3.

то, чем он был по своей природе»[75]. Но этот миф интересует Платона не сам по себе, он служит лишь для наглядного сравнения в ходе поисков того, «какова душа на самом деле», «какой она бывает в своем чистом виде». Дело в том, что если мы наблюдаем лишь нынешнее, «переломанное», «изуродованное волнами» состояние души, мы упускаем ее настоящую природу. Надо обратить внимание *на стремление души к мудрости.* «Надо посмотреть, каких предметов она касается, каких общений она ищет, коль скоро она сродни божественному, бессмертному и вечно сущему»[76]. Если мы сконцентрируемся на сути дела, тогда душа покажет нам свою истинную природу, она вынырнет из омута, в котором теперь обретается, и стряхнет с себя «те камешки и ракушки, которые к ней прилипли»[77].

В четвертом примере мы более тщательно проверим, как Платон применял мифические элементы, и для этого рассмотрим фрагмент «Государства» (616–617).

В конце своих рассуждений об идеальном государстве Платон еще раз хочет подчеркнуть *важность добродетели*; при этом он придает особый вес возмездию за хорошие и злые дела, которое ждет человека после его смерти. Чтобы пояснить это, Платон использует «рассказ одного отважного человека, Эра, сына Армения, родом из Памфилии». Этот рассказ получил в русском переводе подзаголовок «Миф». Но если мы посмотрим более внимательно, то увидим, что, хотя мифические образы действительно встречаются в тексте, они используются довольно специфическим образом и дополняются совсем не мифическими описаниями.

Первая часть рассказа состоит из описания мира, в который души возвращаются после земной жизни. Здесь есть многочисленные элементы, которые, как можно предположить, Платон

---

75 Государство. 611d.

76 Там же. 611e.

77 Там же. 511e.

воспринял из мифических рассказов, или, по крайней мере, сформулировал их по образцу таких рассказов. Интересно, однако, *какую функцию* выполняют эти элементы. Первое замечание вытекает из того, что Платон не хочет слишком долго останавливаться на этих мифических образах, так как это только отвлекало бы от главного дела. Что есть, однако, это главное дело?

> Рассказывать все подробно потребовало бы, Главкон, много времени. Главное же, по словам Эра, состояло вот в чем: за всякую нанесенную кому-либо обиду и за любого обиженного все обидчики подвергаются наказанию в десятикратном размере...[78]

Теперь следует довольно жестокое описание того, что ожидает злого человека. Важно при этом, что читатель *понимает*, на основании каких действий умерший претерпевает наказание:

> ...причем всем встречным объясняли, за что такая казнь...[79]

Так что этот «миф», при более подробном рассмотрении, является *дидактическим повествованием*. Правда, вторая часть рассказа также начинается с мифологически нагруженного понятия «свет»:

> ...и отправиться в путь, чтобы за четыре дня прийти в такое место, откуда сверху виден луч света, протянувшийся через все небо и землю, словно столп, очень похожий на радугу, только ярче и чище[80].

Но то, что «появляется» на самом деле, это вовсе не что-то мифическое и не какое-то экстатическое явление, но огромный механизм, который Ван дер Варден назвал «планетарием»![81] Правда, это очень особый механизм. Ибо, согласно Платону, душа пребывает во всех

---

[78] Государство. 615a–b.

[79] Там же. 616a.

[80] Государство. 616b.

[81] Подробности нелегки для понимания, но Ван дер Варден все же предпринял попытку изобразить эту систему мира (см.: Ван дер Варден: Пробуждающаяся Наука. С. 68–69).

вещах и управляет также и ходом событий на небосводе[82]. Следовательно, то, что появляется во второй части рассказа, это не мертвый, а живой, одушевленный механизм. И снова примечательно, что эта Вселенная, несмотря на свою одушевленность, является вовсе не хаотичной или непредсказуемой, не «дионисийской», но вполне благоустроенной, «гармонично» построенной, и небесные тела передвигаются здесь *согласно математическим правилам*. Именно по этой причине она доступна пониманию и описанию с помощью разума. Для Платона здесь нет противоречия, так как «душа» и «разум» находятся в тесной связи[83]: если бы звезды были неодушевлены и неразумны, то они никогда не смогли бы двигаться с такой удивительной точностью согласно математическим законам[84].

Однако небесные тела не только передвигаются регулярно, их обращения еще и составляют отношение в виде целых чисел. Из этого получается знаменитая гармоничность сфер, которую Платон представляет поэтическим образом[85]. Это значит, что душа, разум и музыка тесно связаны друг с другом (отсюда понятно, почему Платон использует такое странное выражение, как «круговращение

---

82 Законы. 896d–e: «Не следует ли признать, что душа, правящая всем и во всем обитающая, что многообразно движется, управляет также и небом? — Конечно».

83 Эта тесная связь отражается, например, в почти созвучных формулировках: *душа* управляет событиями во Вселенной, но также и *разум* делает это. Ср. оба места: Законы. 896d: «душа... управляет также и небом»; Законы. 967c: «в звездных телах... пребывает ум всего существующего».

84 Законы. 966d–e: «Итак, мы знаем, что относительно богов есть два убедительных довода, которые мы уже разобрали. — Какие это доводы? — Один касается, как мы указывали, души и гласит, что она самая старшая и божественная из всех вещей, движение которых, соединившись со становлением, создало вечную сущность. Другой довод касается всеобщего движения: в нем наблюдается стройный порядок, так как над светилами и прочими телами господствует все упорядочивающий ум».

85 Государство. 617b: «Сверху на каждом из кругов веретена восседает по Сирене; вращаясь вместе с ними, каждая из них издает только один звук, всегда той же высоты. Из всех звуков... получается стройное созвучие».

ума в небе»[86]). У Платона психическое и эстетическое связано не с экстазом, а с разумом[87], и эта связь познается не восторженно-таинственным способом, а через обучение математике, астрономии и музыке!

Затем следует третья часть рассказа (617c–621b), в которой опять встречаются мифические персонажи, но снова ясно, что речь идет не о мифе, а просто об образной манере высказывания. Тема этой части — вопросы судьбы и самостоятельности, необходимости и свободы.

К чему все эти рассуждения? Платон сам дает ответ, нужно лишь читать его внимательно, и тогда станет ясно, что мифические (так же как и астрономические) образы, которые он использовал, служат только для того, чтобы разъяснять *важность добродетельной жизни*. Речь идет о правильном, рациональном выборе личного пути в жизни. То, что при этом решающую роль играет *разум*, Платон отчетливо проговаривает, вновь на образном языке:

> Уже под вечер они располагаются у реки Амелет, вода которой не может удержаться ни в каком сосуде. В меру все должны были выпить этой воды, но, кто не соблюдал благоразумия, те пили без меры, а кто ее пьет таким образом, тот все забывает[88].

---

86 Тимей. 47b.

87 Эта тесная связь видна также и в других произведениях Платона. Примеры: «Следует усвоить предваряющие эти положения необходимые знания [μαθήματα!], чтобы заметить их общность с мусическими искусствами и воспользоваться ими для нравственного усовершенствования в согласии с законами и чтобы быть в состоянии отдать себе разумный отчет во всем том, что разумно» (Законы. 967e). В другом месте душа заменяется на необходимость, а разум остается. Это дает в итоге следующее высказывание: «Из сочетания ума и необходимости произошло смешанное рождение нашего космоса. Правда, ум одержал верх над необходимостью, убедив ее обратить к наилучшему бóльшую часть того, что рождалось. Таким-то образом и по таким-то причинам путем победы разумного убеждения над необходимостью была вначале построена эта Вселенная» (Тимей. 47e–48a).

88 Государство. 621a.

Соответственно, весь «миф» не несет в себе ничего экстатического, и ничего, что было бы доступно только посвященным. Речь идет скорее о «дидактическом рассказе», который в принципе может (и должен!) понять каждый человек. Тахо-Годи говорит о «сказочно-поучительном характере» платоновского мифа — «это как бы внешний покров, в который облечен логос»[89], а Асмус использует определение «учение, сформулированное в образах мифа»[90].

В этой связи можно вспомнить и высказывание Позднякова об Элевсинских мистериях: по его словам, они коррелировали с платоновской философией в некоторых важных аспектах, но не могли полностью удовлетворить Платона из-за «крайне низкой степени моральной активности их участников, растворяемой в строгом соблюдении ритуалов посвящения... Таким образом, нет серьезных оснований считать Платона ревностным поклонником мистерий»[91]. Действительно, Платон болеет душой не об экстазе,

---

[89] Тахо-Годи. Платон. Т. 1. Примеч. 31.

[90] Асмус. Платон. С. 67. Прекрасный пример подобного употребления мифически-сказочных образов в научном дискурсе предложил химик и лауреат Нобелевской премии Вильгельм Оствальд. К мистике он относился отрицательно и объяснял ее как состояние неспособности понять что-либо. Все же, в докладе о достижении научного познания он приводил историю о гномах, которые хлопочут при изготовлении хлеба. Затем он продолжил: «Вы можете спросить, почему я фантазирую и рассказываю вам сказки, ведь мы собрались для серьезного разговора. Ну, я подразумеваю нечто совсем серьезное; то, что я только что описал под видом сказки, является чрезвычайно важным процессом...» (Ostwald. Die Forderung des Tages. S. 133. О его отказе от мистики см.: Ibid. S. 82–88). Другой пример представляет физик и лауреат Нобелевской премии Вернер Хайзенберг, в одном из докладов использовавший старинную китайскую сказку для разъяснения проблемы использования машин (Heisenberg. Schritte über Grenzen. S. 119).

[91] Поздняков. Платон и Элевсинские мистерии. О важности того, что мистерии — если они вообще имеют смысл — должны делать человека «лучше», говорит Сократ: он готов «рискнуть и предоставить себя нашему Дионисодору, как колхидской Медее. Пусть он погубит меня и, если хочет, сварит живьем или сделает другое что-либо со мной по желанию, лишь бы только я стал хорошим» (Евтидем. 285c).

религиозных чувствах и мистических ритуалах и обычаях, а о справедливости, нравственности, понимании и любви, т. е. о благе человека «здесь и там». Это он выражает следующими словами:

> Таким-то вот образом, Главкон, сказание это спаслось, а не погибло. Оно и нас спасет; если мы поверим ему, тогда мы и через Лету легко перейдем и души своей не оскверним. Но в убеждении, что душа бессмертна и способна переносить любое зло и любое благо, мы все — если вы мне поверите — всегда будем держаться вышнего пути и всячески соблюдать справедливость вместе с разумностью, чтобы, пока мы здесь, быть друзьями самим себе и богам. А раз мы заслужим себе награду, словно победители на состязаниях, отовсюду собирающие дары, то и здесь, и в том тысячелетнем странствии, которое мы разбирали, нам будет хорошо[92].

И наконец, вспомним многозначительный отрывок из «Федра»: на вопрос Федра «Ты веришь в истинность этого сказания?» Сократ отвечает отрицательно, не соглашаясь с «мудрецами», которые объясняют все явления чисто рационально. Во-первых, «подобные толкования, хотя и привлекательны», но требуют от человека особых способностей: «трудов у него будет много, а удачи — не слишком», а во-вторых, и это главное: чем тратить время на рациональные толкования мифов, лучше исследовать «самого себя: чудовище ли я, замысловатее и яростней Тифона»[93]. Здесь мы наблюдаем «нравственный поворот» Платона в дискуссии о мифах.

Заключение

Для завершения этого параграфа и подведения его итогов лучше всего подойдут слова Гегеля и Штенцеля. Сначала приведем высказывание Гегеля: «Если мы не знаем, что такое понятие, что такое спекулятивное, то мы неминуемо рискуем тем, что, введенные в заблуждение мифами, мы будем извлекать из диалогов множество

---

92 Государство. 621c–d.

93 Федр. 230a.

положений и теорем и будем их выдавать за платоновскую философию, между тем как на самом деле они вовсе не являются его философией, а представляют собою положения, принадлежащие области представления. Так, например, Платон в своем "Тимее" пользуется следующей формой выражения: бог образовал вселенную, и демоны принимали некоторое участие в этом деле; это сказано всецело в манере представления. Но если мы будем принимать за философское учение Платона утверждение, что бог сотворил вселенную, что существуют высшие существа духовной природы и что они помогали богу при сотворении мира, то, хотя мы дословно находим эти положения в произведении Платона, они все же не входят в его философию… И точно так же, если он говорит о главном пункте своей философии, об идеях, о всеобщем как о пребывающем самостоятельном, как о прообразах чувственных вещей, то мы легко можем соблазниться этими высказываниями и мыслить эти идеи по образцу современных категорий рассудка, мыслить их как субстанции, которые существуют по ту сторону действительности, или в уме бога, или сами по себе, существуют самостоятельно, подобно, например, ангелам. Короче говоря, все, что Платон выражает в манере представления, новейшие авторы прямо принимают за философию. Можно изложить таким образом философию Платона и показать, что его собственные слова дают на это право; но если мы знаем, что такое философское учение, то мы не будем обращать внимания на такие выражения, а будем понимать, что именно хотел сказать Платон»[94]. Теперь дадим слово Штенцелю: «Задачей его философии, как и его жизни, было объединение того и другого [т. е. философской тотальности, на которую указывала личность Сократа, и систематики наук]; таким образом он утверждал множество наук, но при этом признавал их создателем королевское искусство единого знания — *фронезис* [мудрость] из VII письма Платона. Можно назвать философствование такого рода мистическим…, но нужно признать, что здесь логические цепочки строгого научного мышления с непреклонной,

[94] Гегель. Лекции по истории философии. С. 139–140.

методичной последовательностью продлеваются за свои пределы до тех пор, пока параллели в направленном на бесконечность взгляде философа не начинают приближаться к точке своего пересечения. Через посредство такого пристального взгляда на начало и конец, на Arche и Telos, это мышление приближается к религии, — но это не религия, поскольку оно требует самой строгой научности и только через нее стремится к области сверхнаучного, полностью презирая любые другие непосредственные пути. Для выражения такого наивысшего стиля Платон создал свою форму диалога, а вместе с ней такую прозу, которая смогла использовать всю мощь религиозного языка для формулирования философской мудрости»[95]. И «это развитие [платоновского мышления в последовательности диалогов] показывает поразительную картину все более глубокого погружения во все более ранние пласты греческого мышления и чувствования. Начиная с "Государства" платоновская методология и теория познания плавно охватывают первые, ранние шаги науки и спекуляции. Софистика, элейская школа, религиозные учения досократиков о физическом мире вообще, Демокрит и более ранние математические спекуляции, которые более тесно связаны друг с другом, чем кажется, — *Платон все наполняет новым духом и использует для создания собственного мышления*»[96].

4.2. Софистические элементы у Платона

Платон стремился, насколько возможно, внедрять в философские обсуждения математическую строгость и прозрачность. Софисты с их хитроумным искусством[97] убеждения возмущали его. Их манеры

---

[95] Stenzel. Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles. S. 106.

[96] Ibid. S. 108 (курсив мой).

[97] Таково, по крайней мере, мнение Платона. Однако некоторые софисты занимались вполне серьезными задачами. Из каталога математиков Прокла мы знаем, что софист Гиппократ Хиосский написал первое обобщающее изложение геометрии под заголовком «Начала»; кроме того, до сегодняшнего дня известны «гиппократовы луночки». Другой пример —

он мог имитировать и употреблять так, что его софист-собеседник этого даже не заметит; в диалоге «Гиппий Меньший» Сократ «упрощает ситуацию, останавливаясь на отдельных, не связанных между собой фактах, т. е. он поступает так, как поступали в своих спорах софисты, и преподносит Гиппию наглядный урок в излюбленной софистами манере»[98].

Тем не менее находятся у Платона и софистические элементы, которые не являются пародией. Это необоснованные соображения и заключения, которые Сократ риторически маскирует. Например, при попытке подтвердить бессмертие души, мы видим следующий заключительный ход мысли:

> Раз даже собственные порочность и зло не способны убить и погубить душу, то от зла, назначение которого — губить другие вещи, вряд ли погибнет душа или что-нибудь иное, кроме того, для чего это зло предназначено. — Вряд ли; да оно и естественно. — Но раз что-то не гибнет ни от одного из этих зол — ни от собственного, ни от постороннего, то ясно, что это непременно должно быть чем-то вечно существующим, а раз оно вечно существует, оно бессмертно[99].

Ход мысли выглядит так: никакое зло не в состоянии убивать душу, ни зло в нас самих, ни то зло, что другие причиняют нам. Следовательно, не имеется ничего, что может убивать душу. Значит, душа бессмертна. Однако этот вывод убедителен только тогда, когда мы приписываем душе с самого начала особенный статус; если мы, напротив, воспринимаем душу как часть естественного организма, то она может умирать согласно естественному процессу.

Так же и в следующем примере вывод, который собеседник, под влиянием сократической риторики, считает релевантным, на самом деле ничем не обоснован:

это софист Гиппий Элидский, которому удалось разделить угол на три части посредством квадратриса.

98 Тахо-Годи. Примеч. 16 к: Гиппий Меньший. 371b–c // Платон. Диалоги. Т. 1. С. 726.

99 Государство. 610e–611a.

— Теперь сам скажи так же о жизни и смерти. Ты признаешь, что жизнь противоположна смерти? — Признаю. — И что они возникают одна из другой? — Да. — Стало быть, из живого что возникает? — Мертвое, — промолвил Кебет. — А из мертвого что? — продолжал Сократ. — Должен признать, что живое, — сказал Кебет[100].

Иногда при чтении диалогов создается ощущение, что Сократ является именно тем, кем, как он утверждает, как раз не был: софистом в отрицательном смысле («мастером уговоров»). Очень ловко он выдвигает утверждения, которые звучат на первый взгляд убедительно, и поэтому принимаются его собеседниками — утверждения, которые, однако, оказываются при более близком рассмотрении неподтвержденными[101].

Рассел замечает: «В противоположность некоторым из его предшественников Сократ не обладал научным мышлением, но решительно доказывал существование вселенной, соответствующей его этическим идеалам. Это — измена истине и самый худший из

---

[100] Федон. 71d. Другой пример, который указывает на проблему употребления понятий у Платона: «*Сократ:* Мы можем сказать об этом так: число, обозначающее плетр, и самый плетр тождественны. Не правда ли? *Теэтет:* Да» (Теэтет. 204d).

[101] Например, в «Федоне» аргументация Платона такова: к числу 3 принадлежит, как его естественное свойство, что оно нечетное. Оно скорее погибло бы, чем стало четным! Причина лежит в том, что «всякая вещь, которою овладевает идея троичности, есть непременно и три, и нечетное» (104d). Точно так же (!) считается, что душа никогда не сможет принять свою противоположность; противоположное жизни, однако, это смерть. На основании этого соответствия числа и души Платон может заключать: «В этом мы уже согласились: душа никогда не примет противоположного тому, что всегда привносит сама? — Без всякого сомнения! — Что же выходит? Как мы сейчас назвали то, что не принимает идеи четного? — Нечетным. — А не принимающее справедливости и то, что никогда не примет искусности? — Одно: неискусным, другое: несправедливым. — Прекрасно. А то, что не примет смерти, как мы назовем? — Бессмертным. — Но ведь душа не принимает смерти? — Нет. — Значит, душа бессмертна? — Бессмертна. — Прекрасно. Будем считать, что это доказано? Или как по-твоему? — Доказано, Сократ» (Федон. 105d–e).

философских грехов. Можно считать, что как человек он мог быть допущен к общению со святыми, но как философу ему потребовалось бы долго пребывать в научном чистилище»[102].

Ницше также ощущал нечто иррациональное и нехорошее в некоторых аргументах Платона; он писал: «Как злобны могут быть философы! Я не знаю ничего ядовитее той шутки, которую позволил себе Эпикур по отношению к Платону и платоникам: он назвал их *Dionysiokolakes*. По смыслу слова это означает прежде всего "льстецы Дионисия", стало быть, челядь тирана и его плевколизы; но кроме того, это слово еще говорит нам, что "все это комедианты, что в них нет ничего неподдельного" (ибо слово Dionysokolak было популярной кличкой актера). А последнее есть, собственно, стрела злобы, пущенная Эпикуром в Платона: его раздражали эти величественные манеры, эта самоинсценировка, в чем знали толк Платон и его ученики и чего не понимал Эпикур»[103].

Конечно же, такие острые характеристики можно отнести не только к Платону. Довольно часто случается, что какое-то стремление или желание оказывается сильнее, чем рациональные основания. Известно, что даже острый математический ум не застрахован от ошибки или попадания во власть эмоций. Это касается не

---

[102] Рассел. История западной философии. С. 192. Без сомнения, платоновский Сократ стремится к тому, чтобы его собеседник мог следить за ходом его мыслей и понимать его. Но иногда Сократ так подчеркивает свое превосходство, что собеседник лишается мужества и говорит, как Гермоген: «Откуда же у меня? Да если бы я сам был способен найти ответ, я не стал бы приставать к тебе, считая, что ты его скорее найдешь, чем я» (Кратил. 398е). Поэтому Рассел замечал, что платоновский Сократ, вопреки всем своим достойным восхищения качествам, определенно не свободен от серьезных недостатков. «Он недобросовестен и прибегает к софизмам в своих аргументах; он использует интеллект скорее для того, чтобы доказать желательные для него выводы, чем для беспристрастных поисков знания. В нем есть что-то самодовольное и елейное, напоминающее дурной тип церковника» (Там же). Мы можем соглашаться с этой характеристикой или нет, но, несомненно, преподаватель должен следить за тем, чтобы его превосходство не делало ученика немым и легковерным.

[103] Ницше. По ту сторону добра и зла. 7.

только самих математиков[104], но и философов, даже если они считают себя «более устойчивыми»[105].

Однако можно быть и более милосердным и чутким к Сократу. Уже упомянутый венгерский математик Реньи в своих «платоновских диалогах» поставил на передний план *стремление* Сократа (и вместе с тем также Платона) к ясному, честному и убедительному исследованию, несмотря на вопрос, *в какой мере* реальный Сократ соответствовал идеальному. Он вкладывает в уста Сократа следующее: «Ты спросил, почему я не присоединяюсь к тем, кто развивает эту великую науку. Отвечу тебе коротко: я один из математиков, только другого рода. Внутренний голос — ты можешь назвать это прорицанием, — к которому я всегда внимательно прислушиваюсь, спросил меня много лет назад: "Каков источник огромного успеха, достигнутого математиками в их благородной науке?" Я ответил: "Я думаю, ключ к успехам математиков лежит в их методах, высоких стандартах их логических требований, стремлении к истине без малейших компромиссов, в привычке

---

104 Лихтенберг однажды заметил: «Математика — совершенно великолепная наука, но сами математики зачастую никуда не годные судьи. Часто так называемый математик требует признания как глубокий мыслитель, однако при этом его голова забита большим количеством чепухи, не пригодной для дела, требующего размышлений, если только оно не связано непосредственно с теми знаками, которые являются скорее произведением навыка, нежели мышления» (Lichtenberg. Tag und Dämmerung. S. 305). О знаменитом логике Фреге Фейерабенд писал: «Фреге был тонким мыслителем, когда речь шла о логике и основах математики, — но его политические взгляды, которые он излагал в своих дневниках, крайне примитивны» (Feyerabend. Die Torheit der Philosophen. S. 152). Вспомним и слова Сократа: «И, клянусь собакой, о мужи афиняне, уж вам-то я должен говорить правду, что я поистине испытал нечто в таком роде: те, что пользуются самою большою славой, показались мне, когда я исследовал дело по указанию бога, чуть ли не самыми бедными разумом, а другие, те, что считаются похуже, — более им одаренными» (Апология Сократа. 22a).

105 Фейерабенд о (некоторых) философах: «Нужно просто прийти хоть один раз на философское или научно-философское заседание: трудно поверить, что за вздор продуцируется нынешней "интеллектуальной элитой" — за счет налогоплательщиков, между прочим» (Feyerabend. Über Erkenntnis. S. 127).

начинать всегда с первичных принципов, с определения каждого понятия, используемого точно и лишенного внутренних противоречий". Мой внутренный голос продолжал: "Очень хорошо, но почему ты думаешь, Сократ, что эти методы мышления и доказательства могут быть полезны только для изучения чисел и геометрических форм? Почему ты не попытаешься убедить своих сограждан применять те же самые высокие логические стандарты в других областях знания, например в философии и политике, при обсуждении проблем повседневной личной и общественной жизни?" С того времени именно это стало целью моей жизни. *Я уже доказал* (ты помнишь, конечно, наш спор с Протагором?), *что те, кого считают мудрыми, большей частью просто невежественные глупцы. Всем их рассуждениям не хватает твердого основания, поскольку — в противоположность математикам — они используют неопределенные и полуосознанные понятия.* Поэтому я нажил много врагов. И неудивительно, так как для всех, кто пользуется туманными терминами, чтобы скрыть неясность содержания, я стал живым упреком. Люди не любят тех, кто постоянно напоминает им о недостатках, которые они не способны или не желают исправлять. Придет день, когда мои враги нападут и уничтожат меня. Но пока этот день не пришел, я буду следовать моему назначению»[106].

4.3. Проблемы при образовании понятий у Платона

Проблемы при образовании понятий встречаются во многих платоновских диалогах. Посмотрим на следующий пример:

> *Гиппий:* Я хорошо знаю, Сократ, что то, о чем я говорил, прекрасно для всех и всем будет таким казаться. — *Сократ:* «И будет прекрасным? — возразит он. Ведь прекрасное прекрасно всегда». — *Гиппий:* Конечно. — *Сократ:* «Значит, оно и было прекрасным?» — спросит он. *Гиппий:* И было[107].

---

[106] Реньи. Диалоги о математике. С. 41.

[107] Гиппий Больший. 292е.

Сократ понимает «прекрасное» как *идею* того, что объединяет все красивые вещи, но в этом случае становится невозможно приписать ей атрибут «прекрасного», и если «прекрасное» является сокращенной формой выражения «X прекрасно», то выражение «X не может быть не прекрасно» является просто тавтологией. Аналогичные проблемы возникают с такими выражениями, как «вожделение вызывает...»[108], «доброе прекрасно»[109], «благочестиво само благочестие»[110] или «справедливость сама по себе справедлива»[111]. В следующем разговоре слово «один» не отличается от единицы в математике, что приводит к такому нелепому выражению, как «я — нечетный»:

> *Сократ:* Все-таки, скажи мне еще: не есть ли каждый из нас один и не свойственно ли ему именно то, что он есть один? – *Гиппий:* Конечно. – *Сократ:* Итак, если каждый из нас один, то, пожалуй, он будет также нечетным; или ты не считаешь единицу нечетным числом? – *Гиппий:* Считаю[112].

Такие сомнительные или просто невозможные высказывания и конструкции вызывали сильное возмущение у некоторых авторов: «В "Федоне" прекрасно сказано, "что в силу красоты все красивые вещи становятся красивыми". Ну прекрасно — невозможно было ответить более тавтологично на вопрос, что отличает прекрасные вещи. Очевидно, что Платон не продвинулся дальше осознания *необходимости* того, что речь *должна* идти об определении общей природы предмета. Таким образом, он опозорился со своими определениями уже перед своими современниками»[113].

---

[108] Пир. 200b.

[109] Там же. 201c.

[110] Протагор. 330e.

[111] Там же. 330c–e.

[112] Гиппий Больший. 302a.

[113] URL: http://www.gegenstandpunkt.com/mszarx/phil/platon.htm

Шопенгауэр судил более мягко, но также говорил о «неумелости» Платона в выведении на свет логических истин[114]. И для Рассела диалог «Парменид» был хорошей демонстрацией того, что платоновские способы образования понятия зачастую недопустимы: «Платон постоянно испытывает затруднения из-за непонимания относительных понятий. Он считает, что если А больше, чем В, и меньше, чем С, то А является одновременно и большим и малым, что представляется ему противоречием»[115].

Однако Шлейермахер полагал подобные недостатки простительными. Он считал «Парменид» юношеским произведением Платона, что объясняет некоторые недостатки этого диалога: профессиональный язык предстает здесь «в детском состоянии», проявляющемся «через неопределенные колебания, через не всегда удачное схватывание правильного наименования и как результат того, что этот язык едва ли умеет удерживать самые важные различия с помощью слов». Тем не менее Шлейермахер оценил философский инстинкт молодого диалектика, который нацелен «только на истину, не взирает ни на какую побочную цель, не боится никакого результата, но исходит только из необходимой предпосылки, что научное сознание возможно, и ищет эту истину с помощью тщательно выстроенного метода»[116].

Рассел, напротив, считал, что «Парменид» был создан Платоном в старости, но также не преувеличивал связанные с этим диалогом сложности. По его словам, «такие затруднения представляют собой детскую болезнь философии»[117]. Можно добавить, что и сегодня мы

---

114 Шопенгауэр. Мир как воля и представление. С. 128: «Однако на этом пути подвигались медленно, с большими усилиями, и до Аристотеля все это оставалось крайне несовершенным, что мы и видим отчасти из той неумелости и растянутости, с какой в иных диалогах Платона выводятся на свет логические истины».

115 Рассел. История западной философии. С. 177.

116 Фридрих Шлейермахер во введении к переводу диалога «Парменид».

117 Рассел. История западной философии. С. 177. Интересны здесь также высказывания Гегеля: «Систематического изложения философии мы не найдем в этом способе развития мысли. Это, разумеется, создает затруд-

видим, что правильное обращение с понятиями и отношениями между ними совсем не есть нечто само собой разумеющееся. Образование понятий, говорил П. Бернайс, — это трудное дело, и по-настоящему подробный и логичный анализ процесса образования понятий возможен лишь на основании теории соотношений. «Только на основании этой теории мы обнаруживаем, какие сложные по составу логические выражения (отношения, предложения существования и т. д.) охватываются краткими языковыми выражениями»[118]. Приведем хотя бы один пример неправильного понимания и употребления понятий — знаменитое доказательство бытия Бога Ансельма Кентерберийского[119], которое до сих пор способно запутать (а иногда и убедить в своей правильности!) множество умов. При ближайшем рассмотрении оказывается, что в этом доказательстве недопустимым образом смешаны понятия «истина» и «существование»; в действительности логичная истина ни в коем случае не подразумевает существование[120].

нение при обозрении пройденного пути, так как у нас нет критерия, который позволил бы нам решить, исчерпан ли предмет или нет. Тем не менее в этих диалогах имеется единый философский дух… хотя этот дух не выступает перед нами в той определенной форме, какой мы требуем в наше время. Философская культура Платона, равно как и общая культура его времени, еще не созрела для подлинно научных творений; идея была еще слишком свежа и нова…» (Гегель. Лекции по истории философии. С. 137).

118 Bernays. Abhandlungen zur Philosophie der Mengenlehre. S. 15.

119 Ансельм Кентерберийский. Прослогион. II: «Веруем же мы, что Ты нечто, более чего нельзя ничего помыслить… Но то, более чего нельзя ничего помыслить, никак не может иметь бытие в одном только разуме. Ведь если оно имеет бытие в одном только разуме, можно помыслить, что оно имеет бытие также и на деле; а это уже больше, чем иметь бытие только в разуме. Итак, если то, более чего нельзя ничего помыслить, имеет бытие в одном только разуме, значит, то самое, более чего нельзя ничего помыслить, есть одновременно то, более чего возможно нечто помыслить; чего явным образом быть не может. Следовательно, вне всякого сомнения, нечто, более чего нельзя ничего помыслить, существует как в разуме, так и на деле».

120 Лингвистическая апологетика, по словам Р. В. Светлова, считает, что «предикат существования в высказывании "Бог существует" может рас-

В этих обстоятельствах достойно восхищения ясное видение Платоном тех логических апорий, которые возникли благодаря его способу образования понятий, по крайней мере в «Пармениде», и его мужество оставить этот диалог без заключения — он как будто предчувствовал что-то из тех выводов, которые будут сделаны в математически-философской диссертации о мышлении и понятиях более чем 2000 лет спустя[121]. В этом труде фундаментальные математические проблемы были обобщены до вопросов о смысле наших языковых выражений и об образовании адекватных понятий, а результат его оказывается отрицательным: критическая проблема понятия принципиально неразрешима. «Последнее и абсолютное познание нам не доступно — если мы потребуем такового, то наша оценка этого познания может быть только скептической; самая глубокая причина этого лежит не в слабости нашей *способности* познания, а уже в том факте, что наши понятийные средства избегают абсолютно любой гарантированности»[122].

4.4. О роли языка в философии и математике

В своих лекциях о диалоге «Софист» М. Хайдеггер констатировал, что «Софист», как и любой диалог, показывает Платона «в постоянном поиске»[123]. При чтении мы видим, как устойчивые

сматриваться и как квантор», и, следовательно, «субъект в суждении уже "сосчитан", а счет должен иметь предметный характер» (Светлов. Доказательства Бытия Бога в свете проблемы теодицеи. С. 51). Анализ Светлова показывает также, что уже у эпикурейцев и стоиков «доказательства бытия Божия были связаны и с их антропологической проблематикой» (Там же. С. 60). Но это свидетельствует только о том, что человек неизбежно нуждается в утешении и понимании причин существование горя и зла. Такие убеждения, чувства и личный опыт доказывают, на самом деле, только наличие психологических потребностей, а не реальность «божественных существ».

121 Wittenberg. Vom Denken in Begriffen — Mathematik als Experiment des reinen Denkens.

122 Ibid. S. 359.

123 Heidegger. Platon — Sophistes. S. 14.

фразы распадаются и благодаря этому приоткрываются сами феномены. Но в то же время становится очевидным, что Платон «...вынужден останавливаться, так и не пробившись к цели»[124].

То, что обнаруживается у Платона, является общей проблемой. Хайдеггер напоминает о том, что греки определили человека как «живое существо, умеющее говорить» (ζῷον λόγον ἔχον); значит, способность говорить и само говорение необходимы, если человек хочет быть человеком. Но умение говорить, продолжает Хайдеггер, не является, как можно было бы подумать, элементарной способностью, а сама речь — ничем не примечательным процессом, каковым многие ее считают. То, что человек обнаруживает в своем внутреннем мире и хочет сообщить другому, «обычно скрывается и искажается в процессе высказывания»[125].

Трудность или даже невозможность выразить в языке мысль испытывали, конечно же, многие авторы. Цицерон, например, говорил о «несогласии между буквой и смыслом»[126], несмотря на

---

124 Ibid.

125 Ibid. S. 16. Стоит прочесть то, что Хайдеггер говорит по этому поводу: «Мнения застывают в понятиях и предложениях, которые повторяются другими, в результате то, что первоначально открылось, снова скрывается. Так движется повседневное существование в двойной сокрытости: во-первых, в чистом незнании, а во-вторых — в гораздо более опасной сокрытости, когда первоначальное мнение забалтывается, превращаясь в неправду. Учитывая эту двойную сокрытость, перед философией стоит двойная задача: с одной стороны, неуклонно продвигаться вперед к вещам, с другой, в то же время выступить на борьбу против бездумных высказываний (забалтывания). Обе задачи являются важнейшими стимулами интеллектуальной деятельности Сократа, Платона и Аристотеля. Об этом свидетельствует их борьба против риторики и софистики. Поэтому прозрачность греческой философии не является результатом так называемой беззаботности бытия греков, как будто греки получили все во сне. Ближайшее рассмотрение трудов греческих философов отчетливо показывает, какие усилия потребовались для того, чтобы пробиться к самому Бытию, да еще сквозь пустую риторику. Но это означает, что мы не можем рассчитывать получить "вещи дешевле", тем более что мы обременены богатой и весьма запутанной философской традицией» (Ibid.).

126 Цицерон. Об ораторе. I, 31 [140].

то, что высоко ценил человеческую речь[127]. У Канта мы читаем: «При всеобщем безмолвии природы и спокойных чувствах заговорит тогда скрытая познавательная способность бессмертного духа на неизъяснимом языке и внушит неясные понятия, которые можно, правда, почувствовать, *но нельзя описать*»[128]. Интересно также высказывание Вайцзеккера о Нильсе Боре: Бор «был единственным физиком, у которого в каждом слове была видна мучительность мышления. Вероятно, особенно он страдал при разговоре. В более поздние годы он говорил: мы зависим от языка. Мы вынуждены говорить, выхода нет, но говорить то, что говорить нужно, мы не умеем»[129]. Если это так, то стоит принять во внимание предупреждение одного рабби: «Остерегайтесь слов, в них скрывается опасность! Не доверяйте словам. Они порождают демонов и ангелов»[130].

Подчеркнуть важность данной проблематики можно, процитировав меткие слова русско-швейцарского философа Анны Тумаркин: «Как невозможно определить жизнь в ее непосредственности, так же невозможно описать ее адекватным образом: зря мы пытаемся при помощи языка сообщить друг другу то, что мы на самом деле непосредственно переживаем; наш язык, адаптированный прежде всего к потребностям понятийного аппарата, не способен сформулировать то, что сопротивляется рациональному мышлению. То, что отдельное сухое слово выхватывает из непосредственной полноты душевной жизни, является, скорее, не изначальным, непосредственным переживанием в его конкретной полноте, а лишь абстракцией. Самое лучшее, что может сделать язык как выражение непосредственного переживания, это воз-

---

127 Там же. I, 8 [32]: «Что может быть отраднее и свойственнее человеческой природе, чем остроумная и истинно просвещенная беседа? Ведь в том-то и заключается наше главное преимущество перед дикими зверями, что мы можем говорить друг с другом и выражать свои ощущения словом».

128 Кант. Всеобщая естественная история и теория неба. С. 261. (Курсив мой).

129 Weizsäcker. Der Garten des Menschlichen. S. 559.

130 Рабби из Салисте (Румыния). Цит. по: Wiesel. Gesang der Toten. S. 20.

буждать в нас ощущение его границ; это как раз то, что делает поэт, искусство которого в большей степени состоит не в прямом высказывании, а в намеке и умолчании»[131].

Сам Платон был хорошо знаком с этой проблемой и несколько раз высказывал сомнения в возможности письменной фиксации своих мыслей[132]. Этой темы мы уже касались выше (см. с. 14–15): речь идет об опасениях Платона, что написанное может причинить ему «сильнейшее огорчение»[133] из-за полного непонимания читателями его идей. Подобное же опасение с горечью и некоторым сарказмом выразил современный французский философ Ф. Паже: «Создавая книги, они [авторы] надеются на отклик будущих поколений, и действительно находят его. Но, стремясь рождать истинных духовных детей, они оставляют после себя лишь бастардов»[134].

Проблема непонимания (или недопонимания) текста читателем касается, конечно же, и речи. Сам Платон хорошо сознавал, «что средства выразительности человеческой речи ограничены *также и в устном изложении*; поэтому различие между письменным и устным выражением мысли едва ли имело для него большое

---

131 Tumarkin. Prolegomena zu einer wissenschaftlichen Psychologie. S. 14.

132 См., напр.: Законы. 968d — «Устанавливать все это письменно было бы напрасно»; Протагор. 329a: книги «не в состоянии вслух ни ответить, ни сами спросить»; VII письмо. 341, где Платон утверждает, что по наиболее важным вопросам у него самого «никакой записи нет и не будет»; Федр. 275c–d: «Тот, кто рассчитывает запечатлеть в письменах свое искусство и кто в свою очередь черпает его из письмен, потому что оно будто бы надежно и прочно сохраняется там на будущее, — оба преисполнены простодушия». Это, конечно же, не означает, что книги и писания не имеют смысла; в «Софисте» (232d) чужеземец говорит: «Однако все то, что по поводу всех искусств, а также и каждого из них в отдельности должен возражать сам мастер, обнародовано для каждого желающего этому *научиться в письменном виде*». Таким же образом и сегодняшние бумажные и электронные книги полезны для учебы, хотя опыт показывает, что они не могут заменить живого общения с учителем и другими студентами.

133 VII Письмо. 341c–d.

134 Pagès. Frühstück bei Sokrates. S. 169.

значение»[135]. Можно вспомнить, что, согласно преданию, Платон был вынужден воочию наблюдать, как большинство слушателей его лекции «О Благе» ничего в ней не поняли и либо перестали слушать, либо ушли[136] — не говоря уже о том, что даже его блестящий ученик и сотрудник Аристотель, по мнению некоторых исследователей, не понял суть учения об идеях, несмотря на то что лично общался с Платоном много лет[137]. Вероятно, одного острого ума недостаточно, чтобы понять другого человека: «Ты можешь только то понять, что твоему уму под стать»[138]. Л. Гроссман подробно изложил условия, необходимые для действительного понимания творчества какого-либо мыслителя, писателя или художника; в их числе необходимость «включать все, что служит выразительности и своеобразию данного творческого облика. В этом смысле вкусы поэта, его умственные наклонности, его увлечение теми или иными философскими системами, часто совершенно равноправны с вопросами строения и выбора его художественных форм… Философия, религия, политика или этика здесь *питают, двигают и оформляют художественное создание. Они* входят в него, как одно из начал его органической природы»[139]. Это значит, что, если человек не читает текст или слушает речь «с сочувствием», он вряд ли глубоко понимает сказанное. Все это

---

135 Dönt. Platons Spätphilosophie und die Akademie. S. 10. (Курсив мой).

136 «Во второй книге "Гармоники" Аристоксен пишет: "Вот что, по словам Аристотеля, испытали многие, слышавшие лекцию Платона "О Благе": все они пришли узнать о том, что у людей называется благом, — о богатстве, здоровье, силе, вообще о каком-нибудь необычайном счастье. Но это оказались речи о науках — о числах, о геометрии и астрологии, о том, что Благо — Единое. И речи эти показались им странными, поэтому одни отнеслись к этому с пренебрежением, другие поносили его" (Aristox. Harm. II, 30, 10, Meib.)» (Мочалова. Метафизика ранней академии и проблемы творческого наследия Платона и Аристотеля. С. 251).

137 По Наторпу, например, Аристотель «совсем не понял основ учения Платона» (Natorp. Platos Ideenlehre. S. 429).

138 Ibid. S. 461.

139 Гроссман. Мастера слова. С. 10–11.

испытывал уже Платон, поэтому он и требовал, чтобы ученики имели не только умственные способности, помогающие «формально понимать» учителя, но и «внутренную склонность» к предметам и к обучению в целом:

> Нужно… отдавать предпочтение самым надежным, мужественным и по возможности самым благообразным; но, кроме того, надо отыскивать не только людей благородных и строгого нрава, но и обладающих также свойствами, подходящими для такого воспитания[140].

Значит, равноправие неуместно, если мы говорим о «высшем образовании»…

Но есть и еще одна, более глубокая проблема. Да, бывает, что ученики неправильно понимают учителя. Бывает также, что учитель сетует, подобно Гераклиту, что «большинство людей не разумеет того, с чем встречается, да и научившись, они не понимают…»[141]. При этом он предполагает, что *знает* правду в отличие от неразумных учеников. И тут возникает вопрос: а что, если *сам учитель* ошибается в своих словах и убеждениях, не замечая этого, и даже не допуская такой возможности? Очень выразительно об этом говорит Сократ:

> Тяжелее всего быть обманутым самим собой. Ведь тогда обманщик неотступно следует за тобой и всегда находится рядом, разве это не ужасно?[142]

---

[140] Государство. 535a.

[141] Diels. Vorsokratiker. Herakleitos, B 17.

[142] Кратил. 428d. См. также: Пир. 204a: «Скверно невежество, что человек и не прекрасный, и не совершенный, и не умный вполне доволен собой»; Законы. 819a: «Полное невежество вовсе не так страшно и не является самым великим из зол, а вот многоопытность и многознание, дурно направленные, — это гораздо более тяжелое наказание»; Федр. 277d: «Если Лисий или кто другой когда-либо написал или напишет для частных лиц либо для общества сочинение, касающееся гражданского устройства, *и будет считать, что там все ясно и верно обосновано*, такой писатель заслуживает порицания».

Платон, осознавая все эти упомянутые проблемы, упорно искал решение, и, как мне кажется, нашел, причем не одно, а целых четыре. Во-первых, он считал, что вполне возможно мыслить, говорить и писать столь осторожно и тщательно, чтобы хотя бы минимизировать возможность ошибки, — и всегда старался действовать подобным образом[143]. Во-вторых, для того, чтобы «выразить невыразимое», Платон использовал мифологические сюжеты. В-третьих, он избрал диалогическую форму изложения своего учения, чтобы включить слушателей и читателей в диалектику мышления. В-четвертых, и это для нас особенно интересно, Платон обратился *к математике* как к инструменту оттачивания мыслей и слов. Он хотел, чтобы как в математике, так и в философии все было сказано и зафиксировано ясно, правильно, непоколебимо и «вечно».

Возникает, конечно же, вопрос: может ли служить математика хорошим примером для философии в этой сфере? Способен ли математический язык абсолютно точно выразить какую-то

---

[143] См.: Федр 277e–278b: «Кто же считает, что в речи, написанной на любую тему, неизбежно будет много развлекательного и что никогда еще не было написано или произнесено ни одной речи, в стихах ли или нет, которая заслуживала бы серьезного отношения (ведь речи произносят подобно сказам рапсодов, то есть без исследования и поучения, имеющего целью убеждать; в сущности, лучшее, что у них есть, рапсоды знают наизусть), — так вот, такой человек находит, что только в речах назидательных, произносимых ради поучения и воистину начертываемых в душе, в речах о справедливости, красоте и благе есть ясность и совершенство, стоящие стараний. О таких речах он скажет, что они словно родные его сыновья, — прежде всего о той, которую он изобрел сам, затем о ее потомках и братьях, заслуженно возникших в душах других людей. А с остальными сочинениями он распростится. Вот тот человек, Федр, каким мы с тобой оба желали бы стать». И если читатель или слушатель соблюдает подобную скрупулезность, то он тоже может приближаться к правде, как это демонстрирует платоновский Евклид: «Впоследствии, вспоминая на досуге что-то еще, я вписывал это в книгу, и к тому же всякий раз, бывая в Афинах, я снова спрашивал у Сократа то, чего не помнил, а дома исправлял. Так что у меня теперь записан почти весь этот разговор» (Теэтет. 143a).

математическую мысль? Существуют ли «предохранители», *гарантирующие* правильность высказываний математика, когда он, допустим, представляет устное или письменное доказательство какой-либо теоремы? По Гоббсу, да: следует лишь избегать невежества и небрежности: «Существует только две причины, по которым в доказательстве какого-либо заключения вообще в любой науке может возникнуть ошибка, а именно: нехватка понимания и невнимательность. Как при сложении многих больших чисел не совершит ошибки тот, кто знает правила сложения, а также внимательно следит за тем, чтобы не ошибиться ни в одном числе и не поменять числа местами, так и в любой другой науке тот, кто в совершенстве владеет правилами логики и следит за тем, чтобы не написать одного слова вместо другого, *никогда не потерпит неудачу в достижении истины*, хотя, возможно, это и не будет самым коротким и легким доказательством»[144]. Коротко описал это убеждение Мордухай-Болтовской: «Математические ошибки суть не что иное, как погрешности памяти или внимания»[145]. Математик Финслер, взгляды которого мы представляем в Приложении А, также утверждал: «Все позволено в математике, лишь бы только не противоречить самому себе. Это единственная ошибка, которую мы можем совершить»[146]. Мыслить и говорить по образцу самой математики — вот что нужно делать, чтобы результат был ясным, правильным и убедительным.

Но, как нам представляется, математика может играть роль такого образцового примера лишь отчасти. Дело в том, что вызывает сомнения само представление, будто человек «в принципе» умеет мыслить безошибочно. Так, И. Кант считал человеческий разум несовершенным и склонным к ошибкам, интересным образом объясняя этот факт телесными феноменами[147]. И. Р. Браун говорил

---

[144] Hobbes. Paralogisms. P. 211–212. (Курсив мой).

[145] Мордухай-Болтовской. Философия — Психология — Математика. С. 94.

[146] Finsler. A propos de la discussion sur les fondements de mathématiques. P. 170.

[147] «Поскольку творение так устроило человека, что душа и тело зависимы друг от друга, душа не только получает все понятия о Вселенной сово-

об этом так: «Наше теоретическое умозрение, точно так же как и опытное, подвержены иллюзиям и изменениям»[148]. А профессор математики И. И. Буркхардт сказал мне в личном разговоре об убеждениях Финслера: «Кто знает? Может быть, наш разум создан так, что он иногда *неизбежно* ошибается, — и это становится заметно не сразу, или даже не становится никогда?»

Но предположим, что некому человеку удалось абсолютно правильное размышление, не содержащее никаких скрытых

купно с телом и под его влиянием, но и само проявление силы ее мышления находится в зависимости от строения тела, с помощью которого она и обретает необходимую для этого способность… Если исследовать причину тех препятствий, которые удерживают человеческую природу на столь низкой ступени, то окажется, что она кроется в грубости материи, в которой заключена духовная его часть, в негибкости волокон, в косности и неподвижности соков, долженствующих повиноваться импульсам этой духовной части. Нервы и жидкости мозга человека доставляют ему лишь грубые и неясные понятия, а так как возбуждению чувственных ощущений он не в состоянии противопоставить для равновесия внутри своей мыслительной способности достаточно сильные представления, то он и отдается во власть своих страстей, оглушенный и растревоженный игрой стихий, поддерживающих его тело. Попытки разума противодействовать этому, рассеять эту путаницу светом способности суждения подобны лучам солнца, когда густые облака неотступно прерывают и затемняют их яркий свет. Эта грубость вещества и ткани в строении человеческой природы есть причина той косности, которая делает способности души постоянно вялыми и бессильными. Деятельность размышления и освещаемых разумом представлений — утомительное состояние, в которое душа не может прийти без сопротивления и из которого естественные склонности человеческого тела вскоре вновь возвращают ее в пассивное состояние, когда чувственные раздражения определяют всю ее деятельность и управляют ею. Эта косность мыслительной способности, будучи результатом зависимости от грубой и негибкой материи, представляет собой источник не только пороков, но и заблуждений. Поскольку трудно рассеять туман смутных понятий и отделить общее познание, возникающее из сравнения идей, от чувственных впечатлений, душа охотнее приходит к поспешным выводам и удовлетворяется таким пониманием, которое вряд ли даст ей возможность увидеть со стороны косность ее природы и сопротивление материи» (Кант. Всеобщая естественная история и теория неба. С. 248–249.

[148] Brown. Philosophy of Mathematics. P. 15.

ошибок. Было бы этого достаточно, чтобы по-настоящему убедить другого человека? Вряд ли. Вспомним Хайдеггера: проблема в том, что мысли обычно скрываются и искажаются в процессе высказывания. То есть если этот человек выражает свои «правильные» мысли устно или письменно, то слушатели или читатели воспринимают эти мысли уже не в первоначальном смысле, а могут и вовсе их не понять. Это постигло, например, Фреге: он пытался установить «формализованный язык чистого мышления по образцу математического языка»[149], надеясь, что это позволит избежать неясностей и заблуждений в научных речах и дискуссиях со стопроцентной *гарантией*. Но вскоре он заметил, что его попыток говорить и писать абсолютно ясно оказалось недостаточно, и воскликнул: «Как фундаментально ошибочно понимаются иногда мои рассуждения!»[150] Значит, даже в математике не существует языка и способа мышления, способного убедить каждого слушателя или читателя.

Почему же это так? Бывает, конечно, что высокообразованные ученые невнимательно или даже предвзято читают текст и, следовательно, подвергают его несправедливой критике. Но проблема этим не исчерпывается. Существует еще одна трудность математического языка, трудность, которую предчувствовал уже Платон:

> Но кто хоть немного знает толк в геометрии, не будет оспаривать, что наука эта полностью противоположна тем словесным выражениям, которые в ходу у занимающихся ею. — То есть? — Они выражаются как-то очень забавно и принужденно. Словно они заняты практическим делом и имеют в виду интересы этого дела, они употребляют выражения «построим» четырехугольник, «проведем» линию, «произведем наложение» и так далее: все это так и сыплется

[149] Так написано в подзаголовке его труда «Begriffsschrift» от 1879 г.

[150] Frege. Begriffsschrift und andere Aufsätze. S. 101.

> из их уст. А между тем все это наука, которой занимаются ради познания[151].

Здесь интересно, что словесные выражения употребляются не только забавно, но и *принужденно* забавно, т. е. математик *не может обойтись* без таких «забавных» выражений. Конечно, он ищет абсолютно адекватные термины и выражения, но не достигает этой цели, и ему приходится удовлетвориться суррогатом. «Платон не объясняет источник этой принужденности, находится ли она в природе самого предмета или в природе того, кто им занимается. Возможно, причина в них обоих. Если кто-то смотрит на солнце, его глазам будет больно. Поэтому надо изучать солнце с помощью теней и отражений. По аналогии, мы должны использовать неподходящий язык при изучении математики»[152].

Однако опытный математик вряд ли согласится с таким описанием, ведь его язык всегда «подходит». Если он, например, использует термин «фильтр», он перенимает — можно сказать, немного «забавно» — кухонный термин, но это не имеет значения: математический фильтр — это точно определенное множество в топологии, и этот термин употребляется одинаково каждым математиком. Этого достаточно; если я поменяю термин «фильтр» на термин «яблоко», то в теории ничего не изменится. Д. Гильберт однажды написал, что если в геометрии я вместо термин «точка» использую слово «любовь», вместо «линия» слово «трубочист», и т. д., то от этого ничего не изменится, «и мои законы, например теорема Пифагора, останут правильными и при этим вещам»[153]. Итак, математический язык, как утверждает математик Ю. И. Манин, сильно изменяется с течением времени. В нем появляются новые термины, новые «диалекты» — это видно,

---

151 Государство. 527a–b.

152 Benno, Mueller. Plato and mathematics. P. 16. Примеч. 12.

153 Hilbert D. Brief an Frege // Unbekannte Briefe Frege's über die Grundlagen der Geometrie und Antwortbrief Hilbert's an Frege. Hrsg. von Max Steck. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Jg. 1941, 2. Abhandlung.

например, в эволюции теории гомотопий, «которая постепенно превратилась в некий новый язык для математиков постмодерна (для посвященных читателей я могу упомянуть "Brave New Rings")»[154]. Но математик легко справится с новыми терминами, и, главное, они *способствуют* и не препятствуют развитию математики. Поэтому, продолжает Манин, «основное содержание математики устойчиво развивается... Непременным условием такого постоянства и непрерывного вовлечения является создание и поддержание самого надежного, достоверного, связывающего разные поколения потока информации. Лингвистические средства математики, которыми эта информация кодируется и передается, являются, возможно, гораздо более разнообразными, непостоянными, подверженными влиянию неодолимых ветров истории, нежели содержание самой информации»[155].

Значит, математический язык может развиваться, может содержать различные «диалекты», и многие студенты мучаются, изучая этот особенный язык, но принципиально все в нем ясно, прозрачно и как-то просто. Хотя, если мы копнем глубже, появятся трудности. Как подчеркивал П. Бернайс, образование основных понятий является сложным делом, и подробный и логичный анализ процесса образования понятий возможен только на основании теории соотношений. «Только на основании этой теории мы обнаруживаем, какие сложные по составу логические выражения (отношения, предложения существования и т. д.) охватываются краткими языковыми выражениями»[156].

---

[154] Manin. What Then? The Modernist Transformation of Mathematics. P. 242.

[155] Ibid. P. 240.

[156] Bernays. Abhandlungen zur Philosophie der Mengenlehre. S. 15. Можно, конечно, аргументировать, что все эти трудности не должны нас пугать. Так пиал Витгенштейн: «Я полагаю, будь в арифметике действительно найдено противоречие, это доказывало бы лишь, что арифметика с таким противоречием может вполне успешно справляться со своими задачами; и было бы предпочтительнее видоизменить наше понятие требуемой надежности, чем утверждать, что это еще не было бы по сути подлинной арифметикой. — "Но ведь это же не идеальная надежность!" — Идеальная

Наглядным примером того, как «работает» неправильное образование или неправильное употребление основных понятий, может служить знаменитое доказательство существования Бога Ансельма[157]. Если это «доказательство» убеждает кого-то, то не из-за его правильности и убедительности, а из-за того, что он утверждает то, во что этот человек уже верит[158]. Но такая ложная убедительность — это не то, чего искал Платон.

Назовем еще одну проблему. Даже если математический язык достаточно ясен и четко определен и слушатель или читатель в принципе понимает смысл сказанного, это не означает, что он обязательно с ним согласится. Дело в том, что, как говорил Вольфганг Штегмюллер, каждый шаг мышления или доказательства в той или иной форме требует от человека, воспринимающего аргументацию (назовем его участник *X*) не только понимания, но и *actus evidentiae* — такого, чтобы он сказал: «Да, это действительно так!», или: «Да, я вижу это!». Речь здесь идет не об избытке или недостатке знаний, а также не об интеллектуальных способностях или их отсутствии у участника *X*, а о важности и необходимости того факта, что *X* выражает свое *искреннее согласие* с аргументацией, так как она кажется ему *evident*, т. е. действительно и неизбежно очевидной, ясной, несомненной. Но такой эвидентности *невозможно добиться аргументами* — она или есть, или нет. Это справедливо не только для математики, но и для философии[159]. Следовательно, тщательность использования

для какой цели? Правила логического вывода — это правила языковой игры» (Витгенштейн. Замечания по основаниям математики. С. 191). Но эта позиция вряд ли удовлетворит философа, ищущего «истину».

157 Формулировка этого доказательства приведена на странице 299 (примеч. 119) наст. изд. (Ансельм Кентерберийский. Прослогион. Гл. II). При ближайшем рассмотрении оказывается, что оно недопустимым образом связывает понятия «истина» и «существование»; в действительности логичная истина ни в коем случае не подразумевает существование.

158 См. с. 299 (примеч. 120) наст. изд.

159 «Тезис о теоретической неразрешимости проблемы очевидности имеет особенную силу для всех философских проблем, которые возможно

дефиниций, дедукций и доказательств, которую искал Платон, является очень важным фактором, но принципиально не может убедить всех и всегда.

Нам кажется, что Платон довольно ясно видел или хотя бы чувствовал все вышеупомянутые проблемы. Об этом особенно ярко свидетельствует диалог «Парменид», и мы приходим в изумление перед мужеством, с которым он оставил этот диалог без заключения — он как будто предчувствовал некоторые из тех выводов, что будут сделаны в математически-философской диссертации Виттенберга о мышлении и понятиях более чем 2000 лет спустя. В этом труде фундаментальные математические проблемы были обобщены до вопросов о смысле наших языковых выражений и об образовании адекватных понятий, и автор пришел к отрицательному результату: критическая проблема понятия принципиально неразрешима. «Последнее и абсолютное познание нам не доступно — если мы потребуем такового, то наша оценка этого познания может быть только скептической; самая глубокая причина этого лежит не в слабости нашей *способности* познания, а уже в том факте, что наши понятийные средства избегают абсолютно любой гарантированности»[160].

Приведем в конце концов выразительную цитату, озаглавленную «Plato's Ghost», в которой ее автор критически комментирует не только свою книгу о развитии математики, но также сомнительность успеха крупных математиков и их достижений:

«Не стоит даже говорить о том, что я далек от мысли, будто бы довел эту книгу до совершенства. Кульминацией стихотворения

решить только на основе очевидности. Особенно это важно при выяснении объективно-метафизических предпосылок отдельных наук. Платоник, как и реалист, может только апеллировать к непосредственной очевидности существования классов, которые отличаются от фактических совокупностей, или качеств, в дополнение к качественно определенным конкретным сущностям. Тех, кто не верит в очевидности такого рода, невозможно опровергнуть. В этом случае логическая аргументация бессмысленна» (Stegmüller. Metaphysik — Skepsis — Wissenschaft. S. 172–173).

160 Wittenberg. Vom Denken in Begriffen. S. 359.

Йейтса[161] с его призывом к тяжкому труду, ведущему к земному успеху, является претензия на безупречность, убедительно опровергнуть которую способен лишь дух Платона[162]. Я поставил это стихотворение в начало своей книги, поскольку оно прекрасно иллюстрирует описываемую мной ситуацию в математике. Мало того, что Платон — главный предшественник всех математиков, а платонизм обычно считается их философией "по умолчанию", сами философы тоже обречены находиться в его тени. Многих из тех, кого мы здесь обсуждаем, тяжелый труд действительно привел к мировому признанию и славе. Что еще более важно, математики зачастую верили, что действительно довели нечто до совершенства и дали, наконец, окончательное объяснение тому или иному аспекту математики, или философии математики, или ее связи с логикой, или с природным миром. Всякий раз они ошибались. Они, возможно, проникли глубже, чем кто-либо до них, но лишь для того, чтобы совершить еще более глубокие ошибки. Кто лучше, чем призрак Платона, мог бы спросить их, действительно ли на этом все, и ничего более не должно быть сказано?»[163]

---

161 Две строфы этой поэмы Йейтса звучат так: «Everything he wrote was read, / After certain years he won / Sufficient money for his need, / Friends that have been friends indeed; / "What then?" sang Plato's ghost. "What then?"... "The work is done", grown old he thought, / "According to my boyish plan; / Let the fools rage, I swerved in naught, / Something to perfection brought"; / But louder sang that ghost, "What then?"» («Все что он написал, было прочитано, / В запланированный срок он получил / Достаточно денег для своих нужд / И истинных друзей; / "Ну и что?" — пел дух Платона. — "Ну и что?" / "Работа закончена, — сказал он, постарев, / — Как я и планировал в юности"; / Пускай глупцы беснуются, я дошел до изнеможения, / Но хоть что-то довел до совершенства; / Но громче дух тот запел: "Ну и что?"»)

162 Йейтс, видимо, полагал, что в философии Платона наша повседневная жизнь не имеет особого значения — все, что мы делаем здесь, является мимолетным, бренным.

163 Gray. Plato's Ghost. The Modern Transformation of Mathematics. P. 14.

4.5. Эмпиризм и роль основополагающих идей

Есть люди, которые полностью сосредоточены на эмпирическом мире, и они невысокого мнения о теоретических рассуждениях. Так же и Сократ, как расказывает Ксенофонт, учил своих собеседников, «в каком объеме истинно образованный человек должен знать тот или другой предмет. Так, например, геометрию надо изучать, говорил он, лишь в таком объеме, чтобы быть в состоянии, в случае надобности, участок земли правильно, согласно с измерением, принять, передать, разделить или представить отчет о работе… Но в изучении геометрии доходить до малодоступных пониманию чертежей он находил ненужным; пользы от этого, говорил он, не видно; хоть сам он не был профаном в этой науке, но говорил, что занятие ею может поглотить у человека всю жизнь и помешать изучению многих других полезных наук. Он рекомендовал также изучение астрономии, но тоже лишь в таком объеме, чтоб иметь возможность определять время ночи, месяца и года для поездок сухопутных и морских... а изучать астрономию в таком объеме, чтобы узнать даже те небесные тела, которые не вращаются вместе с другими, именно планеты и блуждающие звезды, и мучиться над исследованием их расстояния от земли, времени и причин их вращения, — от этого он усиленно старался отвлечь своих друзей: пользы, говорил он, и в этом никакой не видит; хоть он и по части астрономии имел сведения, но говорил, что и занятие ею может поглотить у человека жизнь и помешать изучению многих полезных наук. Вообще он не советовал заниматься изучением небесных явлений, как бог производит каждое из них: этого, думал он, людям не удастся постигнуть, да и богам не доставляет удовольствия, если кто исследует то, чего они не захотели открыть. К тому же тот, кто занят такими изысканиями, рискует сойти с ума…»[164]

Другого мнения придерживался Папп. По его словам, существует тесная связь между теорией и эмпирикой: «Наука механики, мой дорогой Гермодор, является не только полезной для многих

---

[164] Ксенофонт Афинский. Воспоминания о Сократе. IV, 7.

важных практических начинаний, но по праву пользуется уважением философов и усердно постигается всеми, кто интересуется математикой, так как она в основе своей связана с учением о природе, особенно учитывая вещественный состав элементов в космосе... Теперь механики школы Герона говорят нам, что наука механики состоит из теоретической и практической частей. Теоретическая часть включает в себя геометрию, арифметику, астрономию и физику, в то время как практическая часть состоит из металлообработки, архитектуры, столярного дела, живописи и ручного труда, связанного с этим искусством. Тот, кто с юности получал обучение в вышеуказанных теоретических отраслях и достиг мастерства в упомянутых практических искусствах, а также обладает проворным умом, станет, как они говорят, самым способным изобретателем механических устройств и наиболее компетентным мастером-строителем»[165].

Что касается математики, то ей, по мнению Рихарда Куранта, особенно свойственна неразрывная связь с эмпиризмом: «Когда мы обозреваем... длинный путь, ведущий от математического Начала к этим нивам наивысшей абстракции, нам становится ясна тенденция развития математического мышления. В начале есть конкретная, индивидуальная проблема, которая часто происходит из применения, и оттуда — постепенное продвижение к еще большей общности и методологической чистоте, пока не отбросится конкретное содержание и не останется только кристаллизовавшаяся математическая форма. Эра какой-то одной математической дисциплины — эра Диониса — постепенно переходит в эру Аполлона. Этот процесс сублимации и перехода интересов от Конкретного к Абстрактному — это естественный внутренний ритм, согласно которому как в малом, так и в большом математическое мышление должно осуществляться безжалостнее и радикальнее, нежели в других областях духовной, умственной жизни и искусства... Но не следует отрицать, что во всеобщей тенденции, нацеленной на прогрессивное абстрагирование, заложен также очень опасный момент.

---

165 Папп Александрийский. Математическое собрание. VIII.

Игра абстрактного воображения, не сдерживаемого тяжестью субстанции бытия, неизбежно воздействует на многие умы, и мы иногда забываем, что, в конце концов, вся математика в той или иной степени выросла из Конкретного и что нельзя утратить связь с конкретным жизненным опытом — в противном случае наука как единое целое застынет в виде чистой, но удаленной от жизни формы»[166].

А каково было отношение Платона к эмпиризму? Был ли он идеалистом, игнорирующим и презирающим мир опыта? Корректны ли слова Панова о том, что, «по Платону, в лошади, доме или прекрасной женщине нет ничего реального»?[167] Нет, считает Карл Форландер, это совсем не так. Это мнение принадлежит куда более поздним мыслителям, ссылавшимся на Платона (особенно неоплатоникам), которые тем самым дискредитировали идеализм. «Сам Платон, будучи истинным идеалистом[168], так далек от подобного презрения, что, наоборот, считает основательное знание практических фактов необходимой предпосылкой к познанию идей и требует от "хранителей" своего идеального государства, чтобы они никому не уступали в "эмпиризме"»[169]. Так, Платон рекомен-

---

[166] Courant. Über die allgemeine Bedeutung des mathematischen Denkens. S. 93.

[167] Панов. Математика древняя и юная. С. 51.

[168] Термин «идеализм» мы, конечно, не используем в той крайней форме, которую отвергал уже Кант и которую он описал словами: «Идеализм [в своей экстремальной форме] состоит в утверждении, что существуют только мыслящие существа, а остальные вещи, которые мы думаем воспринимать в созерцании суть только представления в мыслящих существах, представления, которым на самом деле не соответствует никакой вне их находящийся предмет» (Кант: Пролегомены ко всякой будущей метафизике, могущей появиться как наука, с. 105). О таком «экстремальном» идеализме у Платона не может идти и речи. Мы принимаем «идеализм» просто как убеждение, что истинное знание нуждается в ведущей идее, которая организует эмпирический материал и вносит его в понятный контекст, при этом идеи не включены в эмпирический материал, они обязательно приходят «со стороны». Поэтому противоположность идеализму в данном смысле — это не материализм, а позитивизм.

[169] Vorländer. Geschichte der Philosophie. § 22b. Государство. 484d: «Так кого же мы поставим стражами — их или тех, кто познал сущность каждой вещи, а вдобавок ничуть не уступает им в опытности?»

дует применять элементарную математику в вопросах повседневной жизни, например применять числа с наибольшими возможными делителями как вспомогательное средство для справедливого раздела страны между отдельными гражданами или для обороны родины[170]. Математика пригодится и тем, «кто туго соображает»: они хотя бы «становятся более восприимчивыми, чем были раньше»[171]. В «Тимее» (44d–46) Платон пытается уяснить функции человеческого тела, объяснить сущность снов, исследовать феномен зеркального отражения. Вспомним также многочисленные случаи, когда Платон приводит примеры из повседневного мира и говорит о кроватях, столах и тому подобных вещах[172] или использует ткацкое ремесло как проясняющий пример[173]. Он знаком с наблюдениями астрономов и знает, каким образом можно избежать повреждения глаз[174]. Отметим, наконец, следующее высказывание, в котором тесно связываются три области:

---

170 «Пусть будущих граждан будет пять тысяч сорок. Это — число подходящее, так земледельцы смогут отразить врага от своих наделов. На столько же частей будут разделены земля и жилища; человек и участок, полученный им по жребию, составят основу надела. Все указанное число можно прежде всего разделить на две части, затем на три. По своей природе оно делится последовательно и на четыре, и на пять, и на последующие числа вплоть до десяти. Что касается чисел, то всякий законодатель должен отдавать себе отчет в том, какое число и какие свойства числа всего удобнее для любых государств. Мы признаем наиболее удобным то число, которое обладает наибольшим количеством последовательных делителей. Конечно, всякое число имеет свои разнообразные делители; число же пять тысяч сорок имеет целых пятьдесят девять делителей, последовательных же — от единицы до десяти. Это очень удобно и на войне, и в мирное время для всякого рода сделок, союзов, налогов и распределений» (Законы. 738a–b).

171 Государство. 526b.

172 См., напр.: Государство. 596.

173 Политик. 279. Рассуждения Чужеземца в 280–283 показывают, впрочем, что Платон не был оторванным от жизни ученым, но действительно хорошо разбирался в повседневных вещах.

174 Федон. 99d: «Иные из них губят себе глаза, если смотрят прямо на Солнце, а не на его образ в воде или еще в чем-нибудь подобном».

> На чем должно основываться суждение, чтобы оно было верным? Разве не на *опыте*, на *разуме* и на *доказательстве*?[175]

Но все же ситуация совсем не проста. Пифагорейцы выполняли много измерений с помощью струнных инструментов. Гиппас, к примеру, «приготовил четыре медных диска таким образом, что диаметры их были равны, а толщина первого диска была на одну треть больше второго, в полтора раза больше третьего и в два раза больше четвертого. Когда по ним ударяли, то получалось некое созвучие»[176]. Такие экспериментальные методы отвергаются Платоном со злой насмешкой:

> Разве ты не знаешь, что и в отношении гармонии повторяется та же ошибка? Так же как астрономы, люди трудятся там бесплодно: они измеряют и сравнивают воспринимаемые на слух созвучия и звуки. — Клянусь богами, у них это выходит забавно: что-то они называют «уплотнением» и настораживают уши, словно ловят звуки голоса из соседнего дома; одни говорят, что различают какой-то отзвук посреди, между двумя звуками и что как раз тут находится наименьший промежуток, который надо взять за основу для измерений; другие спорят с ними, уверяя, что здесь нет разницы в звуках, но и те и другие ценят уши выше ума. — Ты говоришь о тех добрых людях, что не дают струнам покоя и подвергают их пытке, накручивая на колки[177].

---

175 Государство. 582a.

176 Цит. по: Жмудь. Наука, философия и религия в раннем пифагореизме. С. 233.

177 Государство. 531a–b. Жмудь делает из этого следующий вывод: «Платона, как видим, не интересовало эмпирическое подтверждение гармоники, его гармония царила в мире чисел, а не реальных созвучий» (Жмудь. Указ. соч. С. 220). Но Платон имел и реальные причины для такого мнения. Ему был, вероятно, известен неправильно спроектированный и поэтому бессмысленный эксперимент Анаксагора, который Аристотель описывает так: «Те, которые пытаются доказать, что [пустота] не существует, опровергают не то, что люди подразумевают под пустотой, но то, что они ошибочно

В другом месте Платон подробно описывает различные цвета и их состав[178]. Он делает справедливый вывод, что не упомянутые им цвета можно получить путем смешения, но отговаривает собеседников от того, чтобы проводить подобные эксперименты, так как они под силу только Богу, но не человеку[179].

Значит, Платон вполне способен к наблюдениям, зачастую весьма тщательным, он ловко умеет пользоваться математическими, физическими и астрономическими знаниями своего времени, но в то же время отказывается от практических экспериментов, т. е. от «прикладной науки». Почему? Причина не в том, как иногда говорят, что греческий народ был в целом враждебен к технике, — это мнение, как мы убедились в первой главе, ошибочно. Основной причиной является скорее то, что обученный философии человек обнаруживает, «до какой степени обманчиво зрение, обманчив слух и остальные чувства»[180]. Вспомним об отношении Платона к меха-

---

называют [этим словом], как, например, Анаксагор и другие, опровергающие таким способом. Ведь они доказывают только, что воздух есть нечто, закручивая мехи и показывая, насколько упруг воздух, а также запирая его в клепсидрах. А люди подразумевают под пустотой протяжение, в котором нет никакого воспринимаемого чувствами тела...» (Аристотель. Физика. IV, 6, 213a). На этом примере Платон мог видеть, что эксперимент может, при определенных обстоятельствах, совсем не относиться к делу (проходит полностью мимо вещи) и вообще ничего не доказывает.

178 Тимей. 67c–68c.

179 «Тот, кто попытался бы строго проверить все это на деле, доказал бы, что не разумеет различия между человеческой и божественной природой, ведь если у бога достанет и знания, и мощи, дабы смесить множество в единство и сызнова разрешить единство в множество, то нет и никогда не будет такого человека, которому обе эти задачи оказались бы по силам» (Тимей. 68c–d).

180 Федон. 83a. См. также подробное описание в «Федоне» (79c): «А разве мы уже не говорили, что, когда душа пользуется телом, исследуя что-либо с помощью зрения, слуха или какого-нибудь иного чувства (ведь исследовать с помощью тела и с помощью чувства — это одно и то же!), тело влечет ее к вещам, непрерывно изменяющимся, и от соприкосновения с ними душа сбивается с пути, блуждает, испытывает замешательство и теряет равновесие, точно пьяная?»

ническим вспомогательным средствам в геометрии (см. параграф 2.4): они дают лишь приблизительные величины, но никакого представления о законах чистой геометрии.

Следовательно, Платон признает значение эмпиризма в каких-то областях, но считает его *ненадежным* в поисках истинного знания: это в значительной степени лишь «теневой набросок»[181]; только чистое мышление может вести к верному познанию.

Данное утверждение надо разделить на два высказывания:

1) эмпирическое познание менее надежно, чем познание, которое происходит от чистого мышления;

2) только с помощью чистого мышления можно достичь истинного знания.

Первое высказывание можно подвергнуть критике. Ламарк, например, занимал прямо противоположную точку зрения; он пишет: «Суждения, лежащие вне круга приобретенных представлений, оказываются совершенно необоснованными. Суждение для ума то же, что глаза для тела. Как в том, так и в другом случае явления и предметы представляются именно такими, какими их видят. Но орган зрения у всех людей находится примерно на одинаковом уровне совершенства, и если глаза иногда и обманывают, то обман этот в общем невелик, и каждый человек располагает средствами, позволяющими исправить возможные при этом крупные ошибки. Далеко не так обстоит дело с суждениями: степени правильности суждения настолько разнообразны, настолько многочисленны и так сильно отличаются у одних индивидуумов по сравнению с другими, что, рассматривая предельные проявления этой прекрасной способности, можно обнаружить огромные различия между одним человеком и другим»[182].

Леонард Эйлер тоже подверг точку зрения Платона подробной критике и показал, что «истины, познаваемые нами посредством чувств, столь же непреложны, как и самые что ни на есть

---

[181] Государство. 583b.

[182] Ламарк. Аналитическая система. С. 551.

обоснованные математические истины»[183] — «я даже осмелюсь утверждать, что рассуждение вводит в обман значительно чаще, чем ощушения»[184].

Согласно Э. В. Бету, с этой частью платоновской теории познания — что эмпирическое познание менее надежно, чем познание, которое происходит от чистого мышления — нельзя согласиться. Да, она может объяснить, почему в нашем повседневном мире мы не можем найти математические объекты в чистом виде, «но он [платонизм. — *В. З.*] может сделать это лишь в ущерб той уверенности, которую мы приписываем нашему нынешнему математическому знанию. Ибо, если это знание основано на воспоминании, тогда как же оно может продемонстрировать более высокую степень надежности, нежели знание, основанное на нашем чувственном восприятии?»[185]

Интересно, что Давид Гильберт также подчеркнул, что опыт не является ни второстепенным, ни ненадежным, но наоборот, является основой знания. Гильберт был подлинным создателем формализованной математики, в которой понятия (и аксиомы) лишены смысла[186], и, по-видимому, не имеют ничего общего с нашим будничным опытом. Тем не менее Гильберт считал созерцание и опыт фундаментальными. В своей книге «Основания геометрии» он сперва цитирует Канта: «Так всякое человеческое познание начинается представлениями, переходит к понятиям и

---

183 Эйлер. Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях. С. 260. Эйлер признает платоновский символ пещеры только в ограниченном смысле, так как он различает три правды, из которых каждая не более известна, чем остальные: правда опыта, правда разума, и правда веры. Только фантазер классифицирует правду опыта как более низкую или принципиально сомнительную.

184 Там же. С. 262.

185 Beth. The Foundations of Mathematics. P. 639–640.

186 Как однажды сказал Гильберт: в геометрии мы могли бы вместо «точка, прямая, плоскость» сказать «любовь, закон, трубочист» или «стул, стол, пивная кружка» — при этом содержание евклидовой геометрии не претерпело бы никаких изменений.

кончается идеями»[187]. А затем в первой главе он говорит: «Аксиомы геометрии мы можем разделить на пять групп; каждая отдельная группа выражает известные, связанные между собою основные факты нашего представления»[188]. То есть только *кажется*, что построенная на аксиомах математическая теория — это «бессодержательная игра»; в действительности аксиомы выбраны так, что они приспособлены к нашему опыту. Говоря словами Канта, «как только дело доходит до основных сил или основных способностей, всякое человеческое постижение прекращается, так как ничем нельзя познать их возможность; *но так же мало можно произвольно измышлять и допускать их*. Вот почему в теоретическом применении разума *только опыт* дает нам право признавать их»[189]. Колмогоров же подчеркивал, что чистый формализм сам по себе ничего не дает, «лишь метаматематика позволяет установить, каким формулам формализованной математики можно придать содержательное толкование, допускающее применения к изучению реального мира и в реальной человеческой практике»[190].

---

[187] Еще более остро Кант выразил основополагающее значение эмпирического следующими словами: «Нам действительно ничего не дано, кроме восприятия и эмпирического продвижения от данного восприятия к другим возможным восприятиям» (Кант. Критика чистого разума. С. 451).

[188] Гильберт. Основания геометрии. С. 2.

[189] Кант. Критика практического разума. С. 366. (Курсив мой.)

[190] Колмогоров. Математика — наука и профессия. С. 232. Однако Бурбаки полагает — и это ясно из его основной установки, — что значение «Основ» Гильберта как раз состоит в том, чтобы показать, что для математики отношение к реальности не имеет значения. «Он [Гильберт] убедительно доказывает, что в той области науки, которая до сих пор считалась наиболее близкой к явлениям чувственного мира, математики пользуются свободой при выборе постулатов. Несмотря на замешательство среди некоторых философов, возникшее от этих "метагеометрий" со странными свойствами, основная концепция "Grundlagen" получила у математиков быстрое и почти единодушное признание; А. Пуанкаре, которого вряд ли можно заподозрить в пристрастии к формализму, пришел в 1902 г. к выводу, что геометрические аксиомы являются соглашениями и понятие "истины" в обычном значении слова в отношении их уже не имеет смысла.

То, что путь должен проходить от эмпиризма к теории, а не наоборот — что, кстати, представляет наивысший дидактический интерес! — показывает и письмо Архимеда к Эратосфену: «Многое, что мне сначала прояснилось механикой, доказывалось позже геометрией... На самом деле легче произвести доказательство на основании первоначальных представлений о вопросе механическим методом, чем изобретать доказательство без предварительного представления»[191]. Значит, Архимед сначала разрабатывал с помощью механических моделей основные «предварительные представления», которые затем подтверждал чисто геометрическими соображениями.

Однако вторая часть высказывания Платона — о том, что только чистое мышление может привести к верному знанию, — все равно сохраняет право на существование. Когда Архимед экспериментировал с механическими моделями, это вызвало в его мышлении те идеи, которые затем сделали возможным настоящее понимание того, что он увидел в эксперименте. Когда эти идеи стали более конкретными, Архимед смог использовать их для разработки соответствующей теории из более осмысленных и правильных представлений. Такой ход событий Кант сформулировал следующим образом: да, нужно исходить из отдельных практических знаний и исследовать их, насколько это возможно; они действительно образуют нередуцируемое основание. Но представить отдельные эмпирические сведения *в их связи*, т. е. добраться до реального научного знания, удается только тогда, когда мы несем в себе *представление о целом*, и эта идея исходит не из эмпирики, а из наших чисто рациональных способностей[192]. Проще говоря, если у нас нет

Таким образом, "математическая истина" пребывает исключительно в логической дедукции из посылок, произвольно установленных аксиомами» (Бурбаки. Очерки по истории математики. С. 28).

191 Это письмо было обнаружено в 1906 г. исследователем Архимеда Хейбергом (см.: Heiberg. Eine neue Archimedeshandschrift. S. 235–303). Здесь цитируется по: Colerus. Von Pythagoras bis Hilbert. S. 75–76.

192 «Когда дело идет об определении особой способности человеческой души по ее источникам, содержанию и границам, то исходя из природы чело-

заранее какого-то представления о том, как в определенном случае ведут себя вещи, невозможно подготовить осмысленный эксперимент. И наоборот, осмысленно объяснить экспериментальные данные можно только тогда, когда мы мысленно уже создали возможную модель разъяснения, какую-то «теорию».

Можно прекрасно проиллюстрировать это дискуссией Галилея с церковными авторитетами. Тогдашние римские теологи были, по словам Вайцзеккера[193], открыты для новых знаний, но они попросили Галилея доказать его утверждение, и Галилей не смог предоставить таких доказательств. Аристотель учил, например, что тела с различным весом с разным ускорением падают на землю, и это очень хорошо совпадало с повседневным опытом. Галилей, однако, опирался не только на эмпирику, скорее он искал идеальный закон, в платоновском смысле, которому эмпирика более или менее повинуется. Поэтому он утверждал, что в идеальном случае, т. е. когда тела падают в вакууме и, следовательно, ничего не мешает их падению, все тела ускоряются одинаково. Но он не мог создать вакуум и обосновать свою гипотезу экспериментально[194]. Точно так же Галилей не был в состоянии бесспорно про-

---

веческого познания это, конечно, возможно только в том случае, если точное и (поскольку это возможно при нынешнем положении уже приобретенных нами элементов его) полное изложение его начинать с его частей. Но здесь надо обратить внимание еще на нечто другое, имеющее более философский и *архитектонический* характер, а именно на необходимость правильно постичь *идею целого* и из нее в чистой способности разума обратить пристальное внимание на все части в их отношении друг к другу, выводя их из понятия этого целого» (Кант. Критика практического разума. С. 319–320). Короче говоря: «Разум — это создатель его предметов и мира, состоящего из них; но таким образом, что реальные вещи являются причинами его действий и, следовательно, его представлений» (Kant. Der Streit der Fakultäten. S. 343).

193 Weizsäcker. Die Tragweite der Wissenschaft. S. 107–109.

194 Уже Лукреций утверждал, что в вакууме все тела падают с одинаковой скоростью: «Должно поэтому все, проносясь в пустоте без препятствий, равную скорость иметь, несмотря на различие в весе» (О природе вещей. II, 238–239), но и он пришел к этому выводу на основании атомистических соображений, а не на основании эмпирических фактов.

демонстрировать учение Коперника — его наблюдения в телескопе допускали чрезвычайно разные интерпретации. Мнение, что римские теологи были слепыми догматиками, а Галилей трезвым эмпириком, таким образом, нельзя поддержать. Скорее можно сказать, что теологи, вслед за Аристотелем, требовали поддающихся эмпирической проверке доказательств, в то время как Галилей руководствовался идеями в духе Платона[195]. Но именно опора на чистые идеи и позволила естествознанию сделать гигантский шаг вперед.

Платон открыл нечто важное относительно математики: пускай и здесь эмпиризм фундаментален, но математическая уверенность в конечном счете не происходит из практического расчета, она не является продуктом опыта. Чужеземец в «Политике» сформулировал это так: арифметика и некоторые другие сродные ей занятия *не занимаются делами* и дают *только чистые знания*, они являются не практическим, а *познавательным* искусством[196]. Эмпирически, с

---

[195] Важность идей и теоретических конструкций, подчеркивают, конечно же, и многие другие мыслители и исследователи. У Канта, например, мы читаем: «Тот, кто рассматривает различные области природы целенаправленно и планомерно, открывает такие свойства, которые остаются незамеченными и скрытыми, когда наблюдения ведутся беспорядочно и бессистемно» (Кант. Всеобщая естественная история и теория неба. Т. 1. С. 150). Подобно Платону, подчеркнувшему центральное значение идеи Блага, Кант сводит все свойства природы к вечной идее божественного разума: «Непосредственно после сотворения мира природа находилась в первичном состоянии и была совершенно бесформенна. Но уже в существенных свойствах элементов, составляющих этот хаос, можно заметить признаки того совершенства, которым они обладали с самого начала, поскольку их бытие вытекает из вечной идеи божественного разума» (Там же. С. 156).

[196] Политик. 258d–e. Ср. также: Политик. 259d–260b: «Будь же внимателен: какое мы усмотрим в нем разделение? — Скажи ты, какое? — Вот какое. Существует ли у нас счетное искусство? — Да. — Оно, я думаю, несомненно относится к познавательным искусствам. — Как же иначе? — Но коль скоро оно познало различие в числах, мы ведь не припишем ему большей роли, чем роль судьи того, что познано? — Конечно. — Ведь и любой зодчий не сам работает, а только управляет работающими. — Да. — И вносит он в это знание, а не ручной труд. — Это так. — Поэтому

помощью наших органов чувств, мы никогда не сможем доказать, что сумма углов равна прямому углу; но в геометрии мы можем сделать это с помощью чистых мыслительных процессов. Или возьмем другой пример: как может — спрашивает И. Яглом[197] — многовековый опыт человечества подтвердить или опровергнуть, что

$$\forall A,B \in \mathcal{P}\left(A \neq B\right)\exists! \ell \in \mathcal{P}\,\Big|\left(A \in \ell\right)\wedge\left(B \in \ell\right) \quad {}^{198}$$

Каждый человек согласится с этим утверждением, но никто не сможет доказать его истинность на основании эмпирического опыта. «Мы знаем это», «мы видим это», — скажем мы, но откуда мы знаем? На каком основании мы полностью убеждены в его истинности? Или: мы наглядно видим, что $5 + 7 = 7 + 5$, но на каком основании мы уверены, что $a + b$ всегда равно $b + a$? Кант, как известно, ссылался на роль интуиции, особенно когда речь идет о больших цифрах, которые мы не можем охватить наглядно; но Фреге считал, что как раз в случае больших цифр интуиция не работает: «Откуда мы на самом деле можем знать, что

$$123456789 + 987654321 = 1111111110\,?$$

Разумеется, не через подсчитывание точек. Если ответ будет: "Путем апелляции к определенным правилам", то откуда мы знаем, что эти правила всегда верны?»[199]

справедливо было бы сказать, что он причастен познавательному искусству. — Бесспорно. — Но только, я думаю, после того, как он вынесет суждение, это еще не конец, и он не может на этом остановиться, подобно мастеру счетного искусства: он должен еще отдавать приказания — какие следует — каждому из работающих, пока они не выполнят то, что наказано. — Правильно. — Значит, хотя все такие искусства — связанные с искусством счета — познавательные, однако один их род отличает суждение, а другой — приказ? — По-видимому».

197 Яглом. Математика и реальный мир. С. 7.

198 Это выражение выглядит для неопытного читателя страшнее, чем оно есть. Его содержание — просто убеждение, что для двух точек A и B, принадлежаших к плоскости P, обязательно существует одна (и только одна) прямая l, которая лежит в P и на которой лежат A и B.

199 Gray. Plato's Ghost. P. 81.

На такие вопросы Платон отвечает следующим образом: математические объекты и законы существуют в трансцендентном мире, которому принадлежала и наша душа, прежде чем была заключена в человеческом теле. Наша уверенность в математических знаниях основывается на том, что наша душа способна вспомнить о том трансцендентном мире и снова увидеть господствующие в нем математические законы. Органы чувств не могут гарантировать такое знание; однако они необходимы в том смысле, что они будят спящее в душе знание. «Абсолютная тождественность», например, — это понятие из трансцендентного мира, однако мы вспоминаем его, если обнаруживаем приблизительно те же самые вещи в нашем опыте:

> А разве не такое же впечатление у нас составляется, когда речь идет о равных вещах и равенстве самом по себе? — Совершенно такое же! — Ну, стало быть, мы непременно должны знать равное само по себе еще до того, как впервые увидим равные предметы и уразумеем, что все они стремятся быть такими же, как равное само по себе, но полностью этого не достигают. — Да, верно. — Но мы, конечно, согласимся и в том, что такая мысль возникает и может возникнуть не иначе как при помощи зрения, осязания или иного чувственного восприятия[200].

Гуссерль пытался описывать это положение вещей, делая различие между «переживаниями» и «истиной». «Переживания суть реальные единичности, определенные во времени, возникающие и преходящие. Истина же "вечна", или, лучше: она есть идея, и как таковая сверхвременна... Правда, и об истине говорят, что она при случае "осознается" и, таким образом, "схватывается", "переживается" нами. Но здесь, в отношении этого идеального бытия, о схватывании, переживании и осознании говорится в совершенно ином смысле, чем по отношению к эмпирическому, т. е. индивидуально единичному бытию. Истину мы "схватываем" не как эмпирическое содержание, всплывающее и вновь исчезающее в потоке

---

200 Федон. 74e–75a.

психических переживаний; она не феномен среди феноменов, а переживание в том совершенно измененном смысле, в каком переживанием является общее, идея»[201].

Оскар Беккер, в свою очередь, поддерживал и интерпретировал в своем многогранном исследовании «Математическое существование» точку зрения Платона о природе «чистого познания» таким интересным образом, что стоит процитировать его здесь. Беккер пишет: «Платон обнаруживал "априорный" характер всего "математического", собственно поддающегося изучению знания. Это действительно знание, существовавшее *до* опыта нашей жизни. Математическое знание, следовательно, является, с одной стороны, знанием "чисто исходящим из того, что есть", независимо от фактического *личного* опыта. С другой стороны, именно поэтому оно не приходит извне, встречая нас в жизни как "опыт", но бессознательно включено в нас с самого мифического прошлого. Только стимул для его повторного осознания может прийти из опыта, только задавая *вопросы* можно обратить на него внимание, но ему невозможно *научиться*. Загадка преподавания и обучения "решается", следовательно, посредством того, что возможность настоящего преподавания и обучения (в наивном смысле) *отрицается*. Но при этом μαθήματα и μάθησις получают весьма различное положение: μαθήματα происходят из мифического доисторического времени, и у μάθησις есть в какой-то мере *магическая сила снова воскрешать тени живущих в то доисторическое время*. Отсюда возвышенность математики, по мнению Академии, и отсюда то странное изречение на ее воротах: Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω! — Современный скептик будет говорить, конечно, что речь идет здесь об одном из известных платоновских мифов, и нельзя воспринимать вещи дословно. Сам Платон не поверил бы серьезно в действительность более ранней жизни души и в "воспоминание" об этом. И для дела это прекрасное сказание, конечно же, абсолютно неприемлемо. В ἀνάμνησις, скажут они, мы видим еще заикающееся, полумифическое выражение для феномена, который, однако,

[201] Гуссерль. Логические исследования. Т. 1. С. 120–121.

является основой для философского понимания математики, — феномена "чистого воззрения a priori" в смысле Канта. Мы не согласны с этим мнением. Мы смеем спросить: не подходит ли платоновский термин ἀνάμνησις, будучи философски, т. е. *онтологически,* рассмотрен, более глубоко и правильно к сути математического познания, чем кантовское наименование "чистого воззрения" — a priori? Или спросим еще острее: что означает a priori? Что другое может выразить этот термин, нежели чем "из более раннего", т. е. "из более ранней жизни"? Но в каком смысле следует понимать это? Более ранняя жизнь — это "*до-время*" (Vor-Zeit), это *доисторическое* существование; оно существует *до* ἱστορία, т. е. *до* живого опыта. Это свое собственное раннее детство каждого человека, своя доисторическая эпоха каждого народа, свое "раннечеловеческое" у человечества вообще, своя примитивная жизнь душ. Все это не "прошло" в грубом смысле, а живет еще в нас, хоть и скрыто: как так называемое "бессознательное", или "подсознательное", или, как мы хотим сказать: как субисторическое. Тезис Платона о ἀνάμνησις нужно, следовательно, интерпретировать как утверждение *доисторического* или *субисторического происхождения математического познания*... Эти смелые предчувствия Платона могут послужить нам сегодня в качестве руководства и дать фундаментальные вопросы — хотя бы намеком — о смысле бытия математического»[202].

Но вернемся снова к значению эмпиризма. Платон был в значительном смысле «практиком»: его усилия по достижению истинного знания служили в конечном счете для того, чтобы надежно ухватить суть добродетели, описывать идеальное государство, перечислять признаки хорошего правителя и т. д. Он не был философом ради философии, он не представлял абстрактную философию в башне из слоновой кости, он никогда не забывал о чувственной жизни. Его

---

[202] Becker. Mathematische Existenz. S. 680–683. Похожие мысли мы нашли и у философа А. Тумаркиной: математика «дает надежду, что благодаря ей "движущаяся волна жизни" может сгуститься в "кристаллический шар"» (см. примеч. 194 на с. 140).

познание — ради практики! В этом смысле четко сформулировал Штенцель: «Не на бледность мысли указывают позднеплатоновские теории, а наоборот: они — самое сильное подтверждение предположения Фихте, что грекам скорее удалось чрезвычайное усовершенствование чувствительности, чем абстрактного мышления; можно пойти дальше и сказать, что ценность их философии состоит всегда, и на сегодняшний день особенно, в том, что их миновала неизбежная судьба всего интеллектуального: атрофия зрительных органов или, что еще хуже, замена их на неясную индивидуальную интуицию. Они избежали этой судьбы благодаря тому, что это превосходство чувственности привело, наконец, к соразмерности всех умственных сил, самым чистым выражением которой стало навсегда мышление Платона и Аристотеля»[203].

4.6. О рациональности нашего поведения

Платон признавал важность практического опыта и практических знаний и поэтому называл органы обоняния незаменимым даром богов — даже понимая, что эти органы могут обманывать нас[204]. Такие же достоинства он признавал и за специальными знаниями практиков[205]. По этому поводу И. Н. Мочалова замечает: «Вероятно, ряд работ академиков имел *прикладной* характер, в частности, работы по оптике Филиппа Опунтского»[206]. Но все же Платон

---

203 Stenzel. Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles. S. 125.

204 «По моему разумению, зрение — это источник величайшей для нас пользы; вот и в нынешнем нашем рассуждении мы не смогли бы сказать ни единого слова о природе Вселенной, если бы никогда не видели ни звезд, ни Солнца, ни неба» (Тимей. 47а).

205 Протагор. 312d: Живописцы или строители — «тоже знатоки в мудрых вещах».

206 Мочалова. Метафизика ранней академии и проблемы творческого наследия Платона и Аристотеля. С. 250 (курсив мой). «В качестве примера практического использования научных разработок может быть рассмотрен так называемый "платоновский будильник", или "ночные часы" (νυκτερινὸν ὡρολόγιον), поставленные в саду Академии, по всей вероятности, еще при жизни Платона. Аристокл сообщает, что будильник был устроен, как

оценивал философию и математику выше, чем знание и навыки столяров, поваров, сапожников, плотников и крестьян, и, соответственно, полагал, что именно математическое (и особенно философское) образование делает человека способным к назначению на ответственные государственные посты[207]. Платон считал, что обученные философии правители автоматически станут *хорошими* правителями и поэтому нужно добиваться ситуации, при которой «философы и правители великих государств окажутся одними и теми же лицами»[208]. Такая позиция обусловлена мнением Платона, что душа питается *знаниями*[209], а *человек действует согласно тому, что знает*:

> Большинство [людей] считает, что знание не обладает силой и не может руководить и начальствовать, потому-то о нем и не размышляет. Несмотря на то что человеку нередко присуще знание, они полагают, что не знание им управляет, а что-либо другое: иногда страсть, иногда удовольствие, иногда скорбь, иной раз любовь, а чаще — страх. О знании они думают прямо как о невольнике: каждый тащит его в свою сторону. Таково ли примерно и твое мнение о знании, или ты полагаешь, что знание прекрасно и способно управлять человеком, так что того, кто познал хорошее и

"очень большая клепсидра, наподобие органа" (Athen. IV, 174 ff) и должен был ранним утром собирать товарищей и учеников Академии на занятия» (Там же).

207 См., напр.: Государство. 456d: «А в государстве, которое мы основали, как ты думаешь, какие люди получились у нас лучше — стражи ли, воспитанные так, как мы разбирали, или же сапожники, воспитавшиеся на своем мастерстве? — Смешно и спрашивать!»

208 VII письмо. 328. Естественно, философское образование должно прилагаться к соответствующему характеру. Платон хорошо понимал это, на что указывает продолжение текста: «Меня страшила мысль об их молодости и о том, как все это выйдет, ведь молодые люди скоры в своих стремлениях и часто увлекаются ими в противоположную сторону. Однако я знал характер Диона, природную твердость его духа и установившуюся в нем с возрастом выдержку».

209 «Но чем же питается душа, Сократ? — Знаниями, разумеется, — сказал я» (Протагор. 313с).

плохое, ничто уже не заставит поступать иначе, чем велит знание, и разум достаточно силен, чтобы помочь человеку?[210]

Мы не можем разделить это убеждение Платона. И мы сомневаемся, что философия как «наивысшая» наука функционирует настолько рационально и достоверно, как считал Платон. Поэтому мы также подвергаем сомнению и то, что философски образованные (в понимании Платона) государственные руководители будут действовать полностью рационально, справедливо и мудро. Уже Аристотель заметил, что «невозможно и, во всяком случае, непросто с помощью рассуждения совершить перемену в том, что издавна воспринято нравами»[211], т. е. тезис о том, что человек управляется преимущественно разумом, ошибочен. Что касается философов, то их «рациональность», как известно, подверг острой критике П. Фейерабенд. Что же до ответственных государственных умов, обычно получивших престижное высшее образование, то в последние годы, особенно в ходе международного финансового кризиса, появились сильные сомнения в их рациональности и надежности. П. Слотердайк, например, сказал так: «Сколько лауреатов Нобелевской премии по экономике сейчас — после событий последних месяцев — высказывают сомнение в том, что при сохранении обычного понятия рационального в их области возможно продвижение вперед. Если это так, то я настоял бы на том, чтобы они вернули свои Нобелевские премии, так как почти все эти премии были присуждены за работы, основывавшиеся на рационалистической идеализации и математическом блефе. Нужно, наконец, реконструировать экономическую науку как науку *нерационального*, как теорию ведомого страстью и случайного поведения. Психология уже сто лет описывает человека как *animal irrationale*. Что-то похожее теперь постепенно становится заметно и в общественно-политических и экономических науках. Теперь они тоже все чаще описывают человека как существо, которое почти

---

[210] Протагор. 352b–c.

[211] Аристотель. Никомахова этика. 1179b 17–18.

никогда не ведет себя как здравомыслящая и всегда надежная машина, просчитывающая свои действия. Настоящий человек, как он проявляет себя вне теоретических моделей, живет страстями, случайностью и подражанием. Для людей, настроенных просветительски, эти диагнозы содержат, конечно, серьезные требования. Мы хотим считать себя благоразумными, организованными, прозрачными для себя самих и оригинальными существами, но на самом деле мы непредсказуемы, уязвимы перед хаосом, хмуры и стереотипны»[212].

Но все же в определенном смысле Платон прав. Если справедливо именно то, что наша жизнь проходит в значительной мере иррационально, тем важнее, что мы не отдаем ее нерациональному полностью. При этом обучение математическим дисциплинам становится полезным — во всяком случае тогда, когда оно не происходит в односторонне-абстрактной форме. *Ratio*, действительно, — это только *маленький* нож, которым довольно часто ничего нельзя сделать, но если это достаточно *острый* нож, он выполняет основные задачи. Мы призываем философов неутомимо использовать этот «нож» прежде всего против самих себя.

---

212 Питер Слотердайк в беседе от 29 ноября 2008 о финансовом кризисе рынка. URL: www.nzz.ch/nachrichten/kultur/aktuell/wir_lebten_in_einer_frivolitaetsepoche. Б. Рассел также подвергал сомнению способность образованных стражей Платона гарантировать функционирующее государство. Вот что он писал об этом «идеальном» государстве: «Платон обладал искусством так маскировать свои нелиберальные советы, что они вводили в заблуждение в последующие века многих людей, которые восхищались его диалогом «Государство», не понимая того, что заключалось в его рецептах. Всегда считалось правильным хвалить Платона, но не понимать его. Это общая судьба всех великих людей. Моей задачей является обратное. Я хочу понять Платона, но обращаться с ним так же непочтительно, как если бы он был современным английским или американским адвокатом тоталитаризма» (Рассел. История западной философии. С. 150). Но ради справедливости надо отметить, что в более поздних трудах Платон стал мягче и «демократичнее», что нашло отражение в «Законах».

4.7. Математика и философия

Читателям, глубоко заинтересовавшимся проблематикой данного труда, будет интересно более подробно обсудить в этом параграфе темы, уже затронутые ранее (особенно в параграфах 2.5 и 2.8), а именно: об отношении между философией и математикой в платоновском мышлении. Теперь мы поговорим об этом отношении немного более продробно и обобщенно, рассматривая взгляды различных современных авторов. Не беда, если при этом мы где-то повторим уже высказанные мысли, так как, по словам Сократа, «есть хорошая пословица, что дважды и трижды нужно повторять прекрасное»[213], или, словами Главкона, «придется еще не раз к этому возвращаться»[214]. Итогом последующих рассуждений будет вывод о том, что Платон с удивительной ясностью видел главные особенности математики и философии и их связи между собой.

Мы рассмотрим следующие вопросы: 1) В чем заключаются проблемы и недостатки математики, и на чем основываются ее достоинства и ее необходимость? 2) В чем заключаются проблемы и недостатки философии, и на чем основываются ее достоинства и ее необходимость? 3) В чем математика и философия отличаются, а в чем они похожи? 4) Каковы корни неразрывной связи между математикой и философией? 5) Почему тесная связь между математикой и философией, характерная для платоновской Академии, сильно ослабла в течение столетий? 6) Можно ли сказать, что философия стоит «выше» математики?

1) В чем заключаются проблемы и недостатки математики и на чем основываются ее достоинства и ее необходимость?

Математика пользуется репутацией науки, не зависящей от «мнений» и опирающейся только на убедительные доказательства и рациональные соображения. В этом смысле математика считается образцовым примером точной, абсолютно надежной науки.

---

[213] Филеб. 59e.

[214] Государство. 532d.

Особенно по сравнению с другими науками — естествознанием, наукой о человеке и обществе, историей — «математика признается особым, первостепенным видом научного знания»[215]. И в прошлом сами математики думали, что их область знания является совершенно определенной. Г. Вейль описал это убеждение так: поскольку в классической математике термины "существует" и "все", а также относящиеся к ним логические принципы, применяются неограниченно, «грандиозное здание анализа приобретает несокрушимую крепость, оказываясь прочно заложенным и строго обоснованным во всех своих частях»[216]. А Д. Гильберт в своем знаменитом докладе «О бесконечном», прочитанном 4 июня 1925 г. на одном математическом съезде, выразил триумфальные впечатления той эпохи такими словами: «Благодаря гигантской совместной работе Фреге, Дедекинда и Кантора, бесконечное было возведено на трон и наслаждалось временем своего высшего триумфа. Бесконечное в своем дерзком полете достигло головокружительной высоты успеха»[217].

Но оказалось, что этот трон стоял на шатком основании. Гильберт так продолжает свои рассуждения: «Очень драматически... выявились противоречия, сначала единичные, а затем все более резкие и все более серьезные: так называемые парадоксы теории множеств. В особенности это относится к противоречию, найденному Цермело и Расселом, опубликование которого оказало на математический мир прямо-таки катастрофическое действие. Перед лицом этих парадоксов Дедекинд и Фреге фактически отказались от своей точки зрения и очистили поле битвы: Дедекинд долго сомневался перед тем, как выпустить новое издание своей работы "Что такое числа, и чем они должны быть", которая в свое время открыла новую эпоху; у Фреге также была тенденция считать свою книгу "Основные законы арифметики" ошибочной, в чем он признается в одном из своих послесловий. И на учение Кантора с

---

[215] Вечтомов. Математическая реальность и действительность. С. 24.

[216] Вейль. О философии математики. С. 16.

[217] Гильберт. Основания геометрии. С. 348.

различных сторон были произведены бурные нападки»[218]. Гильберт констатирует наличие этих противоречий и заканчивает свое рассуждение вопросом: «Надо согласиться, что состояние, в котором мы находимся сейчас в отношении парадоксов, на продолжительное время невыносимо. Подумайте: в математике — этом образце достоверности и истинности — образование понятий и ход умозаключений, как их всякий изучает, преподает и применяет, приводят к нелепостям. Где же искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку?»[219]

Сам Гильберт не сдавался, он был уверен, что «существует вполне удовлетворительный путь, по которому можно избежать парадоксов, не изменяя при этом нашей науке»[220]. Но все его попытки спасти ситуацию не привели к успеху — то же самое, кстати, произошло и с Расселом. Рассел много лет упорно трудился, чтобы найти выход из катастрофического положения, вызванного наличием парадоксов, но в итоге сказал: «Я искал определенности того же рода, что и в случае, когда люди хотят опереться на религиозную веру. Я думал, что такую уверенность можно скорее всего найти в математике. Но я обнаружил, что многие из математических доказательств, которые я, по мнению моих преподавателей, должен был бы принять, были полны ложных выводов и ошибок. Так что если такая надежность действительно должна была быть найдена в математике, то это должно было бы происходить в новой области математики, в области с более твердыми основаниями, нежели те, которые до сих пор считались надежными. Но в процессе работы я все чаще вспоминал басню о слоне и черепахе. После того как я соорудил слона, на которого мог бы опереться математический мир, я обнаружил, что этот слон шатается, поэтому я перешел к конструированию черепахи, которая должна была предотвратить падение слона. Но черепаха оказалась не сильнее слона, и примерно через 20 лет напряженной работы я

---

[218] Гильберт. Основания геометрии. С. 349.

[219] Там же.

[220] Там же.

пришел к выводу, что ничего больше не могу сделать для освобождения математического знания от какого-либо сомнения»[221]. Зная о таком негативном личном опыте, можно лучше понять знаменитую формулировку Рассела: «Математику можно определить как науку, в которой мы никогда не знаем, о чем говорим, и истинно ли то, о чем мы говорим»[222].

Чтобы увидеть, что ситуация действительно кризисная, приведем один яркий пример. В своей статье «О значении закона исключенного третьего в математике, особенно в теории функций»[223]

---

221 Цит. по: Davis. Fidelity in Mathematical Discourse. P. 252.

222 URL: http://100citat.ru/citati/citatipotemamm/citatipotemamm5.html

223 Brouwer. Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik. S. 1–7. Для Брауэра математика — это больше образ действий, чем «теория». Следовательно, она должна «конструироваться», а не «придумываться» или даже «воображаться». Взгляды Брауэра, касающиеся закона исключенного третьего, излагает в краткой форме Герман Вейль в своей книге «О философии математики» (с. 103–107). См. также описание Френкелем «обычного взгляда математиков» и возражения Брауэра: «Надо сказать, что "обычный" математик или философ, так же как "обычный здравый смысл", склонны противиться неоинтуиционистской позиции по отношению к принципу исключенного третьего. Независимо от того, удастся ли прийти к какому-либо решению в настоящее время или когда бы то ни было, все равно, — говорят они, — "объективное" положение дел обязательно состоит в том, что предложение является либо истинным, либо ложным. [Например] существует только шесть простых чисел вида $2n + 1$, либо имеется по крайней мере семь таких чисел. Такая аргументация, отвечает Брауэр, основана на двойном недоразумении. Это прежде всего представление о том, что математика имеет дело с некими внешними фактами или с платоновскими идеями, существующими независимо от деятельности математиков; но ведь именно в результате этой деятельности — и только в результате ее — и создается математика. Если даже кто-либо и верит в некую "объективную истину", характер ее метафизичен, а математические доказательства не могут опираться на метафизические соображения. Во-вторых, утверждение tertium non datur вызвано (сознательным или бессознательным) влиянием необоснованного распространения на бесконечные области процедуры, законной лишь в применении к конечным областям; процесс просмотра бесконечной области никогда не может быть закончен, так что его "исход" предсказать нельзя даже в принципе» (Френкель, Бар-Хиллел. Основания теории множеств. С. 267–268).

знаменитый математик Л. Брауэр представил доказательство, согласно которому общепризнанная и преподаваемая в каждом университете теорема Вейерштрасса[224] ошибочна. По мнению Брауэра, Вейерштрасс исходил из несостоятельных предпосылок, что привело его к получению ошибочных результатов[225].

Эти рассуждения Брауэра сразу напоминают нам о Платоне, который точно понимал суть данной проблемы, описывая ее следующим образом: в геометрии — и в тех науках, которые следуют за ней, — люди действуют, так сказать, не наяву, а во сне, так как не отдают себе отчета в своих предположениях. Может быть, эти предположения недостоверны? Тогда из них неизбежно вытекают сомнительные или даже ложные результаты![226]

---

[224] То есть теорема: «Любая непрерывная функция f(x), определенная всюду в пределах отрезка I, имеет максимум».

[225] Кстати, уже Фреге писал: «Эта борьба между требованиями арифметики и теориями Вейерштрасса производит в том числе и то чудо повторного происхождения предметов, которое может наблюдаться, впрочем, также у других авторов-математиков. Но если бы эти господа захотели попытаться сами возникнуть повторно! Видел ли кто-то из них песчинку, возникающую снова и снова? Но не является ли это только неточным способом выражения, можем мы спросить? Если так, то это не настолько невинно! Если попытаться заменить этот способ выражения на точный, это лишило бы теории Вейерштрасса основной опоры» (Frege. Grundgesetze der Arithmetik. T. II. S. 152). Ср. также следующие критические высказывания Фреге: «Если мы сравним приведенные письма, мы едва ли сможем усомниться в том, что Вейерштрасс стоял на детской точке зрения "орехового пряника"... На вопрос о сути количества мы получаем ответ типа "ряд аналогичных вещей", "предмет из элементов того же самого вида"; короче: куча ореховых пряников — это число по Вейерштрассу» (Ibid. S. 150). «Самое важное для арифметика, который в общем признает возможность творчества, заключается в разработке законов в убедительной манере, законов, которые следует соблюдать, а затем доказать в каждом отдельном акте творения, что он был разрешен в соответствии с этими законами. *Иначе все становится неточным, и доказательства опускаются до простого счета, до успокаивающего самообмана*» (Ibid. S. 142, курсив мой).

[226] Государство. 533b: «Что касается остальных наук, которые пытаются постичь хоть что-нибудь из бытия [речь идет о геометрии и тех науках,

Эти взгляды Платона не потеряли своего значения и сегодня, стоит лишь вспомнить Г. Фреге: «О значении основной мысли формальной арифметики многие математики, пожалуй, остаются в неведении... Формальная арифметика сможет спасти себя лишь в том случае, если изменит собственным принципам. Этому очевидно способствует поспешность, с которой математики большей частью обходят основы своей науки — если они вообще занимаются этим, — чтобы заняться более значащими предметами. Многое совсем пропускают, другого касаются только мельком, ничего не раскрывают подробно. Таким образом, теория может казаться прочной, но сразу обнаружила бы свою слабость при любой серьезной попытке настоящего осуществления»[227].

Проблемы стали острее и заметнее в начале XX в., когда появилась *теория множеств*. Эта теория, с таким успехом созданная Георгом Кантором, стала фундаментом математики, но когда Рассел представил свой знаменитый парадокс[228], на нее, по словам Гиль-

---

которые следуют за ней], то им всего лишь снится бытие, а наяву им невозможно его увидеть, пока они, пользуясь своими предположениями, будут сохранять их незыблемыми и не отдавать себе в них отчета. У кого началом служит то, чего он не знает, а заключение и середина состоят из того, что нельзя сплести воедино, может ли подобного рода несогласованность когда-либо стать знанием». Ср. с более наглядной, но все же критической формулировкой Гексли: «Математика, подобно жернову, перемалывает то, что под него засыпают, и как, засыпав лебеду, вы не получите пшеничной муки, так, исписав целые страницы формулами, вы не получите истины из ложных предпосылок» (Электронный источник. URL: http://www.edu.cap.ru/Home/5562/aforizmi.doc).

227 Frege. Grundgesetze der Arithmetik. T. II. S. 139 (курсив мой.)

228 Рассел рассматривает множество K всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента, и спрашивает: содержит ли K само себя в качестве элемента или нет? Если да, то, по определению K, оно не должно быть элементом K. Если нет, то, опять по определению K, оно должно быть элементом K. И в том и в другом случае получается противоречие. В более наглядной, не математической форме эта антиномия звучит так: допустим, что в какой-то деревне парикмахер бреет всех мужчин деревни, которые не бреются сами. Тогда возникает вопрос: бреет он самого себя или нет? Если да, то он принадлежит к тем, кто бреется сам, но тогда он не должен брить себя! Если нет, он принадлежит к тем, кто не бреется сам, но

берта, «с различных сторон были произведены бурные нападки». В то же время математики и логики упорно старались найти выход из этой дилеммы, но пришли к совершенно различным результатам. Хао Ван, один из экспертов в этих вопросах, описывает наличие таких различных выводов следующим образом: «Некоторые математики заключили отсюда, что при рассмотрении множеств нельзя просто полагаться на интуицию, хотя множества являются фундаментальными понятиями для математики и человеческого мышления. Другие математики отвергают всю теорию множеств (в том числе и классический анализ), считая ее ошибочной и несостоятельной. Третья группа математиков, напротив, считает, что парадоксы не затрагивают теории множеств по той простой причине, что они возникают из-за определений и рассуждений, искажающих математическую интуицию и существенно отличающихся от правомочных методов, обычно применяемых в математике. Какую бы из этих точек зрения ни принять, необходимо признать, что важной задачей является уточнение тех представлений, которые лежат в основе теории множеств, а также возможно более четкое выделение тех рассуждений, которые приводят к противоречиям... Таким образом, можно полагать, что если надежна интуитивная модель, включающая в себя иерархию типов, то в равной мере надежна соответствующая формальная система. Но на каком основании мы уверены в том, что можно полагаться на интуитивную модель?.. Мы полагаемся на интуитивную модель, так как в ней классы порождаются, так сказать, в определенном порядке, имея исходным пунктом совокупность индивидов. Если мы согласны исходить из интуитивной уверенности в том, что такое образование классов является когерентным (coherent) процессом, то можно полагаться на интуитивную модель и тогда формальная система будет непротиворечивой. Но если нет уверенности в том, что иерархия типов получается при помощи процесса, заслуживающего доверия, то единственным основанием

тогда он должен будет брить себя! Мы приходим к выводу, что этот парикмахер бреет себя, когда он не бреет себя...

для того, чтобы считать теорию типов надежной, является лишь то обстоятельство, что в ней, по-видимому, устраняются все известные до сих пор парадоксы»[229]. Значит, в теории множеств имеют место, по выражению Френкеля, «причудливые блуждания», и это приводит к тому, что некоторые математики просто отказываются от требований обосновать эту теорию и используют ее только из-за того, что она удобна и плодотворна[230]. Все это весьма похоже на ситуацию в философии: разные мнения, разные аргументы, разные школы, различные ожидания и требования…

Что касается соответствующих проблем в *анализе*, то мы в параграфе 2.8 уже приводили критические взгляды, например, Джорджа Беркли. Добавим здесь рассуждения П. Лоренцена[231], основателя «оперативной» математики. Если мы, говорит он, тщательно проверим современное исчисление бесконечно малых, то мы увидим, что оно, по словам Вейла, «построено на песке». Оно

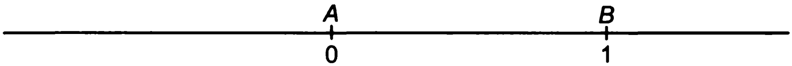
---

[229] Ван Хао, Мак-Нотон. Аксиоматические системы теории множеств. С. 9–10, 14, 15.

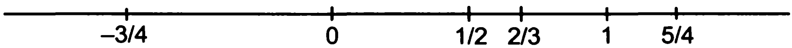
[230] «Вполне естественно, что в глазах некоторых мыслителей все эти причудливые блуждания служат подтверждением той точки зрения, что ни одна из рассмотренных трех основных онтологических концепций объективно не имеет никакого отношения к проблеме оснований, независимо от того, что думают по этому поводу приверженцы этих концепций и насколько сильны в этом отношении их чувства. Сторонники такого образа мыслей пришли к выводу, что теории множеств следует оценивать не по их онтологиям (в смысле Куайна), а по их плодотворности» (Френкель, Бар-Хиллел. Основания теории множеств. С. 406). И действительно, «на поверхности» математика развивается спокойно и солидно и каждый день доказывает свою основательность в теории и на практике. Поэтому многие математики совсем не видят никаких проблем и не чувствуют потребности «копать глубже». Говоря словами Френкеля: «Как и везде в эти дни, в математике имеется свой кризис; он зародился в начале этого века, и до сих пор нет обоснованных перспектив его разрешения. Но математики не слишком обеспокоены этим, так как первый основательный кризис их науки произошел два с половиной тысячелетия назад, и в это же время начался феноменальный взлет ее развития» (Fraenkel. Philosophie der Mathematik. S. 334).

[231] Lorenzen. Das Aktual-Unendliche in der Mathematik. S. 3–11.

трактует геометрические проблемы расчетным способом, и для этого заменяет каждый отрывок множеством его точек. Это возможно на основании особого соотношения между арифметикой и геометрией: если мы выберем на прямой две точки, *A* и *B*, и отождествим их с числами 0 и 1,



то сможем сопоставить каждому рациональному числу одну определенную точку:



Если мы запишем рациональные числа в форме десятичных дробей, например

$$\frac{1}{2} = 0{,}5\ ; \quad \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots\ ; \quad \frac{3}{7} = 0{,}428571\,428571\,428571\ldots$$

то увидим, что все эти десятичные дроби либо конечные, либо бесконечные, но периодические. А в современной математике — и это важный момент — предполагается, что и каждой бесконечной *непериодической* дроби, например

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots\ ; \quad \pi = 3{,}14159\ldots$$

тоже соответствует на прямой линии одна определенная точка. На этом пути множество всех действительных чисел отождествляют с актуально бесконечной геометрической линией, и, следовательно, это множество чисел *тоже* считается актуально бесконечным. Но таким образом стирается существенная разница между конечными и бесконечными десятичными дробями: конечную дробь можно записать, бесконечную — никогда. Говорить о бесконечной последовательности цифр — это если не совсем нелепость, то по меньшей мере очень рискованное предприятие. Оно сравнимо с представлением о бесконечном у Кантора, которое, как мы знаем, может приводить к антиномиям.

Добавим мнения еще двух авторов, которые, не являясь профессиональными математиками, серьезно занимались проблемами в этой области. Сначала дадим слово Шарлю Луи де Сольс Фрейсинэ, французскому политику и автору нескольких книг о философии математики. Уже в молодости он интересовался анализом бесконечно малых величин, который будоражил его воображение «вследствие несколько таинственного характера своих основных начал». «Каковы, в сущности, — спрашивает он, — понятия о бесконечном и о бесконечно малом, на которых основывается анализ? Чем открытие Лейбница отличается от обыкновенной алгебры, с которой каждый более или менее знаком? По какой темной тропинке оно ведет нас к истине и не рискуем ли мы на этом пути распрощаться с математической точностью?»[232] Особенно интересует его понятие «предела»: «В обыкновенном языке пределом называют преграду, за которую нельзя переступить. Но эта преграда может быть достигнута, ее можно касаться. В математическом же языке словом *предел* называется такая преграда, которой не только нельзя переступить, но которая даже не может быть достигнута. К ней лишь можно приближаться»[233].

О том, что здесь действительно скрыты вопросы, говорит и Ф. Энгельс. Его удивляет, например, что в высшей математике при определенных условиях прямое и кривое должны представлять собой одно и то же, что является противоречием, «и тем не менее высшая математика этими и еще гораздо более резкими противоречиями достигает не только правильных, но и совершенно недостижимых для низшей математики результатов»[234]. К. Маркс

---

[232] Сольс Фрейсинэ. Очерки по философии математики. С. IV.

[233] Там же. С. 37.

[234] Энгельс. Анти-Дюринг. С. 125. Энгельс добавляет, что «уже и низшая математика кишит противоречиями. Так, например, противоречием является то, что корень из A должен быть степенью A, и тем не менее $A^{1/2} = \sqrt{A}$. Противоречием является также и то, что отрицательная величина должна быть квадратом некоторой величины, ибо каждая отрицательная величина, помноженная сама на себя, дает положительный квадрат. Поэтому квадратный корень из минус единицы есть не просто противоречие, а даже абсурдное противоречие, действительная бессмыслица. И все же $\sqrt{-1}$ является во многих случаях необходимым результатом правильных математических операций; более того, что было бы с математикой, как низшей, так и высшей, если бы ей запрещено было оперировать с $\sqrt{-1}$?» (Там же). См. также следующую цитату, отражающую неудобства даже

также, неустанно подходя с разных сторон, пытался добраться до сути проблем анализа, например до значения выражения 0/0. «Мы видели, как эти различные формулы были получены в виде символических выражений для производных функций, следовательно, как символы уже выполненных операций, а из ранее изложенного само собой разумеется, что и обратно они становятся символическими оперативными формулами, формулами, указывающими лишь подлежащие еще выполнению операции для отыскания соответствующих им реальных эквивалентов или производных функций»[235]. На основании таких размышлений Маркс позволяет себе критиковать такого авторитетного автора, как Тейлор: «Все же мне представляется совершенно бесспорным, что Тейлор не имел ни малейшего представления о простой связи между его теоремой и теоремой о биноме. Он действовал целиком на почве самого дифференциального исчисления, не возвращаясь к его истокам»[236].

современных студентов (и ряда профессиональных математиков): «Как только математики укроются в свою неприступную твердыню абстракции, так называемую чистую математику, все эти аналогии забываются; бесконечное становится чем-то совершенно таинственным, и тот способ, каким с ним оперируют в анализе, начинает казаться чем-то совершенно непонятным, противоречащим всякому опыту и всякому смыслу. Те глупости и нелепости, которыми математики не столько объясняли, сколько извиняли этот свой метод, приводящий странным образом всегда к правильным результатам, превосходят самое худшее, действительное и мнимое, фантазерство натурфилософии (например, гегелевской), по адресу которого математики и естествоиспытатели не могут найти достаточных слов для выражения своего ужаса. Они сами делают — притом в гораздо большем масштабе — то, в чем они упрекают Гегеля, а именно доводят абстракции до крайности. Они забывают, что вся так называемая чистая математика занимается абстракциями, что все ее величины суть, строго говоря, воображаемые величины и что все абстракции, доведенные до крайности, превращаются в бессмыслицу или в свою противоположность. Математическое бесконечное заимствовано из действительности, хотя и бессознательным образом, и поэтому оно может быть объяснено только из действительности, а не из самого себя, не из математической абстракции» (Энгельс. Диалектика природы. С. 586).

235 Маркс. Математические рукописи. С. 502.

236 Там же. С. 446.

Спорные и вызывающие сомнения аспекты мы встречаем не только в теории множеств или в математическом анализе, но и в сфере *формальной логики*. Какая это «логика», можно спросить, что она собой представляет? На что она способна, где лежат ее границы? По поводу последнего Н. И. Жуков пишет: «Формальная логика "останавливает" движение, каковым является понятийное мышление, "квантует" его на дискретные "атомы" ("атомарные высказывания"), а затем с помощью элементарных арифметических операций имитирует движение понятий в урезанном виде, в рамках более или менее однозначных зависимостей. В итоге с помощью ЭВМ воспроизводится лишь рассудочная деятельность, точнее, формально-логическая сторона мышления. Последнее моделируется (имитируется), а не воспроизводится таким, каким оно является у человека»[237].

Очень интересны и значимы рассуждения П. Бернайса, главного сотрудника Гильберта: он напоминает нам о странном выражении Витгенштейна, что логические исчисления — это лишь «бахрома, добавленная к арифметическому исчислению». В каком смысле, спрашивает Бернайс, Витгенштейн прав? То, что можно уложить арифметические термины и выражения в рамки «логистики» (т. е. математической или символической логики), и, следовательно, доказать их в этих рамках, является бесспорным фактом. Тем не менее встает вопрос, покажет ли этот результат, что мы получили собственно философское понимание арифметических положений? Если мы рассмотрим, например, логистическое доказательство уравнения $3 + 7 = 10$, то заметим, что оно использует представления, которые встречаются в обыкновенных расчетах! Другими словами: уравнение $3 + 7 = 10$ верно не потому, что верна соответствующая логика предикатов, а наоборот: это выражение будет истинным на языке логики из-за того, что уравнение $3 + 7 = 10$

---

[237] Жуков. Философские основания математики. С. 95. Однако есть и люди, которые более «оптимистично» смотрят на возможности искусственного интеллекта. См. мнение Клюйковых в параграфе 3.9.

верно[238]. Весь логический аппарат, как правильно заметил Витгенштейн, вовсе не выполняет того, что обычно от него ждут, это на самом деле только бахрома, ненужное украшение, которое добавляют к элементарным расчетам, чтобы они выглядели «более научно».

На этом мы остановимся. Наверное, стало ясно, что в математике существуют проблемы, требующие более глубокого исследования, т. е. философского просвещения, или, как сказал Гегель, осознания «метафизических категорий»[239]. Платон, несомненно, согласился бы с Гегелем в том, что математики, ограничивая себя узкой сферой своей профессии и не осознавая этих «метафизических категорий», могут дойти лишь — в лучшем случае! — до «вводной части» исследования[240].

---

238 Более подробно Бернайс пишет: «Die logische Definition der Dreizahligkeit ist strukturell so beschaffen, daß sie in sich gewissermaßen das Moment der Dreizahligkeit enthält. Es wird ja die Dreizahligkeit eines Prädikats P (beziehungsweise der Klasse, welche den Umfang von P bildet) erklärt durch die Bedingung, daß es Dinge x, y, z von der Eigenschaft P gibt, die paarweise voneinander verschieden sind, und daß ferner jedes Ding von der Eigenschaft P mit x oder y oder z identisch ist. Die Feststellung nun, daß für ein dreizahliges Prädikat P und ein siebenzahliges Prädikat Q, im Falle, daß die Prädikate nicht gemeinsam auf ein Ding zutreffen, die Alternative PvQ ein zehnstelliges Prädikat ist, erfordert für ihre Begründung gerade solche Vergleichungen, wie sie im elementaren Rechnen gebraucht werden, nur dass hier noch ein zusätzlicher logischer Apparat (die "Fransen") in Funktion tritt» (Bernays. Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik. S. 135).

239 «Должно же наконец наступить время, когда наука осознает метафизические категории, которыми она пользуется!..» (Гегель. Энциклопедия философских наук. Т. 2. С. 94). Немецкий подлинник «Wann wird die Wissenschaft einmal dahin kommen, über die metaphysischen Kategorien, die sie braucht, ein Bewußtsein zu erlangen!» лучше перевести так: «Когда, наконец-то, наука осознает метафизические категории, в которых она нуждается!..»

240 Государство. 531d: «Ты разумеешь вводную часть или что-нибудь другое? Разве мы не знаем, что все это лишь вступление к тому напеву, который надо усвоить? Ведь не считаешь же ты, что кто в этом силен, тот и искусный диалектик?» Ср. также интересные размышления Сократа в «Федоне» (99a–d) о людях, довольствующихся ограниченным знанием:

Теперь пора перейти к положительным сторонам математики. Сначала упомянем о посреднической роли математики, о которой мы уже говорили в параграфе 2.5, и добавим некоторые другие моменты. Один аспект состоит в том, что математика способна служить посредником между чувственным миром и миром идей; по словам Когена: «Так же, как, с одной стороны, объект математического мышления связан с чувственностью обычного восприятия, он, с другой стороны, связан с познавательной ценностью идей, и, следовательно, может привести к посредничеству между этими двумя крайними концами бытия, ὄν и ὄντως ὄν»[241]. Курант более подробно описывает особое положение математики внутри остальных наук: «Среди сфер научного мышления математика занимает, несомненно, особое положение. Несмотря на тесную связь с естественными науками, она не является ни одной из них; математические объекты — это не природные, но принадлежащие к сфере

«Да, клянусь собакой, эти жилы и эти кости уже давно, я думаю, были бы где-нибудь в Мегарах или в Беотии, увлеченные ложным мнением о лучшем, если бы я не признал более справедливым и более прекрасным не бежать и не скрываться, но принять любое наказание, какое бы ни назначило мне государство. Нет, называть подобные вещи причинами — полная бессмыслица. Если бы кто говорил, что без всего этого — без костей, сухожилий и всего прочего, чем я владею, — я бы не мог делать то, что считаю нужным, он говорил бы верно. Но утверждать, будто они причина всему, что я делаю, и в то же время что в данном случае я повинуюсь Уму, а не сам избираю наилучший образ действий, было бы крайне необдуманно. Это значит не различать между истинной причиной и тем, без чего причина не могла бы быть причиною. Это последнее толпа, как бы ощупью шаря в потемках, называет причиной — чуждым, как мне кажется, именем. И вот последствия: один изображает Землю недвижно покоящейся под небом и окруженною неким вихрем, для другого она что-то вроде мелкого корыта, поддерживаемого основанием из воздуха, но силы, которая наилучшим образом устроила все так, как оно есть сейчас, — этой силы они не ищут и даже не предполагают за нею великой божественной мощи. Они надеются в один прекрасный день изобрести Атланта, еще более мощного и бессмертного, способного еще тверже удерживать все на себе, и нисколько не предполагают, что в действительности все связуется и удерживается благим и должным».

[241] Cohen. Platons Ideenlehre und die Mathematik. S. 18.

интеллекта феномены. Но еще менее можно отнести математику к гуманитарным наукам, каковые, при всей произвольности их разделения и при всем многообразии их предметов и методов, объединяет нечто общее, а именно, ориентация на *человека* как разумную личность. Ничто не лежит дальше от математического мышления, чем такая установка: математическое мышление стремится скорее к познанию абсолютной истины, оторванной от "Я", и воплощает эту тенденцию, направленную в противоположную от человеческо-личного сторону, сильнее, чем любая из естественных наук»[242].

Своеобразно высказывался о точке зрения Платона, касающейся посреднической роли математики, В. Асмус: «В отличие от "идей" математические предметы и математические отношения постигаются посредством рассуждения, или размышления рассудка. Это и есть второй вид знания... Итак, размышление, направленное на математические предметы, занимает, по Платону, середину между подлинным знанием и мнением. Почему же математические предметы занимают такое положение? Дело в том, что, по Платону, математические предметы родственны и вещам, и "идеям". Предметы эти как "идеи" неизменны; природа их не зависит от отдельных экземпляров, представляющих их в чувственном мире. Например, природа треугольника не зависит от того, какой частный треугольник мы станем рассматривать. Но вместе с тем, поясняет Платон, математики вынуждены прибегать для постижения своих предметов к помощи отдельных фигур. Фигуры же эти рисуются или представляются посредством воображения. Именно поэтому математическое знание не есть знание, совпадающее с тем, при помощи которого постигаются "идеи". Оно совмещает в себе черты истинного знания с некоторыми чертами мнения»[243].

Во введении к своему изданию комментария Прокла об Евклиде Г. Морроу резюмирует точку зрения Прокла — которую сам Прокл считает достоверным мнением Платона — следующим образом:

---

[242] Courant. Über die allgemeine Bedeutung des mathematischen Denkens. S. 89.

[243] Асмус. Платон. С. 86–87.

«Чувственное восприятие способно лишь на тусклое постижение бытия; его знание фрагментарно, неточно и неустойчиво и составляет лишь мнение (doxa) о своих объектах. Понимание (dianoia) вносит ясность и точность, но его осторожные дискурсивные процедуры, его отношение к своим объектам как к протяженным и зависимость его принципов от высшего знания раскрывают его ущербность в немедленном, полном и несомненном понимании Nous... [Понимание], таким образом, является подлинным посредником между низшим и высочайшим уровнями бытия, подражающим наивысшему и предоставляющим понятные модели для понимания лежащего ниже мира физических процессов»[244].

Особый интерес представляют комментарии Гайзера к трем «математическим» отрывкам из «Менона». Стоит привести их здесь в переводе. «Интерпретация трех математических мест [в "Меноне"] в целом подтвердила ожидание... что для Платона уже в то время существовала внутренняя связь между философским вопросом о "благом" и определенными математическими представлениями... Философский интерес, с которым Платон следил за математическими исследованиями, становится понятным, если увидеть, что различные аспекты математической проблематики тесно взаимосвязаны: всюду можно наблюдать некоторое напряжение в отношении между единством и множеством, соразмерностью и несоразмерностью, определенностью и неопределенностью. А это значит, что для Платона математика давала возможность изучить отношение между Peras и Apeiron, которое, видимо, в виде модели обосновывает весь порядок бытия. (В средней части диалога Сократ высказывает мнение, что все происходящие явления и законы физического мира должны рассматриваться как *связанные друг с другом* (81d1). То, что Платон был особенно убежден, что все сущее происходит *из общего начала*, а значит, можно предполагать, что *в основном все можно объяснить единообразно*, нам покажут введенные в беседу математические примеры. Это, видимо, осо-

---

[244] Morrow. Proclus — A Commentary on the First Book of Euklid's Elements. P. XXXIV.

знание, что *математика* может предоставить систематическую основу — которую также можно назвать областью гипотез — для выявления всего порядка бытия...) Понятие гипотезы, которое появляется в "Меноне", указывает, однако, не только на возможность систематического взаимодействия, но и характерным способом ограничивает ответственность системного мышления. В "системе", которая существует из сплетения гипотез, никакое положение не является абсолютно допустимым, но нужно снова и снова проверять, согласовывается ли оно с феноменами, с одной стороны, и с общими принципами с другой. [*Примеч. 71 у Гайзера:* Поэтому недопустимо момент *философского незнания* противопоставлять *понятию системы* у Платона. Устойчивая и в значительной степени осуществленная тенденция к системному образованию не противоречит у Платона пониманию, что возможности человеческого познания ограничены. Напротив: именно потому, что человеческое мышление (в отличие от божественного Ума (Nous), в котором субъект и объект познания соединяются) не имеет непосредственно в своем распоряжении всей совокупности существующего, оно нуждается в систематическом образце, на который оно, по крайней мере пока, может ориентироваться. Таким образом Платон понимал общую область математики как общую область языка, но также и обширную онтологическую систему теории принципов понимал как несовершенную в самой себе "модель", в которой реальность отображается и позволяет охватить себя лишь приблизительно]»[245].

По мнению Шопенгауэра[246], на этой посреднической роли польза математики заканчивается. Платон, сказал он, «рассматривал геометрию как подготовительную школу, в которой ум учеников, до тех пор в практической жизни занимавшийся одними только телесными вещами, привыкал к изучению бестелесных предметов». Только в этом смысле Платон «рекомендовал философам геометрию, и мы не имеем права давать этому совету более широкое

---

245 Gaiser. Platons Menon und die Akademie. S. 289–291.

246 Шопенгауэр. Мир как воля и представление. Т. 2. С. 108–109.

толкование». И Шопенгауэр советует читателям обратить внимание на книгу профессора Гамильтона, который считал математику не только бесполезной, но и вредной для школьников и студентов. В этой книге действительно приводится множество примеров и цитат, иллюстрирующих этот вред, например: «Когда я овладел основами, я оставил изучение математики навсегда, — и я рад, что сделал это достаточно рано, прежде чем мой нрав затвердел вследствие привычки к строгой демонстрации, привычки, которая разрушает более тонкое чувство моральной ясности, которое должно определять действия и мнения нашей жизни»[247].

Но всегда находились авторы, считавшие, что математике принадлежит не только посредническая, но и «полезная», «необходимая», и даже «высшая» роль среди других наук.

Представление о *полезной роли* мы находим уже у самого Платона, и можем формулировать его, используя слова А. Е. Раик: Платон был убежден, что математический опыт служит для философии тем точильным камнем, о который философы могут оттачивать свои логические философские положения[248]. Но математика полезна не только для философов, но и для воспитания человека вообще: «Нужно изучать математику уже потому, что она

---

247 Цитата по переводу на немецкий язык: Hamilton. Ueber den Werth und Unwerth der Mathematik als Mittel der höheren geistigen Ausbildung. S. 58. Другой пример: «Кое-кто предполагает, что истинный способ привыкнуть к резким и последовательным рассуждениям основан на практике математических демонстраций, так что тот, кто приучил свой разум к этим заключительным формам, может применить их к другим отраслям знаний. Это, однако, ошибка... Наоборот, привычка к математическому рассуждению, кажется, не позволяет делать правильные выводы о любом другом предмете» (Ibid. S. 59). Мнение Шопенгауэра по этому поводу таково: «Взгляд автора [Гамильтона] сводится к тому, что ценность математики — лишь косвенная: а именно, ею следует пользоваться для тех целей, которые достижимы только с ее помощью; сама же по себе математика оставляет дух на той же ступени, на которой она его нашла, и не только не способствует его дальнейшему образованию и развитию, но даже прямо препятствует им» (Шопенгауэр. Мир как воля и представление. Т. 2. С. 108–109).

248 Раик. Очерки по истории математики в древности. С. 148.

упорядочивает мысли»[249]. Математика развивает аналитические, дедуктивные, критические, прогностические способности, она улучшает возможности абстрактного мышления и способность концентрации, она тренирует память и усиливает быстроту мышления[250]. Что касается особой полезности математики для гуманитарных наук, то Лохер-Эрнст ставит вопрос так: «Можно ли применять математический метод, в расширенном смысле, в области качественного, и таким образом гарантированно добиться высокого качества исследования также на более высоких ступенях бытия?»[251] Сам он ответил бы: да! можно! Если вернуться к философам, то можно процитировать Фреге, который так выразил свое убеждение в практической полезности своих исследований для философов: «Применение моих символов в других областях не исключено. Логические отношения появляются снова и снова, и знак для конкретного содержания может быть выбран таким образом, чтобы он включался в рамки данной работы "Begriffsschrift". Происходит это или нет, во всяком случае, наглядное представление о формах мышления имеет выходящее за рамки математики значение. Поэтому было бы хорошо, если также и философы уделяли бы этому вопросу некоторое внимание!»[252]

Кеплер также имел четкое представление о полезности математики, как на основании личного опыта, так и видя успехи других ученых, которые добились результатов только с помощью интенсивного и экстенсивного использования математики. При этом польза математики состоит не только в получении значимых данных, а еще и в том, что она поддерживает самого ученого и укрепляет силу его духа: «Я поздравляю вас… так как вы привели свой дух, через изучение математики — которая одна только дает невероятно надежное основание согласию разума — к тому, что он

---

[249] Ломоносов. URL: http://www.arndt-bruenner.de/mathe/Allgemein/zitate.htm

[250] Это перечисление взято отсюда: Перов Н. Зачем нужна математика? Электронный источник. URL: http://nperov.ru/razum/zachem-nuzhna-matematika/

[251] Locher-Ernst. Mathematik als Vorschule zur Geist-Erkenntnis. S. 133.

[252] Frege. Begriffsschrift und andere Aufsätze. S. 114.

не отступил перед значительными трудностями, от которых уклонились перед этим наиболее талантливые»[253].

Приведенная цитата указывает также на *необходимую роль* математики: без нее практически невозможно достичь результатов в сложных задачах. Необходимая роль математики состоит и в том, что без нее невозможно *понимать* наш мир детально и глубоко. Галилей говорил об этом так: «Философия, изложенная в этой великой книге — я имею в виду Вселенную, — постоянно открыта нашему взору, но ее нельзя понять, если сначала не научиться постигать и интерпретировать язык символов, на котором она написана. Она написана на языке математики, ее буквами служат треугольники, окружности и другие математические фигуры, без помощи которых человеку невозможно понять ее речь; без них — лишь напрасные блуждания в лабиринте»[254]. Вспомним, что Платон уже в «Тимее» не смог отказаться от обоснованного использования математики, и тем более невозможно, не имея сильной математической подготовки, понять современную физику.

А как же *высшая роль* математики? О ней также говорили и говорят авторы самых различных направлений. Платоновский Афинянин, например, считает знание математических фактов характеристикой настоящего человека[255]. Платоновский Сократ также видит в математических феноменах, скажем так, жизненную силу:

---

[253] Кеплер в письме к Якобу Барчу от 6 ноября 1629 г. (Kepler. Selbstzeugnisse. S. 75).

[254] Цит. по: Richeson. Euler's Gem. P. 1.

[255] Законы. 820b–c: «Так что же? Разве все мы, эллины, не полагаем, что длина и ширина так или иначе соизмеримы с глубиной или что ширина и длина соизмеримы друг с другом? — Да, именно так мы полагаем. — И вот если снова окажется, что это никоим образом невозможно, между тем как, повторяю, все мы, эллины, полагаем, что это возможно, то разве это не достаточная причина, чтобы устыдиться за всех них? Разве не стоит сказать им: "Лучшие из эллинов, это и есть одна из тех вещей, не знать которые, как мы сказали, позорно; впрочем, такое знание, коль скоро оно необходимо, еще не есть что-то особенно прекрасное". — Да, это так. — Кроме этого, есть и другие родственные этим вещи, в отношении которых

> Несмотря на всю свою мудрость, ты не замечаешь, как много значит и меж богов, и меж людей равенство, — я имею в виду геометрическое равенство, — и думаешь, будто надо стремиться к превосходству над остальными. Это оттого, что ты пренебрегаешь геометрией[256].

Добавим цитаты еще хотя бы двух современных математиков: «Математика также будет принадлежать к строительным камням [лучшего мира]. Я надеюсь, что тогда ее значение будет оценено несколько выше. Математика не должна быть просто прислугой, которая создает полезные вещи, а затем может быть свободной. Скорее математика должна быть, как когда-то, спутницей философии и снова указать человечеству дорогу к вещам, которые не имеют никакой материальной ценности, но выводят из земной суеты наверх, в те сияющие вершины, где мыслящий дух следует за вечными законами числа и пространства и стремится исследовать их»[257]. И это «особая задача будущих математиков — стимулировать энергию духа, чтобы люди направляли свои душевные

у нас возникает опять-таки много заблуждений, сродных первым. — Какие же это вещи? — Это причины, по которым, согласно природе, возникает соизмеримость и несоизмеримость. Необходимо иметь их в виду и различать, иначе человек будет совсем никчемным. Надо постоянно указывать на это друг другу. Таким образом люди проводили бы время гораздо приятнее, чем старики при игре в шашки: ведь старикам прилично, состязаясь в этой игре, коротать свое время». (Немецкий перевод последнего предложения: «Es müssen sich daher noch die Greise beständig gegenseitig hierauf bezügliche Aufgaben vorlegen und so in ihrer würdigen Beschäftigungen mit einander wetteifern und ihre Zeit mit Etwas zubringen das viel edler ist als das Brettspiel». То есть: «Поэтому и старики должны постоянно задавать друг другу задачи, связанные с этим, и, таким образом, соревноваться друг с другом в достойных занятиях и проводить свое время за чем-то, что является гораздо более благородным, чем настольная игра»).

256 Горгий. 508a. Русский перевод «как много значит» не подходит, он слишком слабый. Греческий текст гласит: «… ἡ ἰσότης ἡ γεωμετρικὴ καὶ ἐν θεοῖς καὶ ἐν ἀνθρώποις *μέγα δύναται*», и он лучше переводится так: «Ты не замечаешь, что геометрическое равенство имеет *большую силу/власть* между богами и людьми».

257 Beyel. Der mathematische Gedanke in der Welt. S. 100.

силы в те органы, которые позволяют познавать жизнь космоса, свободно подниматься к благодатному вниманию звукам вселенной; и все это для того, чтобы лучше служить Земле»[258].

(2) В чем заключаются проблемы и недостатки философии и на чем основываются ее достоинства и ее необходимость?

Платон говорил о том, что наши возможности в философии принципиально ограничены и не могут сравниться с способностями «высших существ»:

> Из этого необходимо следует, что душа непорождаема и бессмертна. О ее бессмертии достаточно этого. А об ее идее надо сказать вот что: какова она — это всячески требует божественного и пространного изложения, а чему она подобна — это поддается и человеческому, более сжатому; так мы и будем говорить[259].

В этом русле можно также сказать, что наши философские высказывания принципиально не могут претендовать на полную истинность и убедительность, хотя среди философов и распространен обычай критиковать мнения других, затем излагая свою собственную теорию под видом «настоящей истины»[260]. Претензию

---

[258] Locher-Ernst. Mathematik als Vorschule zur Geist-Erkenntnis. S. 117.

[259] Федр. 246а.

[260] Можно привести такой пример: при попытке философского обоснования математики Н. И. Жуков сначала рассматривает общеупотребительные теории, однако, в духе Ленина, объявляет их односторонними и формулирует «правильную» позицию таким образом: «Одни и те же гносеологические корни "математического" и "физического" идеализма предполагают и похожий путь выхода из кризиса метологических основ данных наук, преодоления ошибок и заблуждений — переход на позиции материалистической диалектики, сознательное усвоение и использование универсальной философской методологии. *Лишь с таких позиций* можно нарисовать адекватную картину мира, показать подлинную роль и значение математики в современной науке, решить проблему ее обоснования на действительно научной основе» (Жуков. Философские основания математики. С. 93, курсив мой).

на провозглашение окончательной истины по праву можно назвать одним из основных пороков философии. Полезно вспомнить здесь в качестве иллюстрации слова Сенеки: «Боже мой, даже если бы мы всем миром навалились на это [на философию], если бы трезвое и серьезное юношество вкладывало сюда все свои силы, если бы только этому учили старшие и учились младшие, — и то едва ли бы мы докопались до дна, где зарыта истина; а сейчас мы ищем ее, гладя поверхность земли изнеженными руками»[261].

Другая проблема философии состоит в том, что исследователи зачастую не видят сильного влияния экономических и политических обстоятельств и многолетних традиций на развитие философского мышления и на какие-то философские теории или школы в особенности[262]. Конкретный пример влияния «внешних факторов» на преподавание и развитие философии приводит Д. В. Шмонин: в Горном училище Санкт-Петербурга, под влиянием И. С. Рижского, философия была неотъемлемой частью учебного процесса, но «довольно скоро последовало охлаждение официальных властей к философии, связанное с изменениями как во внутри-, так и во внешнеполитической ситуации»[263], и, наконец, философские учения были определены как нежелательные и замещены реакционными церковно-нравственными предметами. Более общий взгляд можно найти у М. Я. Выгодского: при господстве стабильных, авторитарных структур сохраняются догматические формы мышления; а желание и потребность аргументировать, доказывать, ставить более глубокие философские вопросы возникли в Греции именно из-за ломки общественных форм[264]. Философская мысль не витает в

---

[261] Сенека. О природе. VII, 32.4.

[262] То же самое, конечно же, можно сказать о точных науках: «Арифметика, подобно религии, также во многом определяется средой, в которой человек вырос» (Fowler. The Mathematics of Plato's Academy. P. 405).

[263] Шмонин. Поощрение разума и корень наук. С. 170.

[264] Выгодский пишет так: «Эта догматическая форма, как мы ясно видели из вавилонских текстов, отнюдь не является доказательством отсутствия теоретического исследования и потому не может служить аргументом в пользу примитивности математики древних египтян. Она обусловлена

вакууме, но зависит (и весьма существенно!) от внешних факторов, — например, от преобладающего духа времени, определяющего и ограничивающего возможные формы мышления. Кольман так описал его в своих размышлениях о «метафизических» и «буржуазных» формах философствования (не заметив при этом, что его собственная точка зрения находится под влиянием диалектико-материалистической формы философствования): «Значение открытия иррациональности далеко не всеми было оценено правильно... Между тем, в несоизмеримости, в противоположности непрерывной величины, познаваемой рационально, и дискретного числа, познаваемого чувственно-наглядно, нашла свое выражение диалектика материального мира, времени и пространства и его познания, суть которой, как указал Ленин, состоит в том, что изображение как мыслью, так и ощущением движения и всякого понятия всегда есть огрубление, омертвление живого. Но метафизический образ мышления не давал древним математикам, как не дает и многим

формой преподавания и всем строем общественной жизни в странах древнего Востока. Там, где высшие и средние государственные должности, как и ремесленные профессии, переходили из рода в род, где существовали не только династии царей, но и династии жрецов и чиновников, преподавание должно было сохранять авторитарный характер. Мы познакомились с вавилонскими математическими текстами различных эпох и могли видеть, как мало изменилась форма изложения за промежуток времени больший, чем полтора тысячелетия! Лишь в математике древних греков доказательству впервые уделяется особое внимание, и это нужно поставить в связь с тем, что жизнь греческих государств в течение длительного времени характеризуется ломкой общественных форм; в бурных столкновениях между классовыми и партийными группами особую роль приобретает убеждение, доказательство; и это сказывается не только в речах политических ораторов, но и в судебных процессах, и в философских спорах, и в научных произведениях. Характерно, что в эллинистическую эпоху значительная часть греческих сочинений по математике, написанных на египетской территории, по форме изложения почти не отличается от древнеегипетских текстов. Это относится почти ко всем сочинениям, посвященным практическим применениям математики... Как же велика должна быть сила традиции, если она подчинила своим требованиям произведения людей, которые воспитывались на трудах Евклида, Архимеда и Аполлония!» (Выгодский. Арифметика и алгебра. С. 231–232).

современным буржуазным историкам математики, математикам и философам, возможность понять это. Наиболее резкое выражение метафизическая точка зрения нашла в школе элеатов, идеологов рабовладельческой аристократии, завзятых противников диалектики, отстаивающих учение о едином, нераздельном и неизменном бытии против зародышей диалектики, содержавшихся даже у пифагорейцев, а тем более у древних материалистов»[265].

Конечно, определяющую роль играют не только внешние факторы: форма и содержание философской конструкции зависят также от характера, личной судьбы и интеллектуальных возможностей самого философа. Что касается последнего, тоже немаловажного пункта, то Витгенштейн, возможно, не сильно преувеличивал, когда писал: «Философ — тот, кто сперва должен излечиться от многих недугов собственного рассудка, прежде чем он придет к понятиям здравого человеческого разумения»[266]. Дело в том, что «как в жизни нас окружает смерть, так и наш здравый рассудок окружен безумием»[267]. Это суждение звучит, безусловно, довольно пессимистично, но ведь действительно, даже ученый, обладающий блестящими познаниями в своей научной сфере, может оказаться полностью некомпетентным в других сферах науки и жизни. Вспомним высказывание Фейерабенда о Фреге (см. параграф 4.2) или слова Аристотеля о том, что Гиппократ был «как математик успешен, но в других вещах он был заведомо туп и неблагоразумен»[268]. Эйлер, этот выдающийся математик и мыслитель, был, кажется, прав, считая, что человеческий разум в принципе совсем не совершенен, но, что еще хуже, находится под влиянием извращенной воли,

---

265 Кольман. История математики в древности. С. 94.

266 Витгенштейн. Культура и ценность. С. 452.

267 *Витгенштейн. Культура и ценность. С. 452. Любопытно, что под* это суждение попадает и сам Витгенштейн: его друг и покровитель Рассел написал однажды о нем: «Мой немецкий инженер, я полагаю, глуп. Он считает, что ничего эмпирического знать нельзя — я попросил его признать, что в этой комнате нет ни одного носорога, но он не сделал этого» (*цит. по:* Waugh. The House of Wittgenstein. P. 50–51).

268 Аристотель. Евдемова этика. 1247a18.

которая оказывается сильнее разума. Поэтому, по мнению Эйлера, даже самые умные люди могут вести себя нелепо. «Сколько человек хорошо знают о возложенных на них обязанностях, но тем не менее прямо противодействуют им? Если бы мы не знали об этом из опыта, нам тяжело было бы вывести возможность такого искаженного поведения из природы человека как благоразумного существа»[269]. Здесь вспоминается высказывание Платона:

> Разве ты не замечал у тех, кого называют хотя и дурными людьми, но умными, как проницательна их душонка и как они насквозь видят то, что им надо? Значит, зрение у них неплохое, но оно вынуждено служить их порочности, и, чем острее они видят, тем больше совершают зла.[270]

Если это действительно так, т. е. если человеческий разум принципиально ограничен и зачастую не может действовать свободно, то этот факт, разумеется, влияет и на философию, и тогда более-менее понятно, почему Витгенштейн пришел к выводу, что «большинство предложений и вопросов, трактуемых как философские, не ложны, а *бессмысленны*. Вот почему на вопросы такого рода вообще невозможно давать ответы, можно лишь устанавливать их бессмысленность»[271].

Но если философия обнаруживает такие «бессмысленные вопросы» и отказывается от ответов на них, то это уже положительный момент. Тогда она выполняет свое назначение и цель — «логическое прояснение мыслей. Философия не учение, а деятельность. Философская работа, по существу, состоит из разъяснений. Результат философии не "философские предложения", а достигнутая ясность предложений. Мысли, обычно как бы туманные и расплывчатые, философия призвана делать ясными и отчетливыми»[272]. Вместе с этими разъяснениями мы переходим к вопросу о

---

[269] Euler. Rettung der Göttlichen Offenbahrung wider die Einwürfe der Freygeister. S. 15.

[270] Государство. 519a.

[271] Витгенштейн. Логико-философский трактат. № 4.003 (Курсив мой.)

[272] Там же. № 4.112.

необходимости и *полезности* философии. Вот что говорит об этом Сократ:

> Ты часто уже слышал: идея блага — вот, это самое важное знание; ею обусловлена пригодность и полезность справедливости и всего остального. Ты и сейчас почти наверное знал, что я именно так скажу и вдобавок что идею эту мы недостаточно знаем. А коль скоро не знаем, то без нее, даже если у нас будет наибольшее количество сведений обо всем остальном, уверяю тебя, ничто не послужит нам на пользу: это вроде того, как приобрести себе какую-нибудь вещь, не думая о благе, которое она принесет. Или, ты думаешь, главное дело в том, чтобы приобрести побольше имущества, не думая о том, хорошее ли оно?[273]

Значит, по мнению платоновского Сократа, философские размышления защищают нас от примитивной и в конечном счете пустой жизни. Без помощи философии человек не сможет достигнуть высшей цели своей жизни и останется в лучшем случае где-нибудь в середине, даже не замечая этого:

> Так вот, если кого-нибудь переносят снизу к середине, не думает ли он, по-твоему, что поднимается вверх, а не куда-нибудь еще? А остановившись посредине и оглядываясь, откуда он сюда попал, не считает ли он, что находится наверху, а не где-нибудь еще, — ведь он не видел пока подлинного верха?[274]

Или, что еще хуже, такой человек вообще не «живет», а просто «спит»:

> Кто не в силах с помощью доказательства определить идею блага, выделив ее из всего остального; кто не идет, словно на поле битвы, сквозь все препятствия, стремясь к опровержению, основанному не на мнении, а на понимании сущности; кто не продвигается через все это вперед с непоколебимой уверенностью, — про того, раз он таков, ты

273 Государство. 505a–b.

274 Там же. 584d.

> скажешь, что ему неведомо ни самое благо, ни какое бы то ни было благо вообще, а если он и прикоснется каким-то путем к призраку блага, то лишь при помощи мнения, а не знания. Такой человек проводит нынешнюю свою жизнь в спячке и сновидениях, и, прежде чем он здесь пробудится, он, придя в Аид, окончательно погрузится в сон[275].

Две тысячи лет спустя Кеплер выразит благодарность за то, что существуют некоторые ученые, не «погрузившиеся в сон», и надежду на будущее появление более глубокой и плодотворной науки в следующих словах: «Я поздравляю государства, я поздравляю все народы христианского мира с тем, что они произвели на свет таких людей[276], и выражаю вполне обоснованную надежду, что скоро совершится вот что: когда бесполезные, сомнительные, задиристые (и, я добавлю, вредные) научные устремления ослабнут, тогда общественно полезные усилия ученых обратятся скорее на размышления о небесном, которые утоляют духовную жажду и наполняют характер — в зависимости от его устройства — определенным сходством с божественными произведениями, и таким образом производят и предлагают самую большую пользу также для самой жизни»[277].

Конечно, не все философы использовали такие восторженные выражения. Но все, наверное, согласились бы со следующим описанием свойств философа: «В повседневном обиходе люди довольствуются первыми двумя формами познания, доверяясь мнениям; математики поднимаются к дианойе, но лишь философы достигают высшей науки, ноэтического знания. В интеллекте и незаинтересованном созерцании, оставив ощущения и все связанное с чувственным, в процессе дискурса и интуитивного проникновения собирают

---

[275] Там же. 534c.

[276] Кеплер имел в виду ученых, использующих его Tabulæ Rudolphinæ для ежегодного исчисления эфемерид — утомительная, но важная для общества работа.

[277] Кеплер в открытом письме к Якобу Барчу от 6 ноября 1629 г. (см.: Kepler. Selbstzeugnisse. S. 75).

чистые идеи, их позитивные и негативные отношения, связи включения и изъятия, восходят от идеи к идее, пока не достигнут вершины, т. е. Безусловного. Вот этот процесс восхождения и есть "диалектика", а философ, по определению, есть "диалектик"»[278]. И наверное, многие согласились бы с Лосевым: «Мысль философа ищет предельно общего, т. е. идеи тех единичных предметов, которые без этого общего остались бы просто непознаваемыми»[279].

Такая задача неизбежно поглощает философа целиком, — и об этом говорится в поэтическом, но при этом убедительном описании философа у Платона:

> *Сократ:* Ну что ж, если тебе угодно, давай поговорим о корифеях, ибо что можно сказать о тех, кто философией занимается без особого рвения? Эти же с ранней юности не знают дороги ни на агору, ни в суд, ни в Совет, ни в любое другое общественное собрание. Законов и постановлений, устных и письменных, они в глаза не видали и слыхом не слыхали. Они не стремятся вступить в товарищества для получения должностей, сходки и пиры и ночные шествия с флейтистками даже и во сне им не могут присниться. Хорошего ли рода кто из граждан или дурного, у кого какие неприятности из-за родителей, от мужей или от жен — все это более скрыто от такого человека, чем сколько, по пословице, мер воды в море. Ему не известно даже, что он этого не знает. Ибо воздерживается он от этого вовсе не ради почета, но дело обстоит так, что одно лишь тело его пребывает и обитает в городе, разум же, пренебрегши всем этим как пустым и ничтожным, парит надо всем, как у Пиндара, меря просторы земли, спускаясь под землю и воспаряя выше небесных светил, всюду испытывая природу любой вещи в целом и не опускаясь до того, что находится близко. — *Феодор:* Что ты имеешь в виду, Сократ? — *Сократ:* Я имею в виду Фалеса, Феодор. Рассказывают, что когда он, наблюдая небесные светила и заглядевшись наверх, упал в

---

[278] Реале, Антисери. Западная философия. Т. I. С. 114–115.

[279] Лосев. Платоновский объективный идеализм. С. 16.

> колодец, то какая-то фракиянка, миловидная и бойкая служанка, посмеялась над ним, что-де он стремится знать, что на небе, того же, что рядом и под ногами, не замечает. Эта насмешка относится ко всем, кто проводит свой век в занятиях философией. В самом деле, от такого человека скрыто не только что делает его ближайший сосед, но чуть ли и не то, человек он или еще какая-то тварь. А между тем он доискивается, что же такое человек и что подобает творить или испытывать его природе в отличие от других, и крайне этим озабочен. Ну как, теперь ты постигаешь, о чем я говорю?[280]

В этом описании, как говорит Вернер Йегер, философ выглядит несколько смешно[281], и непросто представить его правителем в платоновском государстве. Но такой нелепой фигурой он выглядит только в современном, коррумпированном обществе — в платоновском государстве он бы расцвел и продемонстрировал всю свою силу. «Философ — это росток, который, будучи пересаженным на чуждую ему почву современного государства, либо чахнет, либо приспосабливается к этой почве. Но стоит только такой натуре оказаться в условиях идеального государства, тогда-то и обнаружится ее божественное происхождение»[282].

В условиях платоновского государства философ не просто способен управлять — *только он* и способен к этому:

---

[280] Теэтет. 173c–174b.

[281] Ср.: Федр. 249c–d: «А это есть припоминание того, что некогда видела наша душа, когда она сопутствовала богу, свысока глядела на то, что мы теперь называем бытием, и поднималась до подлинного бытия. Поэтому по справедливости окрыляется только разум философа: у него всегда по мере его сил память обращена на то, чем божествен бог. Только человек, правильно пользующийся такими воспоминаниями, всегда посвящаемый в совершенные таинства, становится подлинно совершенным. И так как он стоит вне человеческой суеты и обращен к божественному, большинство, конечно, станет увещевать его, как помешанного, — ведь его исступленность скрыта от большинства».

[282] Йегер. Пайдейя. Т. 2. С. 257.

> Философы — это люди, способные постичь то, что вечно тождественно самому себе, а другие этого не могут и застревают на месте, блуждая среди множества разнообразных вещей, и потому они уже не философы, то спрашивается, кому из них следует руководить государством[283].

Мы хотели бы завершить наше описание позитивных черт философии и философов прекрасными словами Йегера: «Люди изменят свое отношение к воспитательному значению знаний, как только увидят, что такое истинное знание. А пока им еще недоступно стремление к знанию ради самого знания. Для них знание — это пустое ораторское искусство, которое требуется лишь для участия в спорах. Люди должны, наконец, понять, что те, кого они сейчас считают философами, таковыми не являются. Отрешенность философа от мира не вызовет у них прежнего презрения, как только они поймут, что для того, кто посвятил свою жизнь познанию высшего божественного порядка, невозможно принимать участие в дрязгах, спорах и раздорах, преисполненных недоброжелательства и зависти, как это делают те, кого свет несправедливо считает учеными, интеллектуалами. На самом же деле они лишь дерзкие самозванцы в заповеднике философии. Преисполнившись божественного покоя и порядка, философ стремится к познанию божественного и вечно существующего мира иного бытия»[284].

(3) В чем математика и философия отличаются, а в чем они похожи?

В чем же, спрашивает Н. И. Жуков, заключается существенное различие между философией и математикой, если они на первый взгляд исследуют одну и ту же действительность?[285]

В параграфе 2.5 мы уже затронули этот вопрос: мы говорили о «промежуточном положении математики» и о том, что математики,

---

283 Государство. 484b.

284 Йегер. Пайдейя. Т. 2. С. 257.

285 Жуков. Философские основания математики. С. 30.

по словам Хайдеггера, «простаивают» там, где «дело только и существенно состоит в том, чтобы занимать позицию в отношении какой-то вещи, так что она может встречаться с нами» (и это правильное «простаивание», суть которого лежит в самой вещи!). А *философы* идут дальше, поскольку их интересы лежат в другом направлении.

Бывают, конечно, случаи, когда сами математики, противореча словам Платона[286], «считают нужным отдавать отчет, что такое чет и нечет, фигуры, три вида углов и прочее в том же роде». Пауль Лоренцен в своей лекции по случаю вступления в должность профессора в университете Киль выразил просьбу, чтобы «отдельные науки сами удовлетворяли свое любопытство в принципиальных для них своеобразных вещах. Если, например, математики хотят знать, что это такое — так называемые натуральные числа, насколько они "натуральны", являются ли их обычные аксиомы совершенно определенными, — то откуда должен знать это философ, если этого не знают даже математики, которые занимаются числами постоянно?»[287]. Но кажется, что ответы математиков зачастую не слишком удовлетворительны. Так, в 1547 г. математик Н. Тарталья ответил на вопрос своего оппонента Феррари о том, является ли единство числом или нет, таким образом: математик не нуждается в ответе на этот вопрос, но он необходим, если речь идет об *основании* наук[288]. Его объяснение

---

286 См.: Государство. 510с–е.

287 Lorenzen. Wie ist Philosophie der Mathematik möglich? S. 194.

288 «Меня спрашивают, представляет ли единица собой число, или нет. Для начала я укажу, что я, со своей стороны, полагаю, что задача определения этого предмета при обсуждении и демонстрации основ каждой науки принадлежит не математике, но метафизике, для того чтобы я смог отказаться от этого определения на основании того, что оно не имеет отношения к математике. Но при этом я уверен, что ни один из вас не в курсе таких деталей, и я не хочу потерпеть неудачу при выяснении этого шага для вас... Я сказал бы на этот счет, что указанная единица является числом в потенции, но не в действительности, и не только потенциальным числом, но также и фактором всех чисел и членом всех разновидностей чисел, обладающих некоторым совершенством. Единица — лидер и

вряд ли удовлетворит каждого, и современные математики, наверное, сказали бы, что ответ Тарталья — типичный «метафизический ответ». Позволю себе и одно личное воспоминание: в гимназии наш учитель математики хотел объяснить, что такое число, и использовал определение из учебника: «Число — это абстрактный признак мощности множества». И все[289]. Я ничего не понял, только почувствовал, что здесь кроются, кажется, какие-то «тайны». Впрочем, мое непонимание не имело значения — в дальнейшем это определение не играло никакой роли, а уроки математики проходили независимо от более глубокого понимания того, чем мы занимались. Философские вопросы не обсуждались и были не нужны.

первый принцип каждой из таких разновидностей». (Цит. по: Pritchard. Plato's Philosophy of Mathematics. P. 63.)

289 Кстати, такого ответа, даже если он более-менее понятен, не достаточно, потому что, как заметил А. Ю. Цофнас, вопрос «Что такое число?» не имеет смысла. Дело в том, что необходимо учитывать синтактический контекст, в котором находится число. «Когда мы говорим о числе двенадцать, что оно четное, то думаем о числе как о вещи. Если утверждается, что "двенадцать негритят пошли купаться в море", то здесь "двенадцать" выступает как свойство некоторого множества вещей (не одноместный, а многоместный предикат). А если утверждается, что $2^{12} = 4096$, то здесь "двенадцать" выступает как некоторое отношение между числами 2 и 4096. Это отношение превращает эти два числа в новую вещь — в пару чисел. К натурально-онтологическому вопросу о первичности либо языковых структур, либо неких структур "самих по себе" во внешнем мире структурная онтология может оставаться равнодушной. Таким образом, приходится иметь дело не с определением природы числа, а с синтаксическим характером различия числа как вещи, свойства и отношения» (Цофнас. Вопрос о природе числа не имеет значения. С. 105). Похожим образом С. М. Кускова подчеркнула, что «выбор языка влияет на осуществимость математического объекта. Число 109 как индивид, входящий в множество натуральных чисел, и 109 как число шагов применения операции «|» требуют разных уровней языков. В первом случае язык содержит операции сложения, умножения, степени, позволяющие символически осуществить 109, во втором случае — не содержит» (Кускова. Проблема единственности натурального ряда. С. 135–136).

Но как бы то ни было, *настоящий* философ не боится «метафизики» и согласится — во всяком случае, в этом вопросе — с молодым Марксом, который писал своему отцу, что узкий, ограниченный математический «догматизм» *ненаучен*, так как там «субъект только носится туда-сюда вокруг вещи, и размышляет, и рассуждает, но вещь сама не образуется как богато развивающая и живая... Треугольник можно сконструировать и доказать, что сама эта фигура остается голой идеей в пространстве, ни во что не развиваясь (его нужно приводить наряду с другими фигурами, тогда он может занимать разные положения, получать и выражать различные отношения и истины). Но в конкретном проявлении живого мира идей — право, государство, природа, вся философия — здесь надо услышать сам объект в своем развитии, нельзя вносить произвольные распределения. Разум самой вещи должен откатываться до своей противоположности, и находить свое единство в себе»[290].

---

[290] Письмо от 10 ноября 1837 г. Marx, Engels. Werke. Band 40. S. 5. В дальнейшем Маркс обнаружил, что в высшей математике действительно открывается «разум самой вещи»: там задают тон «диалектические» законы, которые освещают и философскую диалектику. Эту диалектику Энгельс описывал таким образом: «О полном непонимании природы диалектики свидетельствует уже тот факт, что г-н Дюринг считает ее каким-то инструментом простого доказывания, подобно тому как при ограниченном понимании дела можно было бы считать таким инструментом формальную логику или элементарную математику. Даже формальная логика представляет собой прежде всего метод для отыскания новых результатов, для перехода от известного к неизвестному; и то же самое, только в гораздо более высоком смысле, представляет собой диалектика, которая к тому же, прорывая узкий горизонт формальной логики, содержит в себе зародыш более широкого мировоззрения. То же соотношение имеет место в математике. Элементарная математика, математика постоянных величин, движется, по крайней мере в общем и целом, в пределах формальной логики; математика переменных величин, самый значительный отдел которой составляет исчисление бесконечно малых, есть по существу не что иное, как применение диалектики к математическим отношениям. Простое доказывание отступает здесь решительно на второй план в сравнении с многообразным применением этого метода к

Можно сказать, что математики и философы исследуют одну и ту же действительность, но их интересы и взгляды являются различными. К. фон Фриц описывает эту разницу так: «Математика как прототип науки, не опирающейся на опыт, исходит из общих понятий (находящихся в душе универсальных представлений) и берет их в виде объективной основы для достижения своих результатов, математических тезисов. При этом она пользуется нарисованными фигурами как вспомогательными средствами. Да, ее предмет — треугольник вообще, и она стремится предоставлять данные о нем, но она нацелена не на познание треугольника как εἶδος, а берет опустошенное понятие как абстракцию, чтобы получить тезисы... Диалектика, напротив, берет как исходный пункт также понятия — т. е. те εἴδη, о которых душа вспоминает в виде изображений, — но она воспринимает их не как объективную основу познания (ἀρχή), а использует их просто как трамплин (ἐπίβασις и ὁρμή) для достижения настоящей объективности ἀρχή, т. е. εἶδος. Этот объективный εἶδος, являясь основой бытия (ἀρχή) также для εἶδος — как общее представление в душе, — сам, однако, больше не основывается на другой ἀρχή, а также не берет его субъективно как основу (отсюда ἀνυπόθετος). Чтобы достичь этого ἀρχή, диалектика больше не нуждается в чувственных предметах как вспомогательных средствах, например в виде нарисованных геометрических фигур. Она полностью пребывает в пределах области εἴδη, в пределах общего, и пробирается, снова и снова разрушая сами связи понятий (как они выражаются в заключениях и определениях), к непосредственному познанию εἶδος, которое больше нельзя выразить словами (ср.: Седьмое письмо. 343c)»[291].

Сам Платон описывал особенность «ограниченного» математического взгляда таким образом:

> Тебе легче будет понять, если сперва я скажу вот что: я думаю, ты знаешь, что те, кто занимается геометрией, счетом

новым областям исследования» (Маркс, Энгельс. Сочинения. Т. 20. С. 138–139).

[291] Fritz. Platon, Theaetet und die antike Mathematik. S. 59–60.

> и тому подобным, предполагают в любом своем исследовании, будто им известно, что такое чет и нечет, фигуры, три вида углов и прочее в том же роде. Это они принимают за исходные положения и не считают нужным отдавать в них отчет ни себе, ни другим, словно это всякому и без того ясно. Исходя из этих положений, они разбирают уже все остальное и последовательно доводят до конца то, что было предметом их рассмотрения[292].

В другом месте Платон не говорит о математиках прямо, а использует пример из акустики, чтобы выразить ту же самую мысль: те, кто изучает звуки, «ценят уши выше ума»[293], «они ищут числа в воспринимаемых на слух созвучиях, но не поднимаются до рассмотрения общих вопросов и не выясняют, какие числа созвучны, а какие — нет и почему»[294]. А философы как раз-таки поднимаются до рассмотрения общих вопросов.

Наглядное и довольно любопытное описание различий во взглядах и целях математиков и философов дает Сенека: «Мудрец исследует и познает причины естественных явлений, геометр отыскивает и высчитывает их число и меру. Каков незыблемый порядок небесных тел, какова их сила и природа, — все это знает философ; а кто высчитывает их движенье и возврат, кто собирает наблюдения над тем, как они восходят и заходят, а порой являют вид стоящих на месте, хотя небесным телам стоять и нельзя, тот математик. Пусть мудрец знает, по какой причине в зеркале возникает отражение; геометр же может сказать, как далеко должен отстоять предмет от отражения и какое отражение дает та или другая форма зеркала. Что солнце огромно, докажет философ; какова его величина, укажет математик, который пользуется в работе неким опытом и навыком, но должен, чтобы работать, заимствовать некие основные положения. А если основы искусства — заемные, оно несамостоятельно.

---

292 Государство. 510c–d.

293 Там же. 531a.

294 Там же. 531c.

Философия ничего не ищет на стороне, свое здание она возводит от земли»[295].

В данном описании нет никакой оценки, в нем просто показаны различные намерения, или, как сказал Рассел, различные точки зрения: «Различие философии и математики — это в целом различие в точке зрения: математика конструктивна и дедуктивна, философия критична и в некоем безличном смысле спорна. Везде, где есть дедуктивное рассуждение, есть и математика, но принципы дедукции, распознавание неопределимых сущностей и различение таких объектов — это дело философии»[296].

Но почему математики отказываются от исследования этих «более глубоких» вопросов? Возможно, они считают, что это не их дело? А может быть, они думают, что ответов на эти вопросы не существует или они просто не нужны? Бурбаки высказывается за второй вариант: «Греческие математики, кажется, не верили в возможность объяснения "первоначальных понятий", которые служили им отправными точками, как-то: прямой линии, поверхности, отношения величин; если они и дают им "определения", это, очевидно, делается для очистки совести и без особых иллюзий об их значимости»[297]. Многие математики, вероятно, согласились бы с этим скептическим взглядом.

Почему же философы более оптимистичны в этих вопросах? Потому, что у них есть дополнительные возможности получения знаний, особенно *диалектика*. «Хотя Платон, разумеется, рассматривает математику как одну из форм знания, он полагает, что полное знание о реальном мире может быть достигнуто лишь философом или диалектиком, применяющим сократический метод аргументации... который превосходит практикующийся в математике метод выведения из основных принципов»[298].

---

295 Сенека. Нравственные письма к Луцилию. С. 225. См. также: Seneca. Naturwissenschaftliche Untersuchungen. S. 8.

296 Russell. The Principles of Mathematics. P. 130.

297 Бурбаки. Очерки по истории математики. С. 24.

298 Artmann, Mueller. Plato and Mathematics. P. 7.

Подобный «сократический метод», по мнению Аристотеля, носит это имя по праву, так как действительно ведет свое происхождение от бесед Сократа. Вскоре он получил быстрое развитие, оформился как сильный научный инструмент, поэтому Аристотель «делает отчетливое различие между этими истоками и более развитой "диалектической силой" (διαλεκτικὴ ἰσχύς), соответствующей более позднему периоду Платона или его собственному методу, которого еще тогда не было»[299].

Но в чем заключается развитый диалектический метод, который позволяет философу добиваться точных результатов даже в тех сферах, которые математики не хотят затрагивать? Платон в «Государстве» (532–534) подробно описывает этот метод:

> Значит, в этом отношении один лишь диалектический метод придерживается правильного пути: отбрасывая предположения, он подходит к первоначалу с целью его обосновать; он потихоньку высвобождает, словно из какой-то варварской грязи, зарывшийся туда взор нашей души и направляет его ввысь, пользуясь в качестве помощников и попутчиков теми искусствами, которые мы разобрали[300].

Хит более систематически объясняет этот диалектический метод следующим образом: «Платон различает два вида процессов: оба начинаются с гипотезы. Первый метод не может подняться выше этих гипотез, но, рассматривая их, как если бы они были первыми принципами, основывается на них и делает выводы с помощью диаграмм и изображений: таков метод геометрии и математики в целом. Другой метод рассматривает гипотезы как действительно только гипотезы и не более того, используя их в качестве ступеней для восхождения выше и выше, пока не будет достигнута основа всех вещей, основа, в которой нет ничего гипотетического. Когда она достигнута, можно постепенно, увязывая каждый свой шаг с предыдущим шагом, снова прийти к

---

[299] Jaeger. Paideia. T. 3. S. 383.

[300] Государство. 533c–d.

выводам, и это процесс, не нуждающийся ни в каком чувственном образе, но имеющий дело только с идеями и в них же завершающийся. Этим методом, который поднимается над гипотезами и кладет им конец, достигая таким образом первоначала, и является диалектический метод. За неимением его, геометрию и прочие науки, которые каким-то образом схватывают истину, можно сравнить с тем, кто видит истину во сне, но не может ухватить ее при пробуждении до тех пор, пока относится к своим гипотезам как к неподвижной истине, будучи не в состоянии дать какие-либо объяснения на их счет»[301].

Если мы разделим область всего интеллектуального знания на три части: 1) начала, основания; 2) «обычное» отвлеченное мышление; 3) самые предельные вопросы, — то математик занимается средней областью, а философ — остальными двумя. Особенно специфичной для философского мышления является область идей. В этой области, как сказал Герман Коген, именно платоновская идея блага «обуславливает специфическое различие между математикой и диалектикой. Если бы не она, то математическое исследование, будучи познанием неизменно существующего, само было бы исследованием идей»[302].

Тот факт, что математика занимается только средней областью и поэтому является более узкой сферой, определяет и следующее различие между математикой и философией: математику, как заметил Аристотель, изучать сравнительно легко: достаточно иметь способность к абстрактному мышлению, в то время как философ нуждается в *долголетнем жизненном опыте*[303]. Этот тезис под-

---

301 Heath. A History of Greek Mathematics. Vol. 1. P. 290.

302 Cohen. Platons Ideenlehre und die Mathematik. S. 27.

303 Аристотель. Никомахова этика. 1142a13–20: «Молодые люди становятся геометрами и математиками и мудрыми в подобных предметах, но, по всей видимости, не бывают рассудительными. Причина этому в том, что рассудительность проявляется в частных случаях, с которыми знакомятся на опыте, а молодой человек не бывает опытен, ибо опытность дается за долгий срок. Впрочем, можно рассмотреть и такой [вопрос]: почему, в самом деле, ребенок может стать математиком, но мудрым природоведом

тверждает Мордухай-Болтовской, когда пишет: «Существование совершенно юных математических гениев, вроде 12-летнего Клеро, представляющего свой мемуар академии, или 20-летнего Галуа, создающего один из величайших отделов алгебры, указывает, при каком узком кругозоре можно быть не только хорошим, но и гениальным математиком»[304].

Лохер-Эрнст заостряет вопрос о разнице между математическим и философским мышлением, сравнивая абсолютно закономерный характер математики с полностью индивидуальным характером морального действия. В первом случае взгляд направляется главным образом на объективное познание, а не на самого познающего; во втором случае, напротив, взгляд сначала устремляется на индивидуальное действие, а потом уже на тот умственный источник, из которого оно выносится, переходя из индивидуальности в мир смысла. Но что интересно: если мы обратим внимание на *источник* познания и на то *состояние*, в котором находится наша душа в процессе познания, то увидим и общую черту. В обоих случаях наша душа, можно сказать, поднимается в сферу чисто умственного и получает оттуда знания и импульсы. Каждому опытному математику известно, что математическое познание невозможно «купить», получить от кого-то или передать, оно может озарить душу, сделав возможным дальнейшее математическое развитие. Точно так же и каждому опытному философу известно, как в душе формируется идея (например, моральное убеждение) — она может сверкнуть (или не сверкнуть...) «откуда-то» и сделать возможным дальнейшие философские или моральные поступки[305]. То есть как математика, так и философия питаются из одного источника.

не может. Может быть, дело в том, что [предмет математики] существует отвлеченно, а начала [предметов философии-мудрости и физики] постигаются из опыта? И юноши не имеют веры [в начала философии и физики], но только говорят [с чужих слов], а в чем суть [начал в математике], им совершенно ясно?»

304 Мордухай-Болтовской. Философия — Психология — Математика. С. 107.

305 См.: Locher-Ernst. Mathematik als Vorschule zur Geist-Erkenntnis. S. 115.

Конечно, наша душа — это живое существо, а не какой-то робот, и она формирует свое отношение к тому, что в ней «засверкает». Поэтому недостаточно понимать математику и философию только как предметы. Есть и *люди*, занимающиеся этими предметами — и определяющие их форму и содержание. В этом отношении очень интересны *психологические* размышления, представляющие новый взгляд на различия между математическим и философским. У математика, скажет Мордухай-Болтовской, подсознательные процессы играют важную роль, делая его мышление быстрым и сводя к минимуму возможность ошибки, в то время как у философа мы находим преимущественно сознательные процессы, делающие его взгляды более глубокими и широкими. Итак: «Если философ широк, в то время как математик быстр, то вместе с тем философ *глубок*, в то время как математик *остроумен*»[306]. И этот психологический факт серьезно влияет, разумеется, на взгляды и интересы математиков и философов, их манеру мыслить, говорить и писать[307].

(4) Каковы корни неразрывной связи математики и философии?

По вопросам отношений между гуманитарными и точными науками написаны целые библиотеки. Есть авторы, которые отказывают в праве на жизнь одной из сторон, а также авторы, желающие полного слияния обеих партий, но в большинстве случаев подчеркивается самостоятельность их задач и компетенций, с одной стороны, и их связь на глубоком уровне, — с другой. Так, Франк писал о «полной внутренней независимости» науки и религии, а в то же время об «их *сродстве* и *взаимообщении*, благодаря чему становится и возможным и необходимым достижение внутренней согла-

---

306 Мордухай-Болтовской. Философия — Психология — Математика. С. 88.

307 Пауль Причард, например, пишет: «Разница между мышлением Платона и Аристотеля в этих вопросах [т. е. в философии математики] может быть определена как характеристика различных форм, которые принимает их ум: то, что Платон объясняет метафорически и образно, Аристотель объясняет логически» (Pritchard. Plato's Philosophy of Mathematics. P. 4).

сованности между ними, и тем подлинного единства и цельности общего жизнепонимания»[308]. Как же выглядит эта ситуация в приложении к нашей теме?

Как уже было сказано, математики обычно думают, что в пределах своей профессии они не нуждаются в философии; с другой стороны, многие философы сегодня вообще не занимаются математикой, не чувствуя при этом, что теряют что-либо. Однако есть множество свидетельств неизбежной связи между математикой и философией. Главным свидетелем здесь, очевидно, может служить сам Платон, чувствовавший внутреннее родство обеих областей, которое П. Гайденко описывает следующими словами: «Подобно тому как математик ставит вопрос, что такое единица, и дает довольно-таки сложное определение этого, казалось бы, простейшего понятия, — так и философ с глубокой древности задается проблемой: что такое бытие? Что значит — быть?»[309] Это родство не удивляет, учитывая тот факт, что «математика является частью духовной жизни, глубоко связанной не только с астрономией и механикой, но также с архитектурой и техникой, с философией и даже с религией»[310].

Волфрам Гейч утверждал, что в целом «великие достижения греческих математиков были, в конечном счете, результатом тесной связи между математикой и философией». Но и он, что немного удивительно для представителя марксистско-ленинской философии, добавил: «При этом следует отметить прежде всего платоновскую философию»[311].

Приведем еще две цитаты представителей марксистского направления мышления (несмотря на то, что оно сегодня, разумеется, вызывает у некоторых людей отрицательные ощущения), потому что они уделяли большое внимание математике и подчеркивали

---

308 Франк. Религия и Наука в современном сознании. С. 148.

309 Гайденко. История греческой философии в ее связи с наукой. Введение.

310 Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 12.

311 Heitsch. Mathematik und Weltanschauung. S. 3.

«единство философского и математического знания»[312]. Энгельс говорил так: когда математика начала заниматься переменными величинами, она вступила, сознательно или бессознательно, в диалектическую область, «и характерно, что именно диалектический философ, Декарт, внес в нее этот прогресс». Он формулирует даже такое сравнение: «Как математика переменных величин относится к математике постоянных величин, так вообще диалектическое мышление относится к метафизическому»[313]. Ленин также указывал на необходимость такой связи словами: «Естествознание прогрессирует так быстро, переживает период такой глубокой революционной ломки во всех областях, что без философских выводов естествознанию не обойтись ни в коем случае»[314].

М. С. Козлова проследила связь между математикой и философией в истории их развития и пришла к выводу, что «философские идеи тесно сплетались с математической мыслью у пифагорейцев и элеатов, у Платона, Декарта и др. Основательно исследовали природу математики с разных философских позиций

---

312 Протопопов. Философские проблемы развития математики. С. 6. Мы, конечно, не согласны с утверждением, что «только глубокое философское осмысление с марксистско-ленинских диалектико-материалистических позиций исторически важных областей развития математики может дать ключ к обобщению новейших открытий в математике» (Там же). Слово «только» делает эту позицию сектантской, но вклад, сделанный этим направлением, до сих пор интересен. И мы полностью согласны с убеждением, что «органическое слияние философии и математики в самом процессе преподавания может стать эффективным средством активного формирования целостной системы философских и математических взглядов у студентов, а значит, у будущих учителей, инженеров, научных работников» (Там же).

313 Энгельс. Анти-Дюринг. С. 125. Энгельс, конечно же, знает, что далеко не каждый математик видит эту связь, поэтому он продолжает: «Это нисколько не мешает, однако, тому, чтобы большинство математиков признавало диалектику только в области математики, а довольно многим среди них не мешает в дальнейшем оперировать всецело на старый ограниченный метафизический лад теми методами, которые были добыты диалектическим путем» (Там же).

314 Ленин. О значении воинствующего материализма. С. 31.

Кант и Д. С. Милль. К концу XIX — началу XX вв. по ряду причин нарастает философская "напряженность" внутри самой математики, и ее творцы волей-неволей втягиваются в самое серьезное философствование. Некоторым из математиков суждено было стать великими философами. В их числе Эдмунд Гуссерль и Бертран Рассел — создатели двух крупнейших направлений философской мысли XX в.: феноменологии и аналитической философии»[315].

По мнению Фреге, отношения между математикой и философией настолько фундаментальны, что можно без преувеличения сказать: «Философ, который не имеет ничего общего с геометрией, — это только полфилософа, а математик без единого элемента философии — только полматематика»[316]. А тот факт, что существует так много «полуфилософов» и «полуматематиков», обясняется тем, что своеобразная связь между математикой и философией не лежит на поверхности и «не становится сразу заметной»[317].

---

[315] Козлова. Проблемы оснований математики. С. VII. Схоже пишет и Г. Пациг: «...можно сказать, что математика состоит в тесной связи с философией, и это отношение отличается от возможных отношений других наук с философией не только в степени. Не случайно, что эпохи, в которых философия добивалась решительных успехов, совпадают с наивысшими моментами развития математики. Много значительных философов были в то же время математиками-новаторами — достаточно упомянуть Пифагора, школу Платона, Декарта, Паскаля и Лейбница» (Patzig. Vorwort zu Frege: Funktion-Begriff-Bedeutung. S. 10–11). Ср. также замечания Гарриса: «Нам трудно понять, как неразрывно были связаны друг с другом наука и философия в эллинском мире, вероятно, из-за того, что наша культура предрасположена помещать эти и другие дисциплины в индивидуальные и совершенно отдельные категории. Декларируя слияние этих дисциплин в древности, мы все еще не в состоянии проследить множество важных связей, и, следовательно, частично упускаем значение как мыслителей, так и ученых» (Harris. Plato: Mathematician or Mystic?).

[316] Фреге. Цит. по: Brown. Philosophy of Mathematics. P. XI.

[317] Locher-Ernst. Mathematik als Vorschule zur Geist-Erkenntnis. S. 171: «Математика, особенно современная, рассматривается как образец чего-то строго научного. Поэтому кажется, будто сведения о более высоких мирах и современная математика наиболее противоположны друг другу. Но более полное представление показывает, что здесь нет противопоставления, но скорее своеобразная связь, которая, однако, не сразу заметна».

Всегда были и будут мыслители, которые не ограничивают себя какой-то одной сферой мышления, но плодотворно трудятся в нескольких сферах. Блестящий пример такого мыслителя — сам Платон. Вспомним Рассела, говорившего не только о том значении, которое Платон придавал арифметике и геометрии, но и об огромном влиянии, которое они имели на его философию[318].

В главе 5 мы будем говорить о влиянии философии — особенно платоновской — на развитие и содержание математики. Сейчас же приведем примеры обратного влияния, влияния математики на формирование философии.

Общую оценку дает философ и логик Шольц: «Платоновский идеализм твердо связан с платоновской оценкой математики»[319]. С ним соглашается Гайденко: «Не так уж много можно назвать философов, чье *мышление* столь же сильно определялось математикой, как платоновское»[320]. Особенную роль в мышлении Платона играла геометрия, являвшаяся ключевой математической дисциплиной. Предметы геометрии освобождены от мира чувственного опыта, у них есть качества, для которых не имеется образца в мире ощущений; линии, например, не имеют ширины, а точки — распространения. Кроме того, предметы геометрии не подлежат никаким изменениям, они не возникают и не исчезают. «Платон радикализирует эту программу идеализации и разрабатывает таким образом свое учение об идеях, свою философию, в высшей степени вдохновленную математикой»[321].

---

318 Рассел. История западной философии. С. 180.

319 Scholz. Mathesis universalis. S. 394.

320 Гайденко. Обоснование научного знания в философии Платона. С. 98. Вспомним также слова Прокл: «За ними был Платон, стараниями которого геометрия — как и остальные науки — получила величайшее развитие: известно, сколь часто он использует в своих сочинениях математические рассуждения и повсюду пробуждает в преданных философии восторженное отношение к математическим наукам» (Прокл Диадох. Комментарий к первой книге «Начал» Евклида. Введение. Ч. II. Гл. 4 [8]).

321 Froese. Pythagoras & Co. — Griechische Mathematik vor Euklid. S. 48.

Миттельштрас более детально разъясняет, как математические взгляды и методы, которые Платон так высоко ценил, действовали на его теорию идей и формировали ее. Дело в том, что первоначальный смысл теории идей заключается не в создании некоего «отдельного мира», а в «познании теоретических отношений (связей)»[322]. В «Федоне»[323], например, Платон подчеркивает теоретический характер выражений «равно» и «равенство» — они образованы не из реального ощущения предметов, но могут быть правильно восприняты только как «идеи»: «Таким образом в платоновском анализе теоретических отношений под руководством геометрии стабилизируется та концепция, которую мы обычно обозначаем как теорию идей Платона»[324].

Влияние античной математики на философию того времени не ограничивается образованием теории идей — вместе с Йегером можно говорить и о «необычайном импульсе», который научные, особенно математические, достижения придали философскому мышлению вообще. «Философия увидела здесь [в математике] идеал знания, обладающего такой точностью и целостностью доказательств и логических построений, о которой мир во времена досократических натурфилософов не мог и мечтать. Внимание, которое привлекали в тогдашних математических кругах именно методические вопросы, делало эту модель бесценной для новой науки, диалектики, которую Платон разрабатывал на основе сократических рассуждений о добродетели. Философия Платона —

---

[322] Mittelstraß. Die geometrischen Wurzeln der platonischen Ideenlehre. S. 407.

[323] Федон 75b: «Прежде чем начать видеть, слышать и вообще чувствовать, мы должны были каким-то образом узнать о равном самом по себе — что это такое, раз нам предстояло соотносить с ним равенства, постигаемые чувствами: ведь мы понимаем, что все они желают быть такими же, как оно, но уступают ему».

[324] Mittelstraß. Die geometrischen Wurzeln der platonischen Ideenlehre. S. 410. Правда, позже у Платона образуется и другая концепция теории идей: мир идей как отдельный, «дополнительный» мир, предметы которого несовершенно отражаются в предметах нашего мира: «Теория идей обособляется от первоначально лежащих в ее основе намерений» (Ibid. S. 414).

как и любая большая философия — немыслима без плодотворного влияния новых вопросов и решений, которые дает современная наука»[325].

Можно привести и еще один пример, более современный, в котором мы видим зарождение новой волны плодотворного влияния математики на философию. В 1926 г. швейцарский математик Пауль Финслер, создатель теории финслеровских пространств и особой формы теории множеств[326], показал, что Гильбертова теория математических доказательств не может гарантировать непротиворечивость рассмотренной системы и что возможности человеческого разума превышают возможности формальной математики. Для этого он приводил предложения, «которые формально не являются разрешимыми, и поэтому формально непротиворечивы, но в которых мы все же можем — на другом пути — обнаружить противоречие»[327]. Схожим образом, но более подробно[328] в 1931 г. Курт Гедель доказал, «что в обеих указанных системах [т. е. в системе *Principia Mathematica* Рассела–Уайтхеда и в системе Цермело–Френкеля] есть даже относительно простые задачи, относящиеся к теории обычных целых чисел, которые нельзя решить, исходя из аксиом»[329]. Эти результаты Финслера и Геделя имеют, естественно, огромное значение для философии; достаточно сказать, что они демонстрируют, что возможности человеческого разума *принципиально превышают* возможности компьютера; «благодаря упомянутым результатам мы теперь знаем не только то, почему программа Гильберта в итоге должна была потерпеть неудачу, но также и то, чего мы не можем ожидать от ЭВМ, так как

---

[325] Jaeger. Paideia. T. 3. S. 30–31.

[326] Его взгляды мы подробно описываем в Приложении А.

[327] Finsler. Formale Beweise und die Entscheidbarkeit. S. 677.

[328] «Более подробно» в формальном смысле; на самом деле доказательство Финслера охватывает более широкую сферу математического мышления; см. об этом: Gut. Inhaltliches Denken und formale Systeme.

[329] Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica... S. 173.

это невозможно по принципиальным причинам»[330]. Результаты Финслера и Геделя также дают возможность выразить такие предложения, как: «Истина всегда лежит *за пределами* правильного и неправильного»[331]. Наконец, они представляют собой отход от механистически-материалистического мировоззрения[332].

(5) Почему тесная связь между математикой и философией, характерная для платоновской Академии, сильно ослабла в течение столетий?

Ослабление этой связи очевидно. Современные философы, как мы уже сказали, мало занимаются математикой, а современные математики — философией. Уже Фреге констатировал: «Эти дисциплины [геометрия и философии] сами отдалились друг от друга в ущерб обеим»[333]. Бурбаки писал: «Прежде всего заметим, что математики, обладающие основательной философской культурой, встречаются так же редко, как и философы, имеющие обширные познания в математике»[334]. А Бернард Больцано говорил об этом так: «Незначительно еще число философов в наши дни, чье математическое знание простиралось бы дальше положения, что A равно A. Еще меньше число математиков, готовых признать, что их собственная наука может быть поднята на более высокую ступень совершенства при помощи философии»[335]. Физик и философ Д. С. Чернавский описал этот упадок следующим образом: «До

---

330 Fraenkel. Philosophie der Mathematik. S. 355.

331 Weiss. Gödels Unvollständigkeitssatz, die Vernunft, Metawahrheit(en) und Everetts Vielweltentheorie.

332 См. об этом: Heitler. Wahrheit und Richtigkeit in den exakten Wissenschaften. Хайтлер формулирует так: «Важность предложений Финслера и Геделя трудно переоценить. В каком-то смысле можно поставить их в один ряд с квантовой механикой. Они представляют собой явный отход от механистически-материалистических идей XIX столетия» (S. 9).

333 Фреге. Цит. по: Brown. Philosophy of Mathematics. P. XI.

334 Бурбаки. Очерки по истории математики. С. 21.

335 Цит. по: http://www.edu.cap.ru/Home/5562/aforizmi.doc

Гегеля известные философы, включая Канта, знали математику, более того, считать себя философом, не будучи знакомым с математикой, было просто неприлично. После Гегеля в философии появилось много представителей описательных наук, не знакомых с математикой, а в последнее время можно стать философом, вообще не будучи специалистом ни в каких других науках»[336]. Что же до современных *платоников*, Бертран Рассел жаловался, что они, «за немногими исключениями, невежественны в области математики, несмотря на огромное значение, которое Платон придавал арифметике и геометрии, и несмотря на огромное влияние, которое они имели на его философию»[337].

Конечно, каждый образованный философ получил в школе какие-то математические знания и каждый образованный математик познакомился там с какими-то философскими взглядами. Но этого недостаточно для «построения мостов». Обычно такое образование остается на уровне слухов; оно весьма поверхностно, и очевидно, что Платон имел в виду совсем не его, когда настаивал на необходимости многолетнего математического и затем философского образования. Эрнст Мах затронул больной вопрос, когда писал, что «сегодня только немногие из философов принимают участие в естественно-научной *работе*, и только в виде исключения естествоиспытатель посвящает собственную *умственную работу* философским вопросам. Однако это чрезвычайно необходимо для достижения понимания, так как одно лишь чтение не может помочь здесь ни тому ни другому»[338].

---

[336] Чернавский. Синергетика и информация. М.: Едиториал УРСС, 2004. С. 230–231. Цит. по: Еровенко. Надо ли студентам-философам изучать идеологию и методологию математики? С. 241.

[337] Рассел. История западной философии. С. 180. Рассел добавляет: «Этот факт служит примером ущербности узкой специализации: кто-то может писать о Платоне только при условии, что он в молодости так много занимался греческим языком, что ему совсем не оставалось времени для вещей, которые Платон считал важными» (Там же).

[338] Mach. Erkenntnis und Irrtum. S. 4–5.

В принципе Мах прав, но надо иметь в виду, что, к сожалению, в наше время философам совсем не просто серьезно заниматься математикой. Одна из причин заключается в бурном развитии математики в течение последних ста лет; В. А. Еровенко говорит о «все возрастающей сложности математической аргументации», из-за которой в конце XX века разрыв понимания между математиками и философами только увеличился; в общем можно сказать, что «современная математика довольно сложная и трудная наука»[339] — даже для самих математиков, а тем более для философов. Другая причина состоит в том, что наши студенты, в отличие от студентов платоновской Академии, спокойно живущих там годами, загружены экзаменами, а зачастую даже зарабатыванием на жизнь. Наши профессора, в свою очередь, заняты вечной «бумажной войной», страдая от современного университетского закона («Опубликовать или погибнуть»), т. е. им приходится постоянно доказывать, что они умны и активны, а их деятельность актуальна. Из-за этого у многих профессоров, ассистентов и студентов нет свободного времени для занятий, не связанных официально и напрямую с главным предметом их изысканий[340].

Можно выделить и несколько причин того, что влияние платоновской идеи о важности математики сильно ослабло в течение столетий, касающихся именно *философов*. Во-первых, во времена Платона философ должен был знать о, скажем, двадцати своих предшественниках, сегодня же в курсе истории философии изучается как минимум сотня философов — и у студентов почти не

---

[339] Еровенко. Надо ли студентам-философам изучать идеологию и методологию математики? С. 240.

[340] Похожая проблема встречается уже в общеобразовательной школе. Опираясь на личный опыт, Г. В. Кондратьева заметила, что «современный базовый курс школьной математики теоретически можно построить на любом (весьма высоком) уровне строгости, но реализовать его на практике в массовой школе вряд ли получится. Из-за недостатка времени, обширности материала и жестких рамок ЕГЭ востребована "рецептурная математика"» (Кондратьева. К вопросу о строгости курса школьной математики в контексте времени, которое отводится на изучение предмета. С. 254).

остается времени для других предметов. Во-вторых, современная математика является настолько обширным и зачастую сложным предметом, что студенты гуманитарных направлений попросту пугаются и не хотят даже связываться с ней. В-третьих, практически не существует специальных программ и методов в сфере математики, которые были бы интересны, полезны и доступны философам. В-четвертых, есть неофициальное, но сильное влияние философских школ, которые сосредотачиваются исключительно на человеке и, следовательно, оттесняют или даже исключают из рассмотрения такие сферы, как математика[341].

А почему же *математики* мало занимаются философией? Здесь также можно привести несколько причин. Во-первых, сегодняшняя математика, как мы уже сказали, обширный и зачастую сложный предмет вряд ли оставляющий время для серьезных занятий философскими проблемами. Во-вторых, философские взгляды кажутся математикам слишком разнообразными и даже противоречивыми — здесь, полагают они, существуют только «мнения», но не «истина». В-третьих, лекции по философии обычно содержат *историю* философии, а не «живые философские размышления», которые могли бы заинтересовать математиков. И в-четвертых, во многих университетах мы можем увидеть ничем не обоснованное, но господствующее мнение, что настоящему математику не подобает заниматься «подозрительными» сферами, такими как философия или теология. Герберт Гросс, профессор математики в университете Цюриха, сказал мне однажды так: «Мои коллеги смотрят на меня косо из-за того, что я участвую в философских кружках, и мне приходится публиковать в два раза больше работ, чтобы постоянно

---

[341] Это отсутствие заинтересованности со стороны основных современных философов, безусловно, относится к математике; что касается логики, ситуация выглядит несколько лучше, причем определяющим фактором и здесь является господствующая философская школа. Когда логика Ганса Гермеса спросили, посещали ли также студенты-философы его лекции, он ответил: в университете Мюнстера — да, но не в университете Фрайбурга, где философия находится под сильным влиянием Хайдеггера (Hermes. Hundert Jahre formale Logik. S. 45).

доказывать, что, невзирая на мою готовность обсуждать философские вопросы, я все-таки являюсь хорошим математиком». Действительно, «обычные» математики согласились бы с высказыванием своего коллеги Ю. И. Манина: «Для нас существуют только попытки. Остальное — не наше дело»[342]. И наконец, можно привести одну чисто психологическую причину: «Математики стараются не позволять основным философским вопросам нарушать их душевный покой...»[343]

Но существует еще одна проблема. Каждый человек обладает своим характером, способностями и склонностями; его образование и воспитание, полученные в семье и школе, также имеют свою специфику. Один — музыкант, другой — повар, третий — философ, четвертый — математик, и очень редко один человек обладает хорошими способностями в двух или трех областях. Поэтому мы можем предположить, что тесная связь между математикой и философией существовала всегда и исключительно лишь в узком кругу мыслителей, обладающих «двойными» способностями и склонностями и являющимися умами философскими и математическими одновременно. Возможно, даже в платоновской Академии редко встречались студенты и преподаватели, способные одинаково плодотворно охватить обе области, а остальные участники испытывали затруднения либо в философии, либо в математике?[344] Наверное, существует естественная граница между обеими сферами, которую большинство людей просто не могут преодолеть. И это значит, что нельзя требовать от каждого философа, даже платоника, занятий математикой, а от каждого математика — чтобы он занимался

---

342 Manin. What then? The Modernist Transformation of Mathematics. P. 243.

343 Еровенко. Надо ли студентам-философам изучать идеологию и методологию математики? С. 242.

344 Например, по всей видимости, не очень увлекался математикой Аристотель, и это могло стать причиной, по которой схолархом академии стал не он, — вероятно, Платон больше ценил «интерес Спевсиппа к математическим наукам, которые были основным предметом обучения в Академии и к которым Аристотель не испытывал особого интереса» (Мочалова. Указ. соч. С. 256).

философскими вопросами. О существовании естественной границы между математикой и философией и о невозможности понимания другой, чужой сферы пишет Мордухай-Болтовской: «Философский и математический умы обладают психологическими элементами, находящимися друг с другом в антагонизме. Философу, мысль которого работает всецело в лучах сознания, математические открытия могут показаться рядом каких-то фокусов. Он согласится с доказательствами математика, но ему покажется естественным задать вопрос (как это делал Шопенгауэр), отчего при доказательстве теоремы проводят ту или другую линию, и он не удовлетворяется разъяснением, что такое действие потом приведет к желанной цели. Ведь мы, покуда ведем исследование, скажет он, еще не знаем этой цели. Что это за суфлер, который раньше времени нам все подсказывает?»[345] Из этого понятно, что «специфический характер математической способности делает математику доступной не всем: некоторый, и довольно большой, процент ее совершенно не понимает, у некоторых ее изучение почти сводится к одному заучиванию механических действий над символами. Чисто интеллектуальный ее характер, не говорящий ничего чувству, делает ее интересной только крайне ограниченному кругу учеников»[346]. Сходным образом можно сказать и о чувствах математиков относительно философских систем и высказываний…

Но подобные проблемы не определяют нашу судьбу с неизбежностью. Есть — и всегда были — кружки, лекции и мероприятия, объединяющие разные области, в том числе математику и философию. В университете Цюриха, например, много лет существовали «математико-философские беседы», в знаменитом техническом университете Цюриха (ETH) философ Фейерабенд успешно привлекал студентов к философским размышлениям, в националь-

---

[345] Мордухай-Болтовской. Философия — Психология — Математика. С. 105–106. На этот вопрос Платон ответил бы своей теорией припоминания!

[346] Там же. С. 106–107. Каждый опытный преподаватель математики, наверное, согласится с этими высказыванями, хотя все же есть методы, делающие математические уроки более интересными и доступными для большинства студентов. Но это уже отдельная тема.

ной металлургической академии Украины (г. Днепропетровск) философ И. Шаталович проводит лекции о значении платоновской философии в контексте современного естествознания[347], и т. д. Возможности всегда существуют.

(6) Можно ли сказать, что философия стоит «выше» математики?

Гегель говорил «о подчиненном характере» математики[348] по отношению к философии; для него последняя, несомненно, стоит выше. Гаусс, наоборот, ставил выше *математику*, называя ее «царицей наук»[349]. А Витгенштейн думал, что философия «не является одной из наук»[350] — для него этот вопрос просто бессмысленен.

---

347 См. доклад И. В. Шаталович на XXI всероссийской конференции «Универсум платоновской мысли» (СПб, 26–27 июня 2013 г.), в котором она рассматривает идеи естествознания сквозь призму платоновского понимания эстетических категорий — красоты, гармонии, симметрии, простоты. В дискуссии она подтвердила, что вполне возможно привлечь студентов технических направлений к философским вопросам, если с умом выбирать темы и формы изложения. Тезисы данного доклада доступны по ссылке: http://www.plato.spbu.ru/CONFERENCES/2013/thes26.htm.

348 «Чистая математика также имеет свой метод, который подходит для ее абстрактных предметов и для количественного определения, единственно в котором она их рассматривает. Главное об этом методе и вообще о подчиненном характере той научности, которая возможна в математике, я высказал в предисловии к "Феноменологии духа"... Спиноза, Вольф и другие впали в соблазн применить этот метод также и к философии...» (Гегель. Наука логики. С. 107). См. также: «Философия, поскольку она должна быть наукой, не может... для этой цели заимствовать свой метод у такой подчиненной науки, как математика ...» (Там же. С. 78).

349 «Гаусс считал математику, — употребляя его собственные слова, — королевой наук, и арифметику — королевой математики. Она часто снисходит до оказания услуг астрономии и другим естественным наукам, но все же, при любых условиях ей подобает первый ранг» (Waltershausen. Gauss zum Gedächtnis. S. 79). На что Яглом саркастически заметил: «Теперь-то мы понимаем, что подобная точка зрения не возвеличивает математику, ибо сегодня, в отличие от эпохи Гаусса, мы убеждены в полной бесполезности всех на свете цариц» (Яглом. Математика и реальный мир. С. 56).

350 Витгенштейн. Логико-философский трактат. № 4.111. С. 24.

Что касается мнения Платона по этому поводу, то, согласно К. фон Фрицу, он, несмотря на некоторые высказывания, не ставил философию выше математики, но лишь хотел выделить обеим областям свою специфическую область действия. «Платон совершенно не был намерен выдвигать математикам требования, выполнение которых было невозможно для современной ему математики. Скорее он выделяет им совсем другую, чем у философов, область познания, границы которой для них, как для математиков — не как для людей, — непреодолимы. Поэтому он не требует, чтобы они как математики занимались тем, что он определенно оставляет диалектикам и философам»[351].

Проблема бесконечности, например, «имеет две стороны, одна обращена к математику, другая — к философу»[352]. Вопросы, методы и ответы различны здесь и там (при этом, конечно, философски настроенный математик захочет рассмотреть этот вопрос также с точки зрения философа, а математически настроенный философ интересуется проблемами бесконечности в самой математике). Но, как нам кажется, Платон не довольствовался выделением различных областей познания, но действительно привносил свою оценку, ставя одну область «выше», а другую «ниже»:

> Не кажется ли тебе, что диалектика будет у нас подобной карнизу, венчающему все знания, и было бы неправильно ставить какое-либо иное знание выше нее: ведь она вершина их всех[353].

Здесь философия действительно стоит на более высокой ступени, чем математика, и, следовательно, выше всех остальных областей человеческого познания. Но *почему* философия является «вершиной»? Если, по собственному определению Платона, «философы — это люди, способные постичь то, что вечно тождественно самому себе»[354], то разве нельзя сказать того же хотя бы про математиков,

---

[351] Fritz. Platon, Theaetet und die antike Mathematik. S. 52.

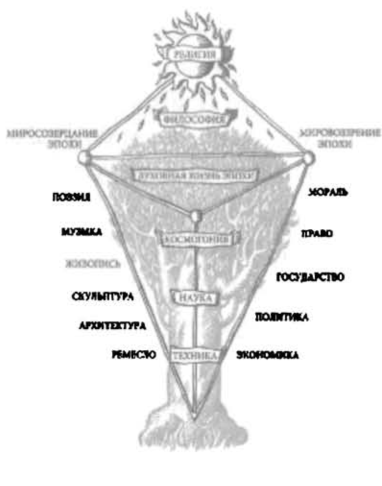
[352] Мордухай-Болтовской. Философия — Психология — Математика. С. 69.

[353] Государство. 534е.

[354] Там же. 484b.

они ведь выполняют это условие? А если мы примем рассуждения Мордухай-Болтовского о том, что, «в то время как математик доказывает, философ только убеждает. Как тот и другой начинают с гипотезы, но второй большей частью и кончает гипотезой»[355], — то возникнет желание сказать, что математики стоят «выше» философов…

Следует поставить вопрос более принципиально: почему одна область человеческой деятельности должна оцениваться «выше» другой, например математика выше ремесла или философия выше математики? Откуда берется представление о пирамидальном здании, характерное для Средневековья, или представление о некоем «дереве» (в современной литературе)? Ведь оба они автоматически подразумевают какое-то разделение на то, что «выше» и то, что «ниже»[356].

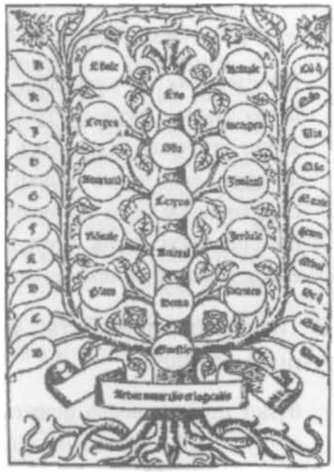


---

355 Мордухай-Болтовской. Философия — Психология — Математика. С. 85.

356 Слева: Подъем первоклассника на корону наук. Гравюра на дереве к средневековому отраслевому канону в книге «Margarita Philosophica» картезианца Грегора Райша (ум. 1525), напечатана Йоханнесом Шоттом в Страсбурге, 1503. Stiftsbibliothek St. Gallen, Inkunabel Nr. 972, Frontispizblatt. Справа: иллюстрация с обложки книги: Бурлака Д. К. Метафизика культуры. СПб.: РХГА, 2009.

Почему бы не использовать более «демократичные» картины, демонстрирующие единство всех областей, такие как, например, у Раймунда Луллия?[357] Здесь некоторые яблоки висят выше других, но нижние фрукты совсем не менее полезны и вкусны:



Можно попытаться объяснить два первых, «аристократических» и оценивающих, изображения с психологической точки зрения: они созданы людьми, которым нравится думать, что они, обладая высшим образованием, особенно философским, находятся на «более высокой ступени», чем остальные люди... Такую позицию, которую можно назвать «духовно-аристократической», легко обнаружить уже у Платона, родившегося в семье, имевшей аристократическое происхождение[358]. Вот как он говорит о «толпе»:

---

357 Слева: Раймонд Луллий, Arbor Scientiae, ок. 1295 г., гравюра на дереве, 1505 г. Справа: Раймонд Луллий, диаграмма из «Древа наук», изданного в 1515 г.

358 «Аристократическое отношение Платона к другим социальным классам и неблагородным занятиям... является важным аспектом при любой оценке убеждений и деятельности Платона и его соратников» (Fowler. The Mathematics of Plato's Academy. P. 27).

> Возможно ли, чтобы толпа допускала и признавала существование красоты самой по себе, а не многих красивых вещей или самой сущности каждой вещи, а не множества отдельных вещей? — Это совсем невозможно. — Следовательно, толпе не присуще быть философом[359].

А так — о ремеслах и ручном труде:

> Почему, как ты думаешь, ставятся человеку в упрек занятия ремеслами и ручным трудом? Укажем ли мы какую-нибудь иную причину, или здесь дело в том, что, когда у человека лучшая его часть ослаблена, так что ему не под силу справиться с теми тварями, которые находятся у него внутри, он способен лишь угождать им? Как их ублажать — вот единственное, в чем он знает толк[360].

В противоположность простым рабочим, скажет Платон, «разумный человек»

> будет прежде всего ценить те познания, которые делают его душу такой, а прочими пренебрежет[361].

Платон высоко ценит философию из-за того, что она находится «больше в чести», а людей, занимающиеся другими областями

---

[359] Государство. 494a.

[360] Там же. 590c.

[361] Там же. 591c. К сожалению, такой человек часто забывал, что он мог приобрести образование и «высший статус» лишь потому, что на него работали другие. У простого рабочего или даже раба вовсе не было возможности вести такую жизнь, ему нужно было тратить все свое время и энергию, чтобы зарабатывать на свою скромную жизнь — и к тому же на менее скромную жизнь аристократа. Аристотель был полностью прав, констатировав: «Поэтому, когда все такие искусства были созданы, тогда были приобретены знания не для удовольствия и не для удовлетворения необходимых потребностей, и прежде всего в тех местностях, где люди имели досуг. Поэтому математические искусства были созданы прежде всего в Египте, ибо там было предоставлено жрецам время для досуга» (Метафизика. 981b22–24).

человеческой деятельности, он считает «несовершенными по своей природе», не способными «общаться с философией»:

> Хотя философия находится в таком положении, однако сравнительно с любым другим мастерством она все же гораздо больше в чести, что и привлекает к ней многих людей, несовершенных по своей природе: тело у них покалечено ремеслом и производством, да и души их сломлены и изнурены грубым трудом; ведь это неизбежно. — Да, совсем неизбежно. — А посмотреть, так чем они отличаются от разбогатевшего кузнеца, лысого и приземистого, который недавно вышел из тюрьмы, помылся в бане, приобрел себе новый плащ и нарядился — ну прямо жених? Да он и собирается жениться на дочери своего господина, воспользовавшись его бедностью и беспомощностью. — Ничем почти не отличаются. — Что же может родиться от таких людей? Не будет ли их потомство незаконнорожденным и негодным?[362]
>
> Остается совсем малое число людей, Адимант, достойным образом общающихся с философией[363].

Я не считаю такое описание ремесленников правильным и справедливым, и мне всегда кажется подозрительным, если какой-то человек повышает свой статус через унижение других людей. Но, к счастью, у Платона находятся и другие аргументы, более существенные:

> [Философы] стремятся ко всему бытию в целом, не упуская из виду, насколько это от них зависит, ни одной его части, ни малой, ни большой, ни менее, ни более ценной, то есть поступают так, как мы это раньше видели на примере людей честолюбивых и влюбчивых[364].

---

362 Государство. 495d–e.

363 Там же. 496a. Похоже, и даже острее, судит Аристотель: по его мнению, «ремесленники подобны некоторым неодушевленным предметам» (Метафизика. 981b3).

364 Государство. 485b.

Здесь важно выражение «ко всему бытию в целом», и можно, наверное, сказать, что человек, размышляя о «целом», стоит на «более высокой» ступеньке, чем тот, кто исследует только часть этого целого. В этом смысле можно также сказать, что математик стоит «ниже» философа, так как он обычно действительно не занимается этим «целым». Так пишет и Мордухай-Болтовской: «Математический ум не видит того, что видит ум философский. Он не видит, да и не стремится увидеть весь предмет, он видит только часть его, ту часть, которая служит как бы крючком, на которой он прицепляет те логические цепи, при помощи которых желает связать все им мыслимое. Обычное заблуждение, присущее математикам, состоит в смешении всего предмета с этой небольшой частью, доступной их взору, в смешении математических определений, скользящих, так сказать, только по поверхности, с самой сущностью предмета. Разве понятие о вероятности совпадает с понятием о некоторой дроби, которая служит в математике определением вероятности? Понятие о кривизне шире, чем то определение, которая дает геометрия. Математики с трудом могут примириться с тем, чтобы даже в геометрических аксиомах находилось что-либо, не поддающееся математической формулировке, что-либо кроме крючков, на которые можно было бы привесить длинную цепь доказательств. Знаменитый математик Пуанкаре доходит до того, что совершенно забывает созерцательный характер геометрических аксиом и считает их за скрытые определения... ergo, между геометриями четырех и трех измерений нет существенной разницы!»[365] Это именно то, что имел в виду Платон, говоря об ограниченных взглядах геометров. Но все же остается вопрос: откуда берется представление, что статус изобретателя кирпичей, без которых не будет здания, ниже статуса того, кто ставит крышу? Почему не сказать просто, что существуют разные функции, методы, взгляды, цели?

---

365 Мордухай-Болтовской. Философия — Психология — Математика. С. 106.

Действительно, даже если мы построим пирамиду, где философия будет стоять выше не только ремесла, но и всех других наук, то все же занятия философией не обязательно должны задействовать некие «духовно-аристократические» черты человека. У Д. К. Бурлаки, например, мы читаем, что философия — это «особый тип знания, отличный от житейского и естественно-научного (физики), а также от мифологичного, откровенного и мистического»[366] — здесь «особый тип» не обязательно означает «высший тип». Можно даже говорить о «вспомогательной роли» философии, которую она должна выполнять в сфере реальной жизни: «Философия в культуре представляет собой такое формообразование духа, в котором он жертвует блаженством своей всеобщности, переходя в суету особенного и наделяя его неведомым до тех пор содержанием. Всеобщее, которое является достоянием философствующего сознания, дарится им особенным сферам мысли и деятельности, поскольку таковые сами по себе не в силах преодолеть своей особенности. Философия служит и науке, и политике, и искусству, ибо такова природа духа»[367].

Перу Бурлаки принадлежит и следующее наглядное сравнение: искомая философией истина — это как библейская Земля обетованная для иудеев, и сами философы подобны этим иудеям, ищущим Землю, в которую они не могут войти. А представители позитивных наук «подобны язычникам, остающимся в своей стране, возделывающим свою почву и собирающим урожай по трудам своим»[368]. Где же в этой картине место для математика? Можно предположить, что математика для философов — это то же самое,

---

366 Бурлака. Мышление и Откровение. С. 29. И Бурлака подчеркивает: «Настоящая философия не должна оставаться уделом "аристократов духа", "свободных джентльменов" и "вольных художников". В противном случае наши взрослые дети будут потреблять в институтах, академиях и университетах не самую свежую и доброкачественную интеллектуальную пищу» (Там же, с. 30).

367 Бурлака. Афтореферат. С. 14.

368 Бурлака. Мышление и Откровение. С. 39.

что божественные огонь и облако для иудеев, показывающие им путь через пустыню в обетованную Землю…[369]

Но вернемся к «аристократическим высказываниям» Платона, которые мы критиковали. Здесь надо заметить, что мы находим у него и другие черты, более скромные, самокритичные и «демократические». Например:

> Можешь ли ты мне вообще определить, что такое подражание? Сам-то я как-то не очень понимаю, в чем оно состоит. — Значит, и мне не сообразить. — Нисколько не удивительно: ведь часто, прежде чем разглядят зоркие, это удается сделать людям подслеповатым[370].

И наконец, Платон снова и снова посылает философа обратно в реальный мир, чтобы тот принес там пользу и вступил в контакт с повседневной жизнью. Это значит, что Платон не хочет, чтобы его философ жил как король в башне из слоновой кости, хотя и считает его в каком-то смысле «выше» других:

> Что же? А разве естественно и неизбежно не вытекает из сказанного раньше следующее: для управления государством не годятся как люди непросвещенные и не сведущие в Истине, так и те, кому всю жизнь предоставлено заниматься

---

[369] Библия. Исход. 40: 36–38; Второзаконие. 1:33. Сам Бурлака не придерживается такой оценки математики. По его мнению, она не отправляется вместе с философией вперед, а занимается лишь «языческими» делами: «Форма наук о природе иная, нежели в науках о духе. Обе группы наук отличаются от наук о структурах — математики, логики, кибернетики. Последние в своем внимании к форме кажутся близкими философии. Но эта близость именно кажущаяся, поскольку сама форма пространства и времени рассматривается в этих науках как материя, наподобие участка земли, смежного с другим участком. В своих поисках единой истины философия возвышается над науками, как иудаизм над язычеством» (Там же. С. 41). Этот взгляд на математику реалистичен в том смысле, что математики обычно не очень или совсем не интересуются Истиной с большой буквы, но Платон как раз хотел направить их — хотя бы некоторых — на поиски Земли обетованной вместе с философами, чтобы находить и расчищать дорогу для последних.

[370] Государство. 595c–596a.

самоусовершенствованием, — первые потому, что в их жизни нет единой цели, стремясь к которой они должны были бы действовать, что бы они ни совершали в частной или общественной жизни, а вторые — потому, что по доброй воле они не станут действовать, полагая, что уже при жизни переселились на Острова блаженных. — Это верно. — Раз мы — основатели государства, нашим делом будет заставлять лучшие натуры учиться тому познанию, которое мы раньше назвали самым высоким, то есть умению видеть благо и совершать к нему восхождение; но когда, высоко поднявшись, они в достаточной мере его узрят, мы не позволим им того, что в наше время им разрешается. — Что ты имеешь в виду? — Мы не позволим им оставаться там, на вершине, из нежелания спуститься снова к тем узникам, и, худо ли бедно ли, они должны будут разделить с ними труды их и почести[371].

---

[371] Государство. 519b–d. Ср. также с 539d–540b: «В сравнении с тем, кто развивает свое тело путем гимнастических упражнений, будет ли достаточен вдвое больший срок для овладения искусством рассуждать, если постоянно и напряженно заниматься лишь этим? — Ты имеешь в виду шесть лет или четыре года? — Это неважно. Пусть даже пять. После этого они будут у тебя вынуждены вновь спуститься в ту пещеру: их надо будет заставить занять государственные должности — как военные, так и другие, подобающие молодым людям: пусть они никому не уступят и в опытности. Вдобавок надо на всем этом их проверить — устоят ли они перед разнообразными влияниями или же кое в чем поддадутся. — Сколько времени ты на это отводишь? — Пятнадцать лет. А когда им будет пятьдесят, то тех из них, кто уцелел и всячески отличился — как на деле, так и в познаниях — пора будет привести к окончательной цели: заставить их устремить ввысь свой духовный взор и взглянуть на то самое, что всему дает свет, а увидев благо само по себе, взять его за образец и упорядочить и государство, и частных лиц, а также самих себя — каждого в свой черед — на весь остаток своей жизни. Большую часть времени они станут проводить в философствовании, а когда наступит черед, будут трудиться над гражданским устройством, занимать государственные должности — не потому, что это нечто прекрасное, а потому, что так необходимо ради государства. Таким образом, они постоянно будут воспитывать людей, подобных им самим, и ставить их стражами государства взамен себя...»

4.8. Разгружающие замечания

Взгляды Платона можно — и нужно — критиковать с различных точек зрения, что не означает умаления его заслуг[372]. Можно даже сказать, что «несовершенства» в учении Платона *стимулировали* других мыслителей к поиску других, возможно лучших, решений. Ф. Кессиди вспоминает высказывание Ленина о том, что умный идеализм ближе к умному материализму, чем глупый материализм, и делает такой вывод: «И потому "умный идеализм" Платона не только не служит помехой на пути глубокого изучения его богатого философского наследия, но, напротив, предполагает такое изучение»[373]. Надо также заметить, что хорош не тот преподаватель, который изображает из себя непогрешимого кумира, а тот, кто рассказывает своим ученикам о своих ошибках и заблуждениях, а не только об успехах. Кроме того, хороший преподаватель не проговаривает «всего», что можно сказать, но оставляет слушателям пространство для вопросов, собственных размышлений и исследований. Так поступал, к примеру, Рене Декарт, закончивший свою

---

[372] Правда, существуют критики, полностью отвергающие Платона и его философию и не видящие в ней никакой пользы. См., например, следующую цитату: «*Диалектика* Платона, которую так сильно восхваляют, на самом деле показывает безнадежное психическое состояние этого мыслителя: он блуждает среди противоречий, будучи не в состоянии разрешить их. Диалоги, которые считаются наиболее глубокомысленными, как раз относятся к этому типу. Возьмем, например, *Парменид* — приходит кто-то и утверждает: "Все — бытие. Тогда все — одно и то же, то есть бытие, и все различия, все существование на свете различных вещей, которые иногда изменяются — это просто видимость, ложь и обман". Придет, конечно же, и другой, и скажет: "И что есть эта видимость? Небытие? Тогда она вовсе не существует. Значит, она все же бытие". Что происходит здесь? А то, что сначала участники вместе бросают все в общий котел — бытие, — а потом удивляются тому, что теперь они ничего не могут разделить. Опять подмена знания. Тот, кто ничего не знает, обходится универсалиями, которые не содержат ничего определенного, но которые, однако, считаются объясняющими все».
(URL: http://www.gegenstandpunkt.com/mszarx/phil/platon.ht).

[373] Кессиди. Предисловие к книге: Платон и его эпоха. С. 8.

книгу о геометрии словами, что он хотел бы не рассказывать все, что знает об этом предмете, чтобы дать читателям возможность узнать что-то самостоятельно[374]. И даже если теория, которую предлагает преподаватель, несовершенна или ошибочна, в такой ситуации, по словам Ницше, есть и положительные стороны: «Поистине немалую привлекательность каждой данной теории составляет то, что она опровержима: именно этим влечет она к себе более тонкие умы»[375].

Во-первых, надо иметь в виду, что Платон был философом, а не профессиональным математиком; он не доказывал и не выводил математические положения, но пытался прояснить вопросы о правильном образе жизни, а в них попросту невозможно добиться полной логической обоснованности. Во-вторых, нужно учитывать, что Платон был одним из первых, кто вообще поставил вопрос о таком ходе мысли, следить за которым мог бы каждый, и поэтому нельзя ожидать от него слишком многого. В-третьих, нужно упомянуть, что платоновский Сократ был не просто философом, он видел себя пророком, моралистом и преобразователем мира.

Далее, Платон хорошо осознавал, что он может воспринять всю математику не в полном объеме, но лишь как образец и путеводитель; полной математической и логической обоснованности достичь невозможно:

> Что такое? Вы, верно, считаете, что сказанного недостаточно? Да, правда, остается еще немало сомнительных и слабых мест, если просмотреть все от начала до конца с нужным вниманием[376].

---

[374] Рене Декарт в конце «Геометрии» (1637): «Однако в мои цели не входит написать большую книгу… Действительно, имея два или три первых члена математической прогрессии, нетрудно найти все остальные. И я надеюсь, что наши потомки будут благодарны мне не только за то, что я здесь разъяснил, но и за то, что мною было добровольно опущено, с целью предоставить им удовольствие самим найти это».

[375] Ницше. По ту сторону добра и зла. 18.

[376] Федон. 84c.

Платоновскому Тимею, при попытке объяснить особенности элементов (земля, огонь, воздух и вода), пришлось отметить, что он не может предоставить доказательств, но лишь вероятные, правдоподобные соображения:

> Исходя из всего того, что было сказано выше об этих четырех родах, дело наиболее правдоподобно можно описать следующим образом...[377]

Часто приходится довольствоваться лишь предположениями. Для Платона важно, однако, в таких ситуациях отчетливо проговаривать, что речь не идет о достоверных и доказуемых результатах, и что поэтому все изложение не носит математического характера:

> Потому не удивляйся, Сократ, что мы, рассматривая во многих отношениях много вещей, таких как боги и рождение Вселенной, не достигнем в наших рассуждениях полной точности и непротиворечивости. Напротив, мы должны радоваться, если наше рассуждение окажется не менее правдоподобным, чем любое другое, и притом помнить, что и я, рассуждающий, и вы, мои судьи, всего лишь люди, а потому нам приходится довольствоваться в таких вопросах правдоподобным мифом, не требуя большего[378].

---

[377] Тимей. 56c.

[378] Там же. 29c. Существует, разумеется, постоянное искушение представлять собственное мнение неопровержимым, подобным доказанному математическому тезису. Любопытный пример представляет Энгельс: с одной стороны, он ясно знает, что, «если захочешь добиваться математической достоверности в вещах, не допускающих этого, нельзя не впасть в нелепость или варварство» (Маркс, Энгельс. Сочинения. Т. 1. С. 572), но, с другой стороны, мы находим у него такие выражения, как: «С той же уверенностью, с какой мы из известных математических аксиом можем вывести новое положение, с той же самой уверенностью можем мы из существующих экономических отношений и из принципов политической экономии сделать заключение о грядущей социальной революции» (Т. 2. С. 552). Или он говорит о рабочей партии, что «теперь можно математически точно вычислить уравнение ее возрастающей скорости и тем самым определить срок ее конечной победы» (Т. 36. С. 198).

Тем самым Платон констатирует нечто, с чем мы встречаемся достаточно часто, — отсутствие абсолютной надежности в мышлении, даже в точных науках, о котором мы уже говорили. Знаменитый математик Феликс Клейн сказал: «История нашей науки [математики] показывает, что "строгость" есть понятие относительное, которое развивается лишь постепенно в процессе общего прогресса науки. Интересно наблюдать, как в эпохи господства критического направления современники уверены каждый раз в достижении ими наивысшего предела в отношении строгости и как, вопреки этому, одно из последующих поколений в своих требованиях и достижениях в области критики основ оставляет далеко позади себя эту казавшуюся непревосходимой границу критики. Так были превзойдены Евклид, Гаусс и Вейерштрасс»[379]. Бурбаки также писал следующее: «Математики всегда были уверены, что они доказывают "истины" или "истинные высказывания"; убеждение это, очевидно, не может не носить субъективного или метафизического характера»[380].

Когда речь идет не о математике, а о жизненно важных вопросах, нам тем более приходится довольствоваться здравомыслящими предположениями, как утверждает сократовский собеседник Симмий:

> Мне думается, Сократ, — как, впрочем, может быть, и тебе самому, — что приобрести точное знание о подобных вещах в этой жизни либо невозможно, либо до крайности трудно, но в то же время было бы позорным малодушием не испытать и не проверить всеми способами существующие на этот счет взгляды и отступиться, пока возможности для исследования не исчерпаны до конца. Значит, нужно достигнуть одного из двух: узнать истину от других или отыскать ее самому либо же, если ни первое, ни второе невозможно, принять самое лучшее и самое надежное из человеческих учений и на нем, точно на плоту, попытаться переплыть через жизнь, если уже

---

[379] Клейн. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. I. С. 84.

[380] Бурбаки. Очерки по истории математики. С. 20.

> не удастся переправиться на более устойчивом и надежном судне[381].

Наконец, имеются такие области, в которых получить какое-либо знание вообще невозможно; здесь Платон высказывается за то, чтобы верить авторитетам:

> Повествовать о прочих божествах и выяснять их рождение — дело для нас непосильное. Здесь остается только довериться тем, кто говорил об этом прежде нас; раз говорившие сами были, по их словам, потомками богов, они должны были отлично знать своих прародителей. Детям богов отказать в доверии никак нельзя, даже если говорят они без правдоподобных и убедительных доказательств, ибо, если они выдают свой рассказ за семейное предание, приходится им верить, чтобы не ослушаться закона[382].

Итак, мы видим, что Платон полностью осознает, что имеются разные формы и степени познания: они варьируются от относительно надежных (при математической дедукции) до совершенно ненадежных — например, догматов веры, опирающихся исключительно на мифические предания. Но, как мы видели выше, границы имеются даже там, где возможно отчетливое рациональное мышление. В «Законах» Платон определенно говорит, что даже наши самые тщательные мыслительные усилия ни в коем случае не гарантируют достижения ожидаемой цели. Как только наши мыслительные конструкции накладываются на реальный мир, обнаруживается их ограниченность:

> На этом можно закончить вопрос о поселении. Но мы должны вообще иметь в виду еще вот что: всему указанному

---

381 Федон. 85c–d.

382 Тимей. 40d–e. Однако и «божественный авторитет» надо принимать критически. Может быть, он — лишь выдумка людей. Афинянин говорит об этом так: «Мы все порицаем критян за то, что они выдумали миф о Ганимеде. Так как они были убеждены, что их законы происходят от Зевса, они и сочинили о нем этот миф, чтобы вслед за богом срывать цветы и этого наслаждения» (Законы. 636d).

сейчас вряд ли когда-нибудь выпадет удобный случай для осуществления, так, чтобы все случилось по нашему слову[383].

Реальную жизнь, как и саму философию, нельзя уложить в формулы — особенно подчеркивает это Миттельштрасс: «Размышления Платона нигде не объединены в "систему" в строгом смысле слова. Разработка системы остается изобретением платонизма, — и, как нам кажется, такой интерес неискореним в философии вообще»[384]. Здесь и кроется причина иногда встречаемого нами «шутливого» употребления Платоном математических аналогий (например, при обсуждении двуногих и четвероногих; см. конец параграфа 3.3). Платон, как подчеркнул Брамбо[385], сам намекал на неуместность и даже смехотворность

---

383 Законы. 745е.

384 Mittelstraß. Die geometrischen Wurzeln der platonischen Ideenlehre. S. 418. Вспомним также, что даже в математике невозможно выразить все средствами формализованного мышления (см. изложение Финслера в Приложении А).

385 В конце своих исследований Брамбо пишет: «Хотя заключительная дискуссия о математических шутках может показаться на первый взгляд прихотливым отступлением от обсуждения математических образов, только она на самом деле является диалектически соответствующим заключением для такого исследования. Математическая шутка обычно снижает градус претенциозности при использовании математических метафор и образов, когда мы ожидаем от изображения больше, чем оно может дать. Математический юмор Платона корректирует различные виды неправильного толкования, вытекающие из слишком серьезного подхода к его математическим образам. В диалогах этот юмор появляется там, где нужна защита от чрезмерного энтузиазма в погоне за такими метафорами; и представление их в качестве серьезных выводрв из исследования математических образов становится одним из способов отображения ограниченности этих образов и обнаружения абсурдности перехода этих границ при интерпретировании. В каждом случае юмористический момент можно найти в практике сверхбуквальной трактовки метафор; это принимает различные формы: использование геометрических дифференций в биологии, где они неуместны, использование геометрической лексики в политике, к которой она не относится, постулирование причинной связи на основе арифметического подобия, которое совершенно не оправдывает такой постулат. Юмор этих отрывков теряется для современного читателя,

применения отрывочных методов точных наук в других сферах, где они совсем не уместны[386].

Это, разумеется, не исключает существования людей, которые всегда и везде, с такой силой, что для других людей они кажутся неприспособленными к жизни экземплярами, предаются чистому мышлению — мышлению, эталоном которого служит математика. Вспомним философа Фалеса, упавшего в колодец из-за того, что он «стремится знать, что на небе, того же, что рядом и под ногами, не замечает»[387]. Настоящий философ «постоянно обращается разумом к идее бытия»[388], несмотря на то что люди смотрят на него с изумлением, — такова уж его профессия.

Но когда Платон говорит «постоянно», он, конечно же, не имеет в виду «беспрерывно». Философ для него — не автомат и не мыслящий монстр; поэтому он должен, хотя бы иногда, позволять себе отдых от этих предельно требовательных вопросов:

который не видит современных аналогов мыслящему буквально пифагорейскому лектору по этике времен Платона, против которого и направлено остроумие. В XX веке оно было бы направлено на статистика-педанта» (Brumbaugh. Plato's Mathematical Imagination. P. 250–251).

386 «Философия как игра и как миф — такая идея была хорошо знакома и свойственна и Платону» (Frank. Die Philosophie von Jaspers. S. 117).

387 Теэтет. 174a. *Стоит обратить внимание и на 173d–e*: «Эти же с ранней юности не знают дороги ни на агору, ни в суд, ни в Совет, ни в любое другое общественное собрание, Законов и постановлений, устных и письменных, они в глаза не видали и слыхом не слыхали. Они не стремятся вступить в товарищества для получения должностей, сходки и пиры и ночные шествия с флейтистками даже и во сне им не могут присниться. Хорошего ли рода кто из граждан или дурного, у кого какие неприятности из-за родителей, от мужей или от жен — все это более скрыто от такого человека, чем сколько, по пословице, мер воды в море. Ему не известно даже, что он этого не знает. Ибо воздерживается он от этого вовсе не ради почета, но дело обстоит так, что одно лишь тело его пребывает и обитает в городе, разум же, пренебрегши всем этим как пустым и ничтожным, парит надо всем, как у Пиндара, меря просторы земли, спускаясь под землю и воспаряя выше небесных светил, всюду испытывая природу любой вещи в целом и не опускаясь до того, что находится близко».

388 Софист. 254a.

Было бы не слишком сложным делом перебрать таким образом все прочие примеры этого рода, продолжая следовать идее правдоподобного сказания. Тот, кто отдыха ради отложит на время беседу о непреходящих вещах ради этого безобидного удовольствия — рассматривать по законам правдоподобия происхождение [вещей], — обретет в этом скромную и разумную забаву на всю жизнь[389].

[389] Тимей. 59c-d.

Глава 5.
Влияние платоновского мышления

Вильбур Кнор высказал мнение, что самым сильным, если не сказать доминирующим, стимулом для развития логического метода, отличавшим греческую математику от математики Древнего Египта, Месопотамии, Индии и Китая, стал *общий культурный климат* Греции и, в частности, Афин. Он также считал очевидным влияние *математики на философию*, но *оспаривал* непосредственное воздействие философских взглядов на развитие математики[1]. Причард выражается еще бескомпромисснее: «Так называемая

---

1 «Я убежден, что математические исследования были почти полностью автономны, в то время как философские дебаты, развиваясь в пределах своей собственной традиции, зачастую получали поддержку и прояснение благодаря математическим трудам» (Knorr. Infinity and Continuity. P. 112). Кнор пишет об этом подробнее, например: «Настоящий обзор происхождения принципа бисекции и метода исчерпывания Евдокса ставит под сомнение привычное представление о них, представленное в истории математики. Вкратце, обычно утверждается, что первые геометры, предоставленные сами себе, настаивали бы на своих наивных эвристических методах, если бы критика со стороны философов, начиная с Зенона и вплоть до Платона и Аристотеля, не привела бы их к осознанию того, что многие из их понятий — например, бесконечного и предела — были логически непоследовательны и что их доказательства должны удовлетворять жестким критериям логической точности. Эта точка зрения — не просто чрезмерное упрощение, она серьезно искажает доступные нам свидетельства, предшествующие временам Эвклида. Математическая сторона парадоксов Зенона — по сути, принцип бисекции — не представляла никакой трудности ни для геометров, таких как Евдокс, ни даже для философов вроде Аристотеля. Корни метода исчерпывания Евдокса лежат не в затруднении математиков перед философскими головоломками, а в эволюции методики, как у Гиппократа. Это представление об автономном развитии в области геометрии, безусловно, более правдоподобно, чем необоснованное предположение о внешних воздействиях» (Ibid. P. 135).

философия (или философии) современного математического "платонизма" ничем не обязана Платону, кроме разве что фальшивой респектабельности, достигаемой путем приписывания его имени набору взглядов, которых он никогда не придерживался и которые вряд ли бы одобрил, если бы даже понял»[2].

Мы не можем полностью согласиться с этими суждениями. Причард прав в том, что современный математический платонизм, в смысле, данном ему Бернайсом, не включает в себя полную и подлинную философию Платона. Но Бернайс, хорошо знакомый с платоновским учением, не случайно выбрал это название. В какой-то степени Платона вполне можно назвать крестным отцом или опекуном классической математики, так же как Аристотеля — основоположником формалистического и конструктивистского направлений математики. А что касается последнего суждения Кнора, то мы можем согласиться с ним в том смысле, что математические методы и результаты не вытекают из философских взглядов и утверждений непосредственно. Однако философия — это тоже часть культурного климата, и многолетние дискуссии между философами и математиками, происходившие в Академии, вряд ли могли односторонне воздействовать только на философов.

В дальнейшем мы хотели бы показать, как и в какой степени взгляды и убеждения Платона действительно влияли на формирование математики и физики. Что касается философии, мы добавим несколько слов, касающихся влияния особого *математического оттенка* платоновского мышления на ее развитие.

В истории этого воздействия, как правильно подчеркнул Кнор, важная роль отведена не только отдельным мыслителям, таким как Платон, — а также их коллегам и последователям, — но и всему окружавшему их миру, включая особые формы науки и современный им образ мышления в целом. Характер развития мате-

---

2 Pritchard. Plato's Philosophy of Mathematics. P. 177. И Причард добавляет: «Оказалось, что платоновская теория идей, и, следовательно, платоновская философия математики были тупиком, основанным на недоразумении особого рода».

матики, например, становится — как подчеркивают преимущественно марксистские исследователи — более понятным, когда мы видим, как тогдашнее социально-политическое положение поощряло развитие *чисто теоретической*, «ненужной», «неприкладной» математики. А. Раик пишет об этом так: «Древняя Греция в период VII–IV веков до нашей эры представляла собой классическую рабовладельческую страну. Обилие островов, принадлежащих ей, многочисленные заливы и бухты морей, омывающих ее с трех сторон, — все это способствовало раннему развитию мореплавания, торговли, колонизации, что, в свою очередь, оказывало сильное влияние на развитие хозяйства. Росло богатство страны, развивались техника и наука. Развитию науки, искусства и культуры способствовала также бурно протекавшая общественная жизнь — расцвет афинской демократии в V веке. Однако демократия была для рабовладельцев, свободными были только рабовладельцы, и поэтому из науки изгонялось все то, что служило практике. Труд — удел раба. Свободный человек должен заниматься лишь такими вещами, которые возвышают его духовно, сближают с божеством, вещами, которые выше чувственного мира, т. е. философией и математикой. И это наложило определенный отпечаток на формирование и развитие математических понятий и математики в целом, на направление математической мысли»[3]. Кроме того, важную роль играло противостояние различных философско-мировоззренческих взглядов: «Борьба материализма и идеализма в древнегреческой философии не прошла мимо и древнегреческой математики. Надо думать, что математика и ее философия пережили бурные взрывы ожесточенной борьбы за основания математики, за его методологические основы. Борьба материализма и идеализма в области методологии математики проходила так же ожесточенно, как и в самой философии. В результате этой схватки древнегреческая математика очутилась в объятиях идеологии господствующего рабовладельческого общества»[4].

---

3 Раик. Очерки по истории математики в древности. С. 147.

4 Там же. С. 148.

Эти социально-исторические моменты отражены во многих диалогах Платона. Однако креативность Платона, сила его личности и оригинальность его взглядов безграничны. Платон — не только дитя своего времени, но и самостоятельный мыслитель, во многом это время определивший. Именно поэтому справедливо будет говорить в дальнейшем о воздействии Платона — или хотя бы о воздействии *платоновского мышления* — на различные отрасли науки[5]. Разумеется, мы сможем упомянуть лишь некоторые факты и имена.

а) Математика

Древнегреческая математика

Несмотря на свою марксистско-ленинскую точку зрения, Анна Еремеевна Раик полагает, что для древнегреческой математики «методологической основой служила философия Платона. Это оказало сильное влияние на характер и форму античной греческой математики, на весь ход ее развития, на ее судьбу»[6]. Но *в чем* же именно заключаются заслуги Платона в области математики? Попытаемся обозначить самые главные моменты.

Платон первым верно определил суть *математического познания*. Главная особенность этого познания состоит в том, что оно совершается независимо от внешнего восприятия мира. Да, многие вслед за Аристотелем считают, что, допустим, понятия

---

5 Было бы интересно и очень желательно исследовать воздействие платоновской философии в более широком плане. Приведем хотя бы один пример — влияние на постройку органов. Герхард Валькер-Майер сожалел, что нынешние строители органов невежественны, так как они не знакомы с основными законами пропорций, и рекомендовал заново ознакомиться с размышлениями Платона о гармонии. Идеальные числа знаменитой гаммы в «Тимее», говорит он, соответствуют музыкальным консонансам, образуя абсолютную гармонию. И эта гармония отражается, согласно Платону, в душе каждого человека — отсюда у человека ощущение порядка, меры, пропорции и гармонии (Walcker-Mayer. Die Wiederkehr der Proportion. I. Teil: Orgel und Heil — Auf der Suche nach Harmonia).

6 Раик. Очерки по истории математики в древности. С. 148.

прямой линии или круга образованы из реальных ощущений посредством процесса абстрагирования. Но это мнение «оказывается несостоятельным для каждого, кто достаточно отчетливо почувствовал, что сравнение двух восприятий может осуществляться только посредством присоединения третьего элемента более высокого вида, к которому можно отнести отдельные восприятия. Это математическая *идея*»[7].

Другая заслуга Платона заключается в том, что он дал философское обоснование основным геометрическим понятиям и представлениям. «Кажется, — пишет Бретшнейдер, — что до Платона никто серьезно не задумывался над логически строгим определением точки, линии, площади, прямой линии, уровня, угла и т. д. По всей вероятности, такие понятия просто выводились из чувственного восприятия, и никто не беспокоился об их строгой формулировке. Ранее геометры больше интересовались расширением науки, нежели ее философском обоснованием... Поэтому до Платона не известно никаких попыток проверить основные положения геометрии и обосновать их логически... Поэтому мы считаем главной заслугой платоновской школы то, что она усердно изучала именно этот вопрос»[8].

Далее: Платону принадлежит изобретение — или, по крайней мере, активное продвижение — аналитического метода в научных исследованиях, заключающегося в постановке и проверке гипотез. Артман пишет об этом так: «Все, что мы узнаем из Федона (100а–е), — это то, что мы предлагаем гипотезу, развиваем ее, отвергаем несовместимые с ней предположения и проверяем получившийся результат на согласованность. При наличии очевидно согласованной гипотезы дальнейшая проверка возможна только через ссылку на более мощную гипотезу, которая подлежит такому же развитию и проверке. Подобные процедуры остаются главными в математической методологии, и предложения Платона стали в наше

---

7 Locher-Ernst. Mathematik als Vorschule zur Geist-Erkenntnis. S. 115. (Курсив мой.)

8 Bretschneider. Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. S. 143–144.

время обычной методологией. Но нет никаких доказательств, что кто-либо выразил эти идеи до Платона, и в любом случае то значение, которое он им придавал, и та сила, с которой он их выразил, сделали их неотъемлемой частью обширной последующей рефлексии в математике в частности и в знании в целом»[9].

Эрнст Мах также подчеркивал как важность этого метода при решении задач, так и заслуги Платона в этой сфере: «Несомненно, удачный психологический инстинкт, свойственный гениальным натурам, привел Платона к открытию аналитического метода. Мы знаем только то, что случайно испытали, — с помощью чувств или в мыслях. В области, в которой у нас нет опыта, мы не можем решать задачи. Чтобы сократить неизвестное до минимума, не существует лучшего способа, чем представить искомое и данное уже *соединенными*, а потом пройти этот путь, теперь уже легче узнаваемый, от первого к последнему в противоположную сторону»[10]. Асмус подчеркивает, что этот метод — диалектика — не только сам по себе является подходящим, но также становится

---

9 Artmann. Plato and mathematics. P. 11. Ср. также оценку Гайденко: «Каким способом строит Платон каждый из рассмотренных кругов рассуждения? Как мы уже упоминали, он применяет здесь особый метод, а именно: принимает определенное допущение — гипотезу и прослеживает затем, какие утверждения следуют из нее. Этот метод получил впоследствии название гипотетико-дедуктивного, и значение его для развития науки нельзя переоценить. Его дальнейшей логической разработкой мы обязаны Аристотелю, а его применением к математике, вероятно, — современным Платону математикам — Архиту, Евдоксу и др. Во всяком случае, тот способ доказательства, которым пользуется Евклид в "Началах", построен по тому же образцу: делается определенное допущение на основе принятых аксиом и постулатов, а затем показывается, какие следствия должны вытекать из него. Правда... применения этого метода у Платона и Евклида осуществляются по-разному, но схема, которой оба пользуются, — одна и та же. Таким образом, Платон логически отработал тот метод доказательства, который в дальнейшем лег в основу античной математики и без которого невозможно было бы возникновение науки как строго доказательного, систематического знания. В этом — заслуга Платона и его школы перед наукой» (Гайденко. Обоснование научного знания... С. 116).

10 Mach. Erkenntnis und Irrtum. S. 261.

«важным этапом в развитии логики: в развитии учения о категориях, о суждении, об утверждении и об отрицании, о противоречии и об его видах, о родах и видах понятий, о методах определения, индукции и разделения понятий»[11].

Важный для теоретическо-научного развития геометрии момент упоминает Гайденко: «Насколько нам известно, Платон впервые в античной науке вводит понятие *геометрического пространства*; до него античные философы, за исключением разве атомистов, не отделяли *сознательно* пространства от его наполнения, но атомисты определяли пространство *физически — как пустоту*, отличая ее от атомов как "полного" пространства. И не только доплатоновская, но и послеплатоновская научно-философская мысль в лице Аристотеля и его учеников не признавала пространства в том виде, как его понимал Платон: пространство выступало у Аристотеля как "место", а это понятие не имело ничего общего с геометрическим пространством Платона. Поскольку понятие пространства, впервые формирующееся у Платона, имеет очень большое значение для эволюции науки и ее исходных принципов и поскольку оно, далее, тесно связано с платоновским обоснованием математики, мы рассмотрим его здесь подробнее...»[12]

Еще одним важным фактом является то, что до Платона проводилось сравнительно мало стереометрических исследований, были известны лишь некоторые теоремы о положении прямых и плоскостей в пространстве и свойства правильных тел и шара. По запросу и при поддержке Платона Менехм, член Академии, обнаружил конические сечения, и эта находка оказалась весьма плодотворной для дальнейшего развития геометрии.

Наконец, напомним требование Платона использовать в геометрии только линейку и циркуль, — конечно, не в смысле реальных инструментов, а как идеальные, чисто мысленные предметы. Это требование надолго определит форму геометрии: до XIX в. «Начала» Евклида использовались как введение в академическую

---

[11] Асмус. Платон. С. 112–113.

[12] Гайденко. Обоснование научного знания в философии Платона. С. 124–125.

математику, а в школьной геометрии построения с помощью циркуля и линейки до сих пор остаются единственным используемым методом.

Стоит также сравнить влияние Платона и Аристотеля на развитие математики. Отто Теплиц установил, что идеальные числа Платона — это гносеологическое воплощение математических отношений. Он пишет: «Если мой тезис — или хотя бы заложенная в нем тенденция — имеет значение, это очень много значит *для греческой математики*. Это свидетельствует, что Платон собирался привести ее… каким-то образом к сегодняшнему понятию числа, и далее свидетельствует, что Аристотель в своей борьбе с Платоном оттеснил греческую математику с этой дороги. Известно, как авторитет Аристотеля отвратил астрономию от гелиоцентрической системы, а также физику — от ее первых достижений, и как этот авторитет мешал развитию в течение почти двух тысячелетий, даже тогда, когда уже давно полностью исчезли очень серьезные причины, приведшие Аристотеля к его заключениям. В похожем смысле — и это выражает наш тезис — Аристотель своим авторитетом вмешался в развитие математики и в течение двух тысячелетий задерживал преобразования, которые собиралась осуществить Академия Платона»[13].

Современная математика

Действительно, именно философия Платона, а не Аристотеля подготовила почву, на которой смогла развернуться та классическая математика, которая — преимущественно или исключительно — изучается в наших школах и университетах. Пауль Бернайс назвал ее «математическим платонизмом»[14]. Она, как мы уже показали

---

13 Toeplitz. Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Platon // *Quellen und Studien* I 1. Berlin, 1929. S. 10–11. (Цит. по: Stenzel. Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles. S. 149–150).

14 «Без преувеличения можно сказать, что сегодня в математике правит платонизм» (Bernays. Sur le platonisme dans les mathématiques. P. 56). Бернайс, конечно же, не имеет в виду так называемый «примитивный

выше (см. параграф 2.2а), является господствующим направлением, по сравнению с которым альтернативные модели, такие как математический интуиционизм Брауэра, оперативная математика Лоренцена или нестандартный анализ Робинсона, играют подчиненную роль, если вообще воспринимаются и изучаются.

Можно разделить современных математиков на три группы: «платоники», «полуплатоники» и строгие «антиплатоники»[15]. Но интересно, что даже те, кто считает себя антиплатониками, часто являются таковыми лишь теоретически, а на практике используют классическую, платоновскую математику. Это, конечно, не совсем честно, и Л. Кронекер осуждал таких мыслителей: «Они оспаривают существование пашни, но наслаждаются растущим на ней картофелем»[16].

Но в чем же заключается особенность «платоновской» математики? Приведем сначала два конкретных примера — две аксиомы из теории множеств. Аксиома объединения звучит так: «Из любого семейства a множества b можно образовать множество d, каждый элемент c которого принадлежит по меньшей мере одному множеству b данного семейства a». Е. В. Бет в своих комментариях указывает на очевидно «платоновский характер» этой аксиомы: во-первых, множества здесь являются совокупностями, содержащими в

платонизм», он говорит только об «очищенном платонизме». Сам Платон, несомненно, согласился бы с ним.

[15] К группе «платоников» можно причислить, например, И. Кеплера, Г. В. Лейбница, Ж.-Б. Фурье, К. Г. Якоби, Б. Больцано, Э. Э. Куммера, А. Кэйли, Г. Кантора, Ш. Эрмит, Г. Фреге, Г. Х. Харди, Г. Миттаг-Лефлера, К. Геделя, Х. Шольца, Б. фон Фрейтаг Лоренгоффа, А. Шпайзера, П. Финслера. К группе «антиплатоников» принадлежат такие имена, как А. Пуанкаре, Л. Э. Ян Брауэр, Г. Вайл, Д. Гильберт, А. Хейтинг, Э. Темпл Бэлл, Й. Бар-Хиллель, А. Мостовски, Х. Б. Карри, А. Робинсон, У. Куайн, Р. Л. Гудстайн, П. Лоренцен, Р. Карнап, Д. фон Нойманн. Среднюю позицию занимают И. Кант, К. Ф. Гаусс, Л. Кронекер, Р. Дедекинд, Д. Кениг, Б. Рассел, Р. Курант, А. Френкель, П. Бернайс (я упоминаю только некоторых западных математиков; о русских я не осведомлен).

[16] Л. Кронекер в письме к И. Джайлеру; цит. по: Meschkowski. Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors. S. 260.

себе те математические сущности, которые имеют какое-то общее свойство; и, во-вторых, множества принимаются как единства, которые могут сами стать элементом какого-то множества[17]. Сходным образом дело обстоит и с аксиомой выбора: «Из любого семейства *a* непустых попарно непересекающихся множеств *b* можно образовать множество *d*, в котором есть по одному элементу *c* от каждого множества *b* данного семейства *a*». Звучит хорошо, но что означает выражение «можно образовать»? На самом деле аксиома не дает никакой подсказки, *как* можно сконструировать множество *d*. Кроме того, нет и никакой «необходимости» это делать, поскольку все множества «существуют в платоновском математическом небе» и там обладают своими свойствами, независимо от того, можем мы определить их конкретно или нет. Это типично для «платонизма в математике»[18].

Также платонический характер обнаруживается в современной геометрии — и даже сильнее, чем во времена Платона. В параграфе 2.4 мы говорили, что в «Началах» Евклида не используются никакие материальные средства, что они содержат только чисто теоретические размышления. Все же Евклид в каком-то идеальном смысле занимается геометрическим «конструированием»; первый постулат, например, звучит так: «Допустим, что от всякой точки до всякой точки можно *провести* прямую линию». Но в «Основаниях геометрии» Гильберта мы уже не находим никаких человеческих

---

[17] «L'inspiration platonicienne de l'axiome de compréhension saute aux yeux; en effet, les ensembles se présentent en premier lieu comme des multitudes embrassant les entités mathématiques ayant une certaine propriété en commun; mais en second lieu, un ensemble est accepté comme une unité capable de se présenter à son tour comme élément d'une multitude» (Beth. L'éxistence en mathématiques. P. 43).

[18] Ср. описание взглядов платоников у Френкеля: «Платоники убеждены, что для каждого правильно определенного одноместного условия существует, вообще говоря, соответствующее множество (или класс), состоящее из всех тех и только тех предметов, которые удовлетворяют этому условию, и что это множество само является предметом с таким же полноправным онтологическим статусом, как и его члены» (Френкель, Бар-Хиллел. Основания теории множеств. С. 399).

действий, никакого «проведения»; все предметы (например, прямые линии) уже существуют (и существуют вечно) в геометрическом небе[19].

Добавим несколько слов о создателе теории множеств, Георге Канторе. Многие читатели Кантора удивились, прочитав в V разделе его статьи «К учению о трансфинитном» длинную сноску, в которой он привел слова бл. Августина, свидетельствующие о его вере в актуальную бесконечность[20]. А ведь сам Августин, как известно, ссылался на Платона![21] Но и у Кантора есть прямая ссылка на Афинянина. Он писал: «*Учение о многообразиях*. Этими словами я обозначаю одну чрезвычайно обширную дисциплину, которую до сих пор я пытался разработать лишь в специальной форме арифметического или геометрического учения о множествах. Под "многообразием" или "множеством" я понимаю вообще всякое многое, которое можно мыслить как единое, т. е. всякую совокупность определенных элементов, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона, и таким образом я думаю определить нечто, родственное *платоновскому* εἶδος; или ἰδέα, а также тому, что *Платон* в своем диалоге "Филеб, или высочайшее

---

19 Гильберт не говорит о «небе», он выражается так: «*Мы мыслим* точки, прямые, плоскости находящимися в известных взаимных отношениях» (Гильберт. Основания геометрии, 1948. С. 2; курсив мой). Но где «находятся» такие «мысленные точки», «мысленные прямые» и т. д.? Если бы они просто были произвольно придуманы, то каждый геометр мог бы изобрести свою личную геометрию — теоретически это возможно, но практически — нет. «Мы мыслим» на самом деле то, что «существует» одинаково для всех, и в тот момент, когда мы обнаружили другие, неевклидовы геометрии, можно сказать, что они всегда существовали, но мы о них не знали...

20 Кантор. Труды по теории множеств. С. 289–291.

21 «Итак, неужели Бог не знает всех чисел вследствие их бесконечности и неужели ведение Божие простирается лишь на некоторую сумму, а остальные числа не знает? Кто даже из самых безрассудных людей скажет это? Но не решатся презирать числа и признавать их не подлежащими божественному ведению те, для которых имеет значение авторитет Платона, внушающего, что Бог на основании чисел сотворил мир...» (Августин Блаженный. О граде Божием. XII, 18).

благо" называет μικτόν. Он противопоставляет его ἄπειρον, т. е. безграничному, неопределенному, называемому мною несобственно бесконечным, равно как и πέρας, т. е. границе, и называет его упорядоченной "смесью" обоих последних»[22]. Кантор говорит об *интрасубъективной,* или *имманентной, реальности* чисел[23] и пишет в одном из писем к Эрмиту следующее: «Вы прекрасно говорите в вашем письме от 27 ноября: "Целые числа, мне кажется, представлены как мир реальных вещей, существующий вне нас с той же абсолютной необходимостью, что и природные предметы, которые мы познаем через органы чувств и т. д." Но позвольте мне

---

[22] Кантор. Труды по теории множеств. С. 101. (Курсив по оригинальному изданию: Cantor. Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Hildesheim: Georg Olms, 1966. S. 204.)

[23] «Мы можем говорить о действительности или существовании целых чисел, как конечных, так и бесконечных, в двух смыслах. Строго говоря, это те же самые отношения, в которых вообще можно ставить вопрос о реальности каких-либо понятий или идей. Во-первых, мы можем считать целые числа действительными постольку, поскольку они занимают на основе определений вполне определенное место в нашем рассудке, вполне ясно отличаются от всех остальных составных частей нашего мышления, находятся к ним в определенных отношениях и, таким образом, определенным образом видоизменяют субстанцию нашего духа. Да позволено будет мне назвать этот вид реальности наших чисел их *интрасубъективной,* или *имманентной реальностью.* Но числам можно приписать реальность также постольку, поскольку их приходится рассматривать как выражения или отображения процессов и отношений во внешнем мире, противостоящем интеллекту, поскольку, далее, различные числовые классы (I), (II), (III) и т. д. оказываются представителями мощностей, которые фактически встречаются в телесной и духовной природе. Этот второй вид реальности я называю транссубъективной, или также транзиентной реальностью целых чисел. При вполне реалистической, но в то же время и не менее идеалистической основе моих размышлений, для меня не подлежит никакому сомнению, что оба эти вида реальности всегда совпадают в том смысле, что какое-нибудь понятие, принимаемое за существующее в первом отношении, обладает в известных, даже бесконечно многих отношениях и транзиентной реальностью. Правда, установление этой последней по большей части принадлежит к самым трудным и утомительным задачам метафизики...» (Кантор. Труды по теории множеств. С. 79).

заметить по этому поводу, что для меня реальность и абсолютная закономерность целых чисел *намного выше,* чем у чувственного мира. И у этого имеется одно очень простое обоснование, а именно то, что целые числа, как отдельно, так и в их актуально бесконечной совокупности, существуют как вечные идеи in intellectu Divino в наивысшей степени реальности»[24].

Необыкновенные слова для научной переписки! И ведь это настоящий платонизм![25] При этом любопытно, что Хайч, представитель диалектического материализма, считает платоновскую позицию Кантора естественной и понятной и защищает Кантора от логицизма, формализма и интуиционизма[26].

Разумеется, представители современного «математического платонизма» обычно не говорят о «вечных идеях *in intellectu Divino*», и главным образом благодаря двум моментам. Во-первых, возникновение антиномий в начале XX в. показало, что существуют проблематичные (по крайней мере, для нас) «вечные идеи», и эти антиномии обнаруживаются именно в понятии «множества», как его понимал Кантор. Во-вторых, в 1938 г. Курт Гедель доказал, что если система аксиом (ZF) консистента, то и система (ZF) + (CH) консистента[27], а в 1963 г. Пол Коэн доказал, что если система

---

24 Кантор в письме от 30 ноября 1895 г. к Ш. Эрмите. Цит. по: Meschkowski. Probleme des Unendlichen. S. 262.

25 Мешковский в своей книге о Канторе пишет: «Рейдемейстер однажды сказал о Платоне, что его мышлению присущ "блеск бытия". Можно сказать это и о мире идей основателя теории множеств. В этом смысле Кантор был платоником: он дал онтологическое обоснование математики» (Meschkowski. Op. cit. S. 117).

26 «Вполне понятно, что Г. Кантор, обосновавший общую теорию множеств и обнаруживший трансфинитные числа, придерживался взглядов Платона» (Heitsch. Mathematik und Weltanschauung. S. 154). Хайч ощущает какую-то близость к Платону, и эта близость коренится в следующем: «Если мы вновь последуем за ходом мысли Кантора при выявлении трансфинитного, то можем установить, что этот ход характеризуется поистине диалектическим генерированием понятий» (Ibid. S. 321).

27 (ZF) — система аксиом теории множеств, создана математиками Цермело и Френкель. (CH) — гипотеза континуума, т. е. предположение Кантора

аксиом (ZF) консистента, то и система (ZF) + non(CH) консистента. Это значит, что существуют разные, даже бесконечно многие, теории множеств, и нам придется выбрать, с какой из них мы хотим работать, — в каждом случае это наш, человеческий, выбор. Можно, конечно, сказать, что мы выбираем только из уже готовых бесконечных возможностей, а в «математическом небе» или у Бога все эти теории существуют вечно и независимо от нас, но это уже не очень убедительная позиция и «не то, что представлял себе Кантор»[28]. Но все же, несколько ограниченный, «очищенный» математический платонизм в смысле Бернайса — это действительно фундамент классической математики.

Однако платоновская философия имеет значение для математики еще и по другой причине. Вспомним о том, что за последние 300 лет математика пережила невероятное развитие: очень изменились старые области математики, к ним присоединились и новые, ранее не существовавшие, а специальные исследования достигли небывалых высот. Форма и объем математики усложнились настолько, что один университетский профессор математики как-то провозгласил: «Все так обширно — и дьявольски сложно!»[29] Неудивительно, что в этой ситуации возникает потребность в *синтезе* более высокого уровня, который был бы в состоянии упорядочить, обобщить и прояснить уже существующее знание. Некоторые подобные синтезы действительно были обнаружены. Например, *теория функций* классифицирует почти бескрайнее разнообразие функций, исследует их качества и проверяет их вычисления; *групповая теория* обобщает совершенно различные структуры и описывает их общие качества; *теория множеств* учит рассматривать различные части математики с определенной общей точки зрения. Такие теории обнаруживают, конечно же, высокую степень абстрак-

---

(которое он не смог доказать), что мощностей между счетным множеством и континуумом нет, т. е. $\aleph = \aleph_1$.

[28] Purkert. Kontinuumproblem und Wohlordnung. S. 239.

[29] Профессор Герберт Гросс, д-р матем. наук, в докладе, прочитанном 25 июня 1983 г. в математическом институте Университета Цюриха.

ции; поэтому Колерус говорит о «духовной империи математики» и сравнивает правящих там «духов» — что представляет для нас интерес — с платоновскими идеями[30].

Возьмем относительно простой пример: числа постепенно обобщались в течение прошедших двух тысячелетий: от натуральных чисел, через целые и рациональные, до иррациональных. Как понимать эти числа, было зачастую неясно, но потом появилась «платоновская идея» комплексных чисел, представляющих, так сказать, прообразы всех других чисел во всем их совершенстве и симметрии. И только с появлением прообраза — «платоновской идеи» — появилась возможность действительно понять и овладеть реальной империей чисел.

Мы привели только *примеры* воздействия платоновского мышления на развитие и формирование математики. Можно принципиально спросить, как это сделал Карл Фридрих фон Вайцзеккер, «почему математика процветала в платоновской школе, а не в школе атомистов»?[31] Ответ на этот вопрос будет лежать именно в платоновской философии: если атомы являются действительно беспорядочно существующими, как полагают атомисты — вспомним утверждение Гераклита, что космос «словно слиток, отлитый как попало»[32], — тогда совершенно бессмысленно говорить о мнимых (идеальных) объектах, таких как математический круг или треугольник. А для Платона именно эти последние «объекты» (идеи) и делают возможным настоящее знание.

б) Физика

Взгляды Платона на физику тесно связаны с математикой и, конечно, с его философией в целом. Отметим здесь лишь несколько аспектов.

---

[30] Colerus. Von Pythagoras bis Hilbert. S. 359.

[31] Weizsäcker. Die Tragweite der Wissenschaft. S. 66.

[32] Фрагменты ранних греческих философов. От эпических теокосмогоний до возникновения атомистики. С. 248.

Мы только что говорили об утверждениях атомистов. У Платона мы тоже находим атомистическую теорию, но она фундаментально отличается от взглядов Демокрита. Атомистику Платона, сконструированную с использованием правильных многогранников[33], мы можем рассматривать как гениальную попытку описать природу *математическими средствами*, руководствуясь при этом *идеями*, которые не проистекают из опыта. Платон установил, что естествознание не строится на чисто эмпирическом исследовании, но должно быть описано математически, для чего требуются *ведущие идеи*, не проистекающие из опыта. «Защищать закон от произвола, единство от множества, ἐπιστήμη от ἀληθὴς δόξα — такова была задача, которую ставил перед собой создатель учения об идеях. В лице Демокрита и Платона, которые все же во многом глубоко родственны, два мировоззрения противостоят друг другу. Платон это понял, и если он чему-то научился от своего главного оппонента, то тому, что ему не надо следовать за основной идеей этой физики. Не потому, что ему недоставало понимания границ между физикой и философией, а потому, что он, первым и единственным в античные времена, уяснил понятие закона природы, и потому, что он понял, что естествознание является наукой настолько, насколько оно математично»[34].

Действительно, дискуссия между Платоном и Демокритом сыграла очень важную роль в развитии науки[35]. Для последующих

---

33 О деталях этой конструкции спорят; существующие на этот счет точки зрения излагает и оценивает Ева Сакс (см.: Sachs. Die fünf platonischen Körper. S. 209–223).

34 Ibid. S. VII. Наторп также настойчиво указывал на значение Платона для развития точных естественных наук: «Важное открытие Платона состоит в том, что познание, понятия, наука могут сформироваться только в мышлении, из собственных его средств» (Natorp. Platos Ideenlehre. S. 34); или: «Галилей смог зайти на территорию нового научного мышления, поскольку *"Менон"* Платона вошел в его плоть и кровь» (Ibid. S. 41).

35 В «Федоне» (97b–98d) Платон критикует Анаксагора (а вместе с тем и Демокрита), так как Анаксагор в самом начале своих рассуждений вводит разум (Nous), который приводит в движение Целое, однако *порядок вещей* он не возводит ни к каким причинам, но приписывает — совершенно

времен оказалось существенным, что в этой дискуссии Платон последовательно отстаивал *пифагорейскую* точку зрения[36]. Дело в том, что «Демокрит оставил все на волю слепого случая, давления и толчков... В противоположность этому пифагорейцы считали, что планеты представляют собой божественные, одушевленные живые существа, которые, обладая разумом, совершают свои вечные круговые обращения по математическим законам. Эта точка зрения оказалась для астрономии более плодотворной, ибо она побуждала людей своим собственным разумом проникнуть в сущность этих законов и определить круговые орбиты планет»[37]. Действительно,

---

нелепо — воздуху, эфиру, воде и многому иному, что вообще ничего не разъясняет. В дальнейшем платоновская критика становится еще острее, а учения «новых мудрецов» называются в «Законах» не только бессмысленными, но даже опасными: «Но зато пусть подвергнутся нашему порицанию сочинения нового поколения мудрецов, поскольку они являются причиной зол. Вот что влекут за собой сочинения подобных людей: мы с тобой, приводя доказательства существования богов, говорим об одном и том же — о Солнце, Луне, звездах, Земле — как о богах, о чем-то божественном. Люди же, переубежденные этими мудрецами, станут возражать: все это — только земля или камни и, следовательно, лишено способности заботиться о делах человеческих. Приукрасив словами это мнение, они делают его весьма убедительным» (886d). То, что эти «новые мудрецы» — Анаксагор и Демокрит, видно из продолжения: «Огонь, вода, земля и воздух — все это, как утверждают, существует благодаря природе и случаю; искусство здесь ни при чем. В свою очередь из этих [первоначал], совершенно неодушевленных, возникают тела — Земля, Солнце, Луна и звезды» (889b).

36 О влиянии Пифагора на Платона мы читаем у Л. Жмудя: «Несмотря на бесспорное влияние пифагорейской мысли на Платона (особенно в поздний период), в его сочинениях... мы лишь дважды встречаем Пифагора... На фоне многочисленных пассажей, в которых видно пифагорейское влияние... скупость прямых упоминаний особенно удивительна. Удовлетворительного объяснения она до сих пор не получила. Ясно лишь, что мы имеем дело не с сознательным умолчанием... а с особенностью философского и художественного метода Платона, который позволял ему использовать идеи досократиков, преломляя их сквозь призму своего учения и не особенно заботясь о том, чтобы представить их в реальной исторической перспективе или указать на свою зависимость от них» (Жмудь. Наука, философия и религия в раннем пифагореизме. С. 151–152).

37 Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 180.

здесь сказалось стремление Платона к повсеместному «обнаружению структур и его убеждение, что любую структуру можно объяснить математически»[38].

Вспомним еще раз уже цитировавшийся нами текст из *Государства*[39], который раскрывает сущность науки на примере астрономии: астрономия, если она реализуется как настоящая наука, занимается не реальными небесными телами, а идеальными объектами, которые передвигаются согласно математическим законам. Этим требованием Платон указал зарождающемуся естествознанию единственно верную дорогу, и его заслуга не должна недооцениваться. «Нет более высокого триумфа платонизма, чем этот триумф в борьбе за прояснение реального мира», так как «наша физика функционирует только в рамках этих процессов идеализации»[40]. В качестве следующего примера возьмем закон инерции. В природе нет ни одного явления, которое точно подтверждало бы этот закон. Закон инерции — это идеализированная гипотеза, идея, когда-то навязанная человеческому духу. Но именно такие «чистые» идеи часто оказываются весьма плодотворными. Особенно отчетливо это видно при сравнении с Аристотелем. «Рассмотрим аристотелевскую физику. Спросим себя: из-за чего она погибла? Она нашла гибель в своем позитивизме. Аристотель обратился к позитивизму, который не допускает идеализированных гипотез и, вследствие этого, делает математическую физику невозможной. Она потерпела неудачу из-за его позитивизма»[41].

---

38 Fritz K. von. Цит. по: Dönt. Platons Spätphilosophie… S. 48. Примеч. 73.

39 «Эти узоры на небе, украшающие область видимого, надо признать самыми прекрасными и совершенными из подобного рода вещей, но все же они сильно уступают вещам истинным с их перемещениями друг относительно друга, происходящими с подлинной быстротой и медленностью, в истинном количестве и всевозможных истинных формах, причем перемещается все содержимое. Это постигается разумом и рассудком, но не зрением» (Государство. 529c–d).

40 Scholz. Mathesis universalis. S. 393.

41 Ibid. S. 394. См. также отрицание Наторпом представления Аристотеля, что «верными причинами были бы вещи, а не закон» (Natorp. Platos Ideenlehre.

Ева Сакс в своем подробном исследовании платоновских тел описала магистральную линию Платона следующим образом: «Платон пришел к убеждению, что "природа", как мы говорим, — это упорядоченное в соответствии с законом целое, и здесь он ищет один из ее законов, а именно — принцип строения "огня", "воды" и т. д... Считается, что понятие закона природы не было свойственно Платону; я думаю, в рассмотренных нами местах из "Тимея", как и в "Филебе", можно найти доказательство обратного. Платон пришел к понятию закона природы, установив в "Тимее" (51d) следующую гипотезу: если должна существовать настоящая наука, то должны быть и идеи, т. е. *окружающий нас мир должен быть упорядоченным по каким-то законам целым*»[42].

S. 430). Ева Сакс также отмечала: «Кругозор Платона шире, чем у Аристотеля. Его точка зрения гораздо ближе к современному естествознанию, чем точка зрения его знаменитого ученика. При создании новой физики произошел поворот от Аристотеля (частично, конечно, неправильно понятого) к Платону. Галилей опирался на Платона, когда создавал свой собственный метод» (Sachs. Die fünf platonischen Körper. S. 234).

42 Sachs. Op. cit. S. 192. Гайденко также подчеркивает важность этого взгляда Платона: «Платон в "Тимее" делает попытку выявить в природном мире все то, что может быть предметом изучения математики, и тем самым впервые в истории строит в сущности вариант математической физики. Он считает, что в мире природы достоверное знание мы можем получить ровно в той мере, в какой раскроем математические структуры этого природного мира. Именно этим обстоятельством, на наш взгляд, объясняется интерес к "Тимею" ученых эпохи эллинизма, Средних веков и эпохи Возрождения — вплоть до Галилея». При этом все же ясно, что Платон является только пионером, а не основателем современной математической физики: «Однако платоновское представление о том, как соотносятся между собой физические свойства и качества вещей с лежащими в их основе математическими структурами, так же как и понимание самих этих структур, является весьма специфическим и глубоко отличным от того представления, которое сложилось в науке Нового времени» (Гайденко. История греческой философии в ее связи с наукой. С. 175). В сущности, однако, вопрос о том, почему физическое описание природы может быть представлено в математике (и часто в очень высокой, абстрактной математике), или, наоборот, почему математику, которой занимаются люди, можно так успешно применять при описании природных процессов, все еще не решен.

Убеждение Платона, что структуру Вселенной можно описать *математическими средствами*, способствовало астрономическим исследованиям уже в его время, а в Средневековье особенно поощряло развитие зарождающегося естествознания; аристотелизм скорее тормозил этот процесс, в то время как платонизм, напротив, стимулировал. Платоновский «Тимей» изучался, например, в Шартрской школе, которая на его основе «стремилась определить структуру элементарного мира и его математические соотношения, а также устройство и функции человеческого тела. Вместе с тем она также по собственной инициативе оказала содействие естественнонаучному движению, переживавшему свой первый взлет в связи с развитием арабской науки». Естественнонаучное движение Средневековья состояло «целиком в более или менее тесном отношении с платонизмом. Аристотель — это весьма достойный руководитель в биологии... но не в физико-математическом исследовании. Здесь первопроходцем среди философов был Платон»[43].

Конечно, здесь можно выдвинуть критическое возражение, которое Гайденко сформулировала таким образом: «Если установка Платона требует отвернуться от познания природы, с тем чтобы человек направил свой взор на некое "безвидное", бестелесное, вечное бытие, то такая установка гибельна для естествознания, она представляет собой какой-то обскурантизм, доказывает ученому,

---

[43] Baeumker. Der Platonismus im Mittelalter. S. 17, 21–22. Генрих Бек описывает значение христианских платоников для развития современной *техники*: «В Средневековье некоторые течения противопоставляли природу и технику, как будто бы задача техники — перехитрить природу или бороться против нее, что означало бы в принципе некое начинание против создателя природы — такая точка зрения совсем не полезна для развития техники. В противоположность этому Гуго Сен-Викторский ("Eruditiones didascalicae") и другие христианские платоники конца Средневековья видели в *платоновском* диалоге "Тимей" идею божественного демиурга, или всемирного архитектора, и понимали Бога как "архитектора" или "первостроителя" мира, а сам мир как божественно сконструированную "машину" (machina mundi), которая служит своими божественно запланированными законами как "инструмент" Его провидения» (Beck. Philosophie der Technik. S. 47. Примеч. 19).

что всякие его попытки раскрыть закономерности природы заранее обречены на неудачу, а тем самым вселяет в него дух скептицизма, являясь, таким образом, препятствием на пути развития науки»[44]. Но ситуация как раз обстояла противоположным образом. Каждому известна важность и необходимость основных теоретических, умственных идей не только при изобретении и формулировании соответствующих теорий, но и уже при получении точных фактов и данных[45]. К тому же необходим и подходящий *метод*, и здесь Платон вновь указывает нам дорогу[46].

Но назовем и некоторых ученых, влияние на которых «математической философии» Платона — если можно выразиться таким образом — очевидно. Первым упомянем Галилео Галилея, который отвергал эмпиризм аристотелевского вида и ориентировался вместо этого на Платона, особенно на диалог «Менон»[47]. Решающим исходным пунктом для него является не эксперимент, а математически фиксируемое теоретическое осознание, данное нам интуитивно — аналогичным образом пра-знание, «воспоминание», играет решающую роль у Платона. Галилей утверждал, например, что все тела одинаково быстро падают в вакууме, что поддается

---

[44] Гайденко. Обоснование научного знания в философии Платона. С. 101.

[45] «Уже одно лишь *точное* определение фактического и его соответствующее изображение в мыслях требует большего проявления личной инициативы, чем обычно считается» (Mach. Erkenntnis und Irrtum. S. 316).

[46] По этому поводу Мах писал так: «Практическая механика показывает, как тело, подвешенное на упругой нити, раскачивается кругами; теоретическая механика учит объяснять этот процесс самыми простыми фактами. Этот опыт приводит Ньютон. Следуя указаниям Платона, затем он представит, пройдя по *противоположному* пути, эту задачу как решенную, и движение планет как такое вращающееся движение. *Аналитический* путь научит его найти такое натяжение нити, которое удовлетворяет заданию... Таким же образом дела обстоят и в других областях... Здесь, как и всюду, опыты, полученные с помощью *синтеза* в *одной* области, используются при анализе в *другой* области. Методы Платона всегда оказываются при этом полезными» (Ibid. S. 317–318).

[47] См. подробное описание в работе: Meyer-Abich. Der Holismus im 20. Jahrhundert. S. 316.

экспериментальной проверке только способом аппроксимации, но зато это утверждение оказалось крайне плодотворно в качестве «идеального закона».

Вторым упомянем Иоганна Кеплера, который использовал 5 платоновских тел для объяснения астрономических явлений и стремился, как и Платон, объединить натурфилософию с естественнонаучными объяснениями. Важнее всего для нас то, что «как в "Тимее" Платона, так и в мышлении Кеплера именно геометрия выражает настоящую реальность. За пестрым разнообразием проявлений стоит мир пропорций и фигур, в котором знаток может проследить дух Бога»[48].

В качестве третьего примера приведем математика, логика, а позже и философа, Альфреда Норта Уайтхеда, который написал вместе со своим учеником Бертраном Расселом знаменитые «Principia Mathematica». Философы и теологи все больше и больше интересуются основным натурфилософским трудом Уайтхеда «Процесс и реальность»[49]. Интересно в этом смысле отношение Уайтхеда к Платону и Аристотелю. Последнего он ценил как естествоиспытателя, в то время как к аристотелевской логике он относился весьма критически. Платоном же Уайтхед вдохновлялся непосредственно. Вольф-Газо пишет: «Читающие Уайтхеда должны наглядно представлять себе "Тимей" Платона. Уайтхед особенно ценил этот поздний диалог, так как он представляет парадигму унифицированного космологического описания всей Вселенной. По этой же причине Уайтхед восхищался также Principia Mathematica Ньютона, которые он интерпретировал в связи со взглядами Платона. Он полагал оба этих произведения самыми важными документами понимания природы на Западе. Можно было бы сказать, что основное произведение Уайтхеда представляет совре-

48 Carrier, Mittelstrass. Johannes Kepler. S. 157.

49 Whitehead A. N. Process and Reality. N. Y.; London: The Free Press, 1978. В русском переводе можно найти гл. 1, ч. 1 («Спекулятивная философия») и гл. 10, ч. 2 («Процесс») в сборнике: Уайтхед. Избранные работы по философии. М.: Прогресс, 1990.

менную версию "Тимея". В частности, морфология и демиург в этом позднем диалоге имеют особое значение. Космос, которому демиург придает единство, форму и порядок, представляет эстетическо-геометрическую концепцию мироздания. Это отношение служило Уайтхеду в качестве руководства при разработке его собственной "космологии"»[50].

В качестве четвертого примера приведем слова астрофизика-теоретика Марио Ливио: «Надо сказать, что я довольно сильно ощущаю близость с некоторыми из настроений, выраженных основным мотивом Платона»[51]. Что касается химии, он писал так: «Мы должны понимать, что, в то время как детали, конечно, существенно изменилась, основная идея, лежащая в основе теории Платона, мало чем отличается от современной химии, разработанной Джоном Дальтоном в девятнадцатом веке... теория Платона было гораздо шире, чем просто символическая ассоциация. Он отметил, что грани первых четырех многогранников могут быть взяты из двух типов прямоугольных треугольников, а именно — равнобедренных с углами 45°–90°–45° и 30°–90°–60°. Платон далее объяснил, как основные "химические реакции" могут быть описаны с использованием этих чисел. Например, в "химии" Платона, когда вода нагревается огнем, она производит две частицы пара (воздуха) и одну частицу огня. В виде формулы химической реакции это может быть записано как:

$$\{\text{вода}\} \rightarrow 2\{\text{воздух}\} + \{\text{огонь}\}$$

или, сохраняя количество граней (имеющееся в платоновых телах, представляющих эти элементы, соответственно): $20 = 2 \times 8 + 4$. Хотя это описание явно не соответствует нашему современному пониманию строения материи, его центральная идея — что наиболее фундаментальные частицы в нашей Вселенной и их взаимодействие могут быть описаны с помощью математической теории, которая обладает определенной симметрией — это один из

---

50 Wolf-Gazo. Alfred North Whitehead. S. 302.

51 Livio. The Golden Ratio. P. 64.

краеугольных камней современных исследований в области физики элементарных частиц... Современные теории, которые основаны на симметриях и законах сохранения, таким образом, — действительно платонические»[52]. В физике и астрономии слегка «модифицированный платонизм» также хорошо соответствует современным взглядам: «Согласно этим "модифицированным представлениям Платона", законы физики выражаются в математических уравнениях, структура Вселенной фрактальна, галактики выстраиваются в логарифмические спирали, и так далее, ибо математика является языком Вселенной. В частности, математические объекты попрежнему считаются существующими объективно, совершенно независимо от нашего знания о них, но вместо того, чтобы полностью разместить математику в какой-то мифической абстрактной плоскости, по крайней мере некоторые ее части располагаются в реальном космосе. Если мы хотим общаться с разумными цивилизациями, удаленными на 10 000 световых лет, все, что мы должны сделать, это транслировать число 1,6180339887...[53], оставаясь уверенными, что они поймут, что мы имеем в виду, так как Вселенная, несомненно, подчинила их тем же законам математики. Бог — действительно математик»[54].

---

52 Livio. The Golden Ratio. P. 68–70.

53 Это так называемое «золотое число»: если мы будем делить непрерывную величину на две части в таком отношении, при котором большая часть так относится к меньшей, как вся величина к большей, то иррациональное число 1,6180339887... будет величиной этого соотношения.

54 Livio. The Golden Ratio. P. 241. С другой стороны, Ливио не исключает в принципе возможность того, что наша математика сформирована на основании наших физических и культурных данностей; математика с этой точки зрения является «языком Вселенной» в том виде, как *мы, земляне,* воспринимаем и используем этот язык. «Другие разумные цивилизации, где-то там, могли бы, вероятно, разработать совершенно другие своды правил, если их механизмы восприятия очень отличны от наших. Например, когда одну каплю воды добавляют к другой или одно молекулярное облако в галактике сливается с другим, получается только одна капля или одно облако, а не два. Поэтому, если цивилизация, так или иначе основанная на жидкости, существует, для нее один плюс один не

Возникает, конечно, подозрение, что платонизм не играл никакой роли в непосредственном развитии науки и что процитированные ученые использовали взгляды Платона уже «после окончания спектакля», т. е. тогда, когда начали осмыслять «фундамент» своих методов и теорий. Но есть и случаи, когда мы ясно видим, что идеи и мировоззрение Платона *непосредственно* воздействовали на формирование новых теорий. Рассмотрим для этого пятый пример: квантового физика Вернера Гейзенберга. Еще будучи гимназистом, он прочитал «Тимей» Платона на греческом языке и был поражен. «Благодаря этому чтению, — пишет он, — основные идеи теории атомов становились для меня гораздо яснее, чем до этого»[55]. Также в течение последующих лет он объяснял, что его представление об элементарных частицах было подготовлено философией Платона. Тезис «В начале была симметрия» кажется ему правильнее, нежели демокритовский тезис «В начале была частица». Элементарные частицы воплощают симметрию, но являются не ее основой, а лишь следствием в качестве самого элементарного ее проявления. Поэтому элементарные частицы «можно сравнить с правильными многогранниками из платоновского "Тимея". Они — прообразы, идеи материи»[56]. По мнению Гейзенберга, современная физика окончательно выступила на стороне Платона против Демокрита,

---

обязательно равно двум. Такая цивилизация может не признавать ни простых чисел, ни Золотого сечения» (Ibid. P. 251).

55 Heisenberg. Rede zur 100-Jahrfeier des Max-Gymnasiums. S. 102.

56 Heisenberg. Elementarteilchen und Platonische Philosophie. S. 326. Гейзенберг часто говорил о значении платоновской философии для естествознания, например в следующей цитате: «На самом деле, следует рассматривать это уравнение [формулу Планка] в качестве очень простой иллюстрации требований симметрии, но эти требования и есть настоящее ядро теории. Поэтому, как и у Платона, все выглядит так, как будто в основе этого сложного видимого мира, состоящего из элементарных частиц и силовых полей, лежит простая и прозрачная математическая структура... Окончательная теория материи будет охарактеризована, как у Платона, посредством ряда важных требований, налагаемых симметрией на материю» (Heisenberg. Die Plancksche Entdeckung und die philosophischen Grundfragen der Atomlehre. S. 233).

«так как самые маленькие единицы материи — это, действительно, не физические объекты в обычном смысле слова; они — формы, структуры или — в платоновском смысле — идеи, о которых можно говорить недвусмысленно только на языке математики»[57]. Но — и для Гейзенберга это существенно — значимость Платона не ограничивается современной квантовой физикой. Уже Галилей должен был отвернуться от Аристотеля и обратиться к Платону, чтобы инициировать современное точное естествознание[58], — и этому естествознанию до сих пор свойственен платонический характер, благодаря которому физик-теоретик Вальтер Хайтлер смог сказать: «Это почти невозможно — думать о законах природы иначе, чем в платоновском, хотя и в более широком и обобщенном, смысле»[59]. Хайтлер констатирует, например, что в квантовой физике вообще невозможно описывать какие-то видимые свойства частиц, такие как местоположение или скорость; существование частиц находится в совершенно другой области, оно описывается, допустим, волновой функцией Шредингера, которую в принципе невозможно наблюдать. Эта функция имеет «математически отвлеченное» существование, но поскольку она позволяет предсказывать реальные свойства, ей присуща и физическая реальность. Такие факты «подчеркивают платонический аспект физических законов, даже доказывают его»[60].

---

57 Heisenberg. Das Naturgesetz und die Struktur der Materie. S. 236.

58 «Значение красоты для понимания природы стало ясным только тогда, когда в начале Нового времени произошло возвращение от Аристотеля к Платону. И только вместе с этой переменой обнаружилась вся плодотворность образа мышления, введенного Пифагором и Платоном. Уже знаменитые исследования свободного падения тел... указывают на это наиболее отчетливо. Галилей начинает с тщательных наблюдений, без оглядки на авторитет Аристотеля, и пытается, согласно учениям Пифагора и Платона, найти математические формы, соответствующие эмпирически установленным фактам, и таким образом он доходит до своих законов падения тел» (Heisenberg. Die Bedeutung des Schönen in der exakten Naturwissenschaft. S. 294–295).

59 Heitler. Der Bildungswert der Naturwissenschaft. S. 84.

60 Heitler. Wahrheit und Richtigkeit in den exakten Wissenschaften. S. 20.

Физик Карл Фридрих фон Вайцзеккер также много писал о судьбе платоновского естествознания на всем протяжении истории и разъяснял, в каком именно смысле Платон до сих пор является значимым собеседником для физиков: «Похоже, что наша физика в своем развитии проходит различные представления, набросок которых, как бы в качестве резюме, дал еще Платон, хотя и с существенным различием. Существенное различие состоит, как я полагаю, в нашем представлении о времени. Время в нашем понимании не циклично, у него есть открытое будущее и фактическое прошлое, которое никогда не повторяется. Ни в коем случае нельзя сказать, что мы просто вернулись к платоновской картине мира, и меня поняли бы ошибочно, если бы показалось, что я хочу просто восстановить взгляды Платона. Я хочу, скорее, сказать, что современное естествознание, которое изначально ссылалось на Платона, но не полностью следовало его философии, как раз в тех местах, где оно не следовало за ним, вернулось назад к проблемам, которые уже Платон ясно видел, и что завершение физики, каковым оно вообще представляется сегодня где-то на горизонте, требует такого философского размышления, которое бы партнерски относилось к платоновским размышлениям»[61]. И еще одна цитата: «Как раз в том случае, когда мы занимаемся прекрасным материалистическим естествознанием и остаемся верными материи и ее законам, мы и приближаемся к Платону; иначе, если мы слишком быстро перескочим в сферу духовного, этого не случится. Серый гусь, скажет естествоиспытатель, состоит из молекул, а молекулы составлены из атомов. Атомы удовлетворяют законам квантовой механики, и это настоящие законы современной физики, физики элементарных частиц. Что соответствует этому у Платона? Для начала то, что основные законы природы являются математическими. Но почему они должны быть математическими? Этот вопрос снова возвращает нас назад, к вопросу, почему в природе — в том, что мы называем чувственной действительностью, — имеется что-то вроде кругов,

---

[61] Weizsäcker. Platonische Naturwissenschaft im Laufe der Geschichte. S. 344–345.

напоминающих нам тот идеальный круг, что описывает математика. И теперь мы стоим у входных ворот, ведущих к теории идей...»[62]

Последние слова, которые нужно сказать в этом параграфе, принадлежат И. Д. Рожанскому, кандидату физико-математических и доктору философских наук, подробно исследовавшему физическую часть «Тимея» Платона. Сначала он напоминает нам, что этот текст сделал платоновскую теорию микромира «предметом насмешек со стороны представителей "здравого смысла" всех последующих эпох. Весь мир у Платона состоит из математических треугольников — разве это не нелепо?!»[63] Но пристальное исследование общих черт, как и мельчайших деталей, не только показывает «физический стиль мышления Платона»[64], но и удивляет глубиной воззрений. Рожанский пишет, например: «Мы можем сказать, что здесь мы присутствуем при зарождении понятия материи, и именно поэтому высказывания Платона так осторожны и неопределенны. Но попытаемся спросить себя: далеко ли мы ушли от Платона в понимании материи?»[65] И автор заканчивает свою статью почти восторженными словами: «Мы, люди XX века, не можем не поражаться интуиции ученого-естествоиспытателя, которую обнаруживает Платон в своих "правдоподобных рассуждениях". Мы имели возможность убедиться, что в этих рассуждениях, изложенных на небольшом числе страниц всего лишь одного сочинения — "Тимея", неожиданно появляются идеи, нашедшие развитие в ряде областей науки, о которых Античность не имела ни малейшего представления: в атомной физике, молекулярной химии,

---

[62] Weizsäcker. Platonische Naturwissenschaft im Laufe der Geschichte. S. 333. В своей статьи «Парменид и квантовая физика» Вайцзеккер утверждал, что изучать Платона очень полезно и для состоявшегося физика. «Если Парменид платоновского диалога прав в том, что то, что он доносит, является необходимым упражнением для понимания видов (идей), то такое упражнение, думаю я, принесет пользу также и нам... Мы упражняем наше мышление» (Weizsäcker. Parmenides und die Quantentheorie. S. 481).

[63] Рожанский. Платон и современная физика. С. 159.

[64] Там же. С. 167.

[65] Там же. С. 162.

теории элементарных частиц, теории фазовых превращений... Неудивительно поэтому, что исследователи, писавшие о физических воззрениях Платона, озаглавливали свои работы самым различным образом. Это и "Строение и разрушение атома согласно «Тимею» Платона" (П. Фридлендер), и "Химия «Тимея»" (Е. Брейнс) и "Молекулярное учение Платона" (Я. Дорфман). А что касается Гейзенберга, то он особенно подчеркивает близость концепций Платона современным тенденциям развития теории элементарных частиц. На самом же деле в "Тимее" заключены идеи (догадки?), имеющие отношение и к тому, и к другому, и к третьему, и к четвертому. Атомистическая концепция, изложенная в "Тимее" Платона, не только стоит особняком в античной науке: она представляет собой поразительное, уникальное и в каких-то отношениях провидческое явление в истории европейского естествознания»[66].

в) Холизм

Платона можно рассматривать также как отца — или одного из отцов[67] — современных холистических устремлений, а его высказывание «Возникшее — всегда целое»[68] можно воспринимать как

---

66 Там же. С. 170–171.

67 «Бытие» Парменида, «подобное глыбе прекруглого Шара», также можно интерпретировать как выражение холизма. Бытие — это «мир, осознанный как единство и целостность» (Matson. Zeno Moves! P. 108).

68 Софист 245d. При этом «целое» — это не просто какое-то нагромождение, совокупность частей, а нечто более «высшее», подобное организму, части которого не определяют его полностью; Аристотель объяснял это на примере слов (Риторика. 1401a29): тот, кто знает буквы, вовсе не обязательно понимает смысл слов. По мнению Платона, сами буквы, безусловно, играют свою роль (Кратил. 434a), но важно, что их сочетание описывает какой-то предмет или выражает определенную мысль; см. также: Филеб. 18c: «Видя, что никто из нас не может научиться ни одной букве, взятой в отдельности, помимо всех остальных, Тевт понял, что между буквами существует единая связь, приводящая все к некоему единству». Платон также утверждает, что Вселенная состоит не просто из четырех элементов, но из точных соотношений между ними (Тимей. 32b), т. е. они являются частями более высокого целого.

девиз холизма. Или, если выражаться более поэтически: «Наш космос стал видимым живым существом, объемлющим все видимое, чувственным богом, образом бога умопостигаемого, величайшим и наилучшим, прекраснейшим и совершеннейшим, единородным небом»[69].

Холизм оспаривает претензию позитивистского, атомистического образа мыслей на абсолютную истину и воспринимает природу с цельной, идеальной точки зрения. Такую холистическую точку зрения можно найти, например, в научно-популярных трудах Фритьофа Капры[70] или в многочисленных докладах и статьях физика-теоретика Вальтера Хайтлера. Хайтлер резюмирует свои рассуждения о истине и истинности в точных науках следующими словами: «Все это показывает, что три мира связаны и переплетены друг с другом чудесным образом: 1) духовный мир "идей" Платона, 2) окружающая нас природа и 3) человеческий дух. Все три мира неотделимы друг от друга, и это является прекрасным доказательством того, что они — духовный мир, материальный мир и человек — *связаны как единое целое*»[71]. По ту сторону узкого забора сегодняшней науки — таково убеждение Хайтлера — нам нужно обнаружить новый ландшафт, «в котором проживается жизнь во всей ее глубине и полноте», причем целесообразно при этом проследить за взглядами греческих мыслителей, так как имеются «намеки на то, что в более ранние времена на этот ландшафт смотрели совсем другими глазами (Пифагор, Платон?),

---

69 Тимей. 92с. Ср. также: Горгий. 508а — «Небо и землю, богов и людей объединяют общение, дружба, порядочность, воздержность, справедливость, по этой причине они и зовут нашу Вселенную "космосом"». Это, однако, не романтический взгляд на мир; «Бытие для Платона — это *Единое* только на словах, на самом деле оно "разорвано на эпизоды как плохая трагедия"» (Frank. Die Philosophie von Jaspers. S. 113).

70 Например: «Новое видение реальности… основывается на осознании того, что все феномены — физические, биологические, психические, общественные и культурные — принципиально связаны друг с другом и зависят друг от друга» (Capra. Wendezeit. S. 293).

71 Heitler. Wahrheit und Richtigkeit in den exakten Wissenschaften. S. 20.

но эти взгляды впоследствии были забыты и под воздействием современной науки полностью исчезли»[72].

Блестящим примером ученого, не признававшего этот «узкий забор», являлся И. Ньютон. Многим известно его усердие в области богословия и алхимии, но важно, что при этом он не рассматривал эти сферы отдельно от физики. В своей главной научной работе «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» он подробно говорит о Боге, о божественных свойствах и об отношении Бога к миру, не считая эти пояснения «метафизическими дополнениями», — они необходимы для целесообразного научного представления о мире. Поэтому Ньютон утверждал, что «все сказанное здесь о Боге... принадлежит физику»[73].

Современные физики обычно не говорят о Боге прямо, но для многих из них неизбежным оказывается холистический взгляд на мир. Карл Фридрих фон Вайцзеккер, к примеру, пишет об этом следующее: «Атом водорода — это целое. На самом деле этот атом не "составлен из протона и электрона"; мы лишь можем относительно легко разбить его на части таким образом, что останутся протон и электрон. Кристалл льда также не составлен строго из молекул воды; его только можно разобрать на них. И мир не составлен из объектов; лишь конечный разум человека может разъять Целое, к которому он и сам принадлежит, на объекты, чтобы легче ориентироваться в них»[74]. Так и Арнольд Бенц, профессор астрофизики знаменитого Швейцарского технического университета Цюриха, пишет: «Для появления людей необходимы звезды, которые образуются только в галактиках. Невозможно представить бытие человечества изолированно. Длинная предыстория всего мира предшествовала его зарождению в Африке. Но ведь и у

---

72 Heitler. Der Mensch und die naturwissenschaftliche Erkenntnis. S. 96. Ср. также: «Каждую вещь, если нашим высказываниям надлежит быть правдивыми, нужно охватывать в ее целостности, и никогда по частям» (Heitler. Schöpfung — Die Öffnung der Naturwissenschaft zum Göttlichen. S. 21).

73 Newton. Die mathematischen Prinzipien der Physik. S. 515 (Buch 3. Allgemeines Scholion).

74 Weizsäcker. Geist und Natur. S. 25–26. (Курсив мой.)

Земли есть предыстория. Как минимум была нужна одна галактика, и должны были пройти миллиарды лет. Галактики возникают в скоплении галактик, которые появились в космической плотности газа благодаря колебаниям вскоре после Большого Взрыва. Вся Вселенная была необходима для того, чтобы сделать возможным наше существование, и мы — часть этого космического развития»[75].

Платон, как и только что упомянутые физики, конечно же, не оспаривал материальную сторону явлений; однако в X книге «Законов» он подробно показал, что *первоначально* не физическое, а «душа» и все, что ей родственно: «мнение, забота, ум, искусство и закон»[76], а также «нравственные свойства, желания, умозаключения, истинные мнения, заботы и память»[77], т. е. всеобъемлющие идеальные условия; физическое же выводится из этого. Ева Сакс напоминает о фрагменте из «Филеба» 30a[78]: «Здесь ставится вопрос, откуда у нас есть наш νοῦς? и дается ответ: мы получили его из "космоса". Космос упорядочен в соответствии с законом. Мы — части целого; если мы стремимся к разуму и законности в мышлении, а также в наших действиях*, то эта жажда лежит в

---

75 Benz. Schöpfungserfahrungen in einem sich entwickelnden Universum. S. 41. Правда, необходимо избегать сверхинтерпретации физических результатов; квантовая телепортация, например, не позволяет заявить, что «все в космосе сообщается друг с другом», — эзотерики часто идут слишком далеко в толковании и применении подобных результатов. Но можно сформулировать хотя бы так: «Уравнения и постоянные свидетельствуют о внутреннем единстве Вселенной. Это единство указывает на внутреннюю связь, а не на явно очевидный план. Состав этой Вселенной, по сути, однороден. Также и мы — часть этого поразительно единого целого. Элементарные частицы в нашем организме следуют космическим законам и константам. Мы включены в Единство Вселенной» (Benz. Das geschenkte Universum. S. 144).

76 Законы. 892b.

77 Законы. 896c.

78 *Сократ:* Не скажем ли мы, что в нашем теле есть душа? — *Протарх:* Ясно, что скажем. — *Сократ:* Откуда же, дорогой Протарх, оно взяло бы ее, если бы тело Вселенной не было одушевлено, заключая в себе то же самое, что содержится в нашем теле, но, сверх того, во всех отношениях более прекрасное?

нашей душе, так как она — часть вселенной и управляется теми же законами, что и космос»[79].

«Итак, — читаем мы в "Законах", — душа правит всем, что есть на небе, на земле и на море, с помощью своих собственных движений, названия которым следующие: желание, усмотрение, забота, совет, правильное и ложное мнение, радость и страдание, отвага и страх, любовь и ненависть. Правит она и с помощью всех родственных этим и первоначальных движений, которые в свою очередь вызывают вторичные движения тел и ведут все к росту либо к уничтожению, к слиянию либо к расщеплению и к сопровождающему все это теплу и холоду, тяжести и легкости, жесткости и мягкости, белизне или черному цвету, к кислоте или сладости»[80].

Это воззрение по сути своей очень «современно» с точки зрения не только физики, но и биологии: Адольф Портман, например, определенно указывал на важность «формы», «плана», — т. е. на всеобъемлющую, нематериальную идею оформления — для образования живого организма[81]. А Ханс Вернер Ингенсьеп излагает очень

---

[79] Sachs. Die fünf platonischen Körper. S. 192–193. В примечании (*) Сакс подчеркивает, что законы этики также совпадают с законами космоса, и Платон подчеркивал это уже в «Горгии» (508a).

[80] Законы. 896e–897a.

[81] См., напр.: Portmann. An den Grenzen des Wissens. Холистические взгляды можно, разумеется, найти и в других областях; музыковед Хаазе, например, ссылается на древнегреческое «гармоническое» понимание мира, и пишет: «Это именно то знание, которое вновь обретается гармоническим исследованием — знание о существующей до сих пор и неизменной гармоничности мира, которая доступна нам с помощью правильного понимания результатов научных исследований» (Haase. Der messbare Einklang. S. 117). Следует также упомянуть такого спорного, но во многом интересного мыслителя, как Рудольф Штайнер, который не раз указывал на решающее влияние (или даже руководство) «высших сил», например: «Силы природы — это то, что побуждает растения расти, животных развиваться, дает человеку возможность жить, это те силы вокруг нас, которые мы называем светом, теплом, электричеством, магнетизмом и так далее, сила нервов, сила крови, сила творчества — называйте это как хотите — это не просто не-духовные силы... Эти стихии — внешнее

интересную историю философских представлений о душе у растений: у Платона растения имеют желающую и чувствующую душу, подобно животным и людям, но уже Аристотель оспаривал это убеждение, и у стоиков растения полностью лишены души. Однако нам пора вернуться к Платону...[82]

Добавим еще один пример из сферы математики. Кантор настаивал на том, что мир трансфинитных чисел — это не случайная совокупность, а *организм*, нечто «целое», хотя и не полностью доступное для нас. Он пишет так: «*Трансфинитное,* со всем изобилием его форм и образов, необходимо указывает на *абсолютное*, на "истинное бесконечное", величина которого не доступна ни увеличению, ни уменьшению, и которое в количественном отношении нужно рассматривать как *абсолютный* максимум. Последнее в известной степени превосходит человеческое разумение и не доступно, в частности, математическому определению. Наоборот, *трансфинитное* не только заполняет обширную область возможного в познании бога, но и предоставляет богатое непрерывно растущее поприще для идеального исследования и, по моему мнению, оно до некоторой степени и в различных отношениях к действительности и существованию реализуется также и в сотворенном мире, чтобы выразить величие творца по его свободному волеизъявлению ярче, чем это могло бы произойти в просто "конечном мире". Но этому убеждению еще придется долго ждать до всеобщего признания, в особенности со стороны *теологов*,

---

выражение духовных сущностей... Так же как в кукольном театре фигурами управляет актер, так за стихиями стоят духовные существа. Плохо, когда из-за материалистических суеверий видят только марионеток и не осознают, что за ними стоят духовные существа» (Steiner. Mythen und Sagen. S. 34–35). «Все результаты, успехи и действия в физическом мире исходят из духовных миров» (Ibid. S. 129). «Ничто в мире не является только материей... в действительности вся материя — это выражение духовности, выражение действенности Бога» (Ibid. S. 187).

82 Ingensiep. Geschichte der Pflanzenseele. Хороший обзор современных холистических исследований в биологии (с библиографией) предлагается в работе: Florianne Koechlin. Pflanzen-Palaver.

сколь ни полезным оно могло бы оказаться для успехов защищаемого ими дела (религии)»[83].

г) Философия

Отношение философов к математике, как мы уже определили, противоречиво, и достаточно часто это — отторжение. По Бретшнейдеру, эту ситуацию можно наблюдать уже у древних философов, и он дает этому такое обоснование: «Чем больше геометрия становилась строго сформулированной наукой, и чем более необходимым оказывалось *основательно* изучать ее, чтобы быть в состоянии участвовать в разговоре о ней, тем больше она начинала вызывать антипатию у тех, кто считает себя призванным поделиться своим мнением обо всем, в том числе о том, чего они не понимают. Тупое пренебрежение, с которым и в наши дни некоторые из так называемых гуманитариев свысока смотрят на точные науки, начинало проявляться уже тогда. Не только софисты и демагоги, но и *Сократ* не был заинтересован в серьезных занятиях этими вещами. Математикой, астрономией и тому подобным, утверждал он[84], можно заниматься только ради самих необходимых потребностей практической жизни; любое более глубокое проникновение в эти науки является бесполезным или даже вредным. Одна из самых больших заслуг его ученика, Платона, состоит в том, что он своим примером и своим учением вытеснил это мещанское воззрение на задний план и на столетия сделал бесспорным правилом, что по-научному образованный человек, философ, должен быть прежде всего хорошо осведомлен в математике»[85].

---

83 Кантор. Труды по теории множеств. С. 292–293.

84 Примеч. Бретшнейдера: «*Ксенофонт* подробно излагает представления Сократа о бесполезности и ненужности точных исследований (Воспоминания о Сократе. IV, 7). Отсюда Диоген Лаэртский (II, 5, 16) перенял изречение: ἔφασκέ τε δεῖν γεωμετρεῖν, μέχρι ἄν τις μέτρῳ δύνηται γῆν τε παραλαβεῖν καὶ παραδοῦναι. “Геометрией, скажет он, следует заниматься только для того, чтобы быть в состоянии отмерить кусок земли или измерить себя”».

85 Bretschneider. Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. S. 136.

Приведем сначала конкретный пример того, как Платон применял математику в философских рассуждениях. Мы уже обсуждали знаменитый отрывок, где Теэтет рассказывает о достижениях Теодора, касающихся иррациональных отношений[86]. Бернет подробно доказал[87], что этот текст, несомненно, служит свидетельством замечательных математических достижений (и также показывает знания Платона в этой сфере), но в *контексте* диалога этот математический экскурс имеет «драматическую функцию»[88]: он является ярким примером *математических* поисков ответа на *философский* вопрос «Что есть знание?». И Сократ поощряет Теэтета к использованию методов и опыта, взятых из математики, также и в этой новой сфере, как бы говоря: «Возьми на себя смелость и постарайся добраться до смысла самого знания!»[89] Математика как образец целесообразного хода мышления полезна и в философских исследованиях![90]

Но в сфере философского и теологического мышления «математический оттенок» философии Платона является значимым и по другой причине. Напомним, что Платон ценил в математике мощь самостоятельного и неоспоримого способа мыслить, освобождающего от непонятных и больше ненужных традиций, т. е. он уповал на *просветительскую роль математики.* «Если сегодня собственным разумом можно доказать нечто так, что даже Бог не сможет пошатнуть это доказательство, то как могут столетия культурной традиции до сих пор производить на нас впечатление?»[91] В истории философии этот «дух свободы», это убеждение

---

86 Теэтет 147d–148b. См. также параграф 2.10 наст. изд.

87 Burnyeat. The philosophical sense of Theaetetus' mathematics. P. 489–513.

88 Ibid. P. 512.

89 Ср.: Теэтет. 148d.

90 «Интерес и значение этих усилий мальчика заключаются в сформулированных им общих условиях несоизмеримости. Именно это, и только это, Сократ впоследствии сделает для Теэтета моделью, которой нужно следовать при ответе на вопрос "Что такое знание?"» (Burnyeat. Op. cit. P. 502).

91 Froese. Pythagoras & Co. — Griechische Mathematik vor Euklid. S. 4.

в силе и надежности самостоятельного и тщательного мышления иногда затихали, но никогда не исчезали полностью. Всегда были блестящие мыслители, которые, уподобляясь Платону или прямо следуя за ним, занимались математикой для очищения ума или для выражения чего-то, что без помощи математики выразить нелегко. Это касается в первую очередь непосредственных наследников Платона. «Платоники действительно усердно занимались τὰ μαθήματα: Спевсипп первым стал усматривать в математических науках общее и, насколько это возможно, связывать их воедино, ему принадлежат сочинения Μαθηματιτκός и Περὶ τῶν Πυθαγορείων; Ксенократ написал Περὶ τὰ μαθήματα в шести книгах, Περὶ γεωμετρῶν в пяти книгах, Περὶ ἀριθμῶν, Ἀριθμῶν θεωρία, Περὶ ἀστρολογίας, Περὶ γεωμετρίας»[92].

Блестящим примером здесь может также служить неоплатоник Прокл, который написал подробный комментарий к первой книге «Начал» Евклида, определив при этом принципиальные обсуждения сущности математики.

Непосредственные наследники Платона также ссылались на него и на его «математически окрашенную» философию. Августин использует авторитет Платона, применяя арифметику в своих рассуждениях о неограниченных возможностях Бога. Он пишет: «Всем известно, что числа бесконечны, потому что какое бы число ты ни признал их завершением, оно не только может увеличиться через прибавление другого числа, но как бы велико ни было и какое бы большое количество ни обнимало в самом счете и в науке счисления, не только может удваиваться, но даже умножаться. Но всякое число ограничивается своими свойствами, и никакое из них не может быть равным какому-либо другому. Таким образом, они не равны одно другому и различны, каждое из них в отдельности конечно, но все вместе — бесконечны. Итак, неужели Бог не знает

---

[92] Жмудь. Наука, философия и религия в раннем пифагореизме. С. 324. Математические интересы Спевсиппа и Ксенократа описывала Мочалова: Метафизика ранней академии и проблемы творческого наследия Платона и Аристотеля. С. 263.

всех чисел вследствие их бесконечности и неужели ведение Божие простирается лишь на некоторую сумму, а остальные числа не знает? Кто, даже из самых безрассудных людей, скажет это? Но не решатся презирать числа и признавать их не подлежащими божественному ведению те, для которых имеет значение авторитет *Платона*, внушающего, что Бог на основании чисел сотворил мир... Итак, мы не должны сомневаться в том, что Ему известно всякое число»[93].

Математически окрашенное мышление, конечно же, может существовать и без прямых ссылок на Платона. В Средние века Николай Кузанский вспомнил о высказывании Боэция, что тот, у кого нет практики в области математики, не может заниматься вопросами о божественном на научном уровне. Сам Кузанский в трактате «Об ученом незнании» не только использовал заголовки вроде «О том, что математика лучше всего помогает нам в понимании разнообразных божественных истин» или «Как мы намерены пользоваться математическими знаками»[94], но и часто приводил различные математические соображения.

Интересна и следующая история. 4 июля 1867 г. знаменитый математик Куммер прочитал торжественную речь на празднике в честь Лейбница в Прусской академии наук в Берлине. Из этой речи видно, что точка зрения Платона на сущность математической истины была вполне жива и в XIX столетии. Куммер упоминает о ряде Лейбница

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$$

и говорит по этому поводу следующее: «В первой публикации Лейбниц добавил к окончательному результату, который содержал бесконечный ряд нечетных чисел как отдельных звеньев, следующие слова: *numero deus impari gaudet!* Бог радуется нечетным числам! Мы видим в этом выражении прежде всего, что сам Лейбниц посмотрел на этот новый бесконечный ряд, в его простой и

---

93 Августин Блаженный. О граде Божием. XII, 18.

94 Николай Кузанский. Об ученом незнании. I, 11–12.

при этом бесконечно разнообразной форме, с удивлением и изумлением, и что этот ряд подействовал на него подобно тому, как действует на человека вид бескрайнего моря или великолепной горной местности. Каждый математик может вспомнить подобные ощущения, поскольку в царстве математического господствует своеобразная красота, которая схожа не только с красотой художественного произведения, но и, даже более, с красотой природы, и которая воздействует на вдумчивого человека подобным же образом, как они. Но то, что Лейбниц восклицает: "*Бог* радуется нечетным числам", — это имеет еще более глубокий смысл, так как здесь выражено осознание того, что царство математического с его бесконечно разнообразным содержанием — это не какая-то "халтура", а творение Бога, которое проявляется для нас объективно, как и видимая природа»[95].

Безусловно, есть большая разница между тем, как пользуются математикой Августин и Николай Кузанский, с одной стороны, и Лейбниц — с другой. Первые двое *используют* математические пассажи для иллюстрации своего учения, а Лейбниц восхищается *самой математикой* — на основании глубоких математических исследований. У Платона мы находим и то и другое. Он также использует математику для иллюстраций, но в то же время требует и большего. По его мнению, философ не может довольствоваться неполным математическим знанием: «Те, кого мы воспитываем, пусть даже не пытаются изучать что-нибудь несовершенное...»[96] Правда, мы точно не знаем, какую роль Платон отводил урокам математики в системе образования детей, подростков и взрослых в своей Академии[97], но «Государство» (539–540) и VII книга

---

[95] Цит. по: Meschkowski. Probleme des Unendlichen. S. 58–59.

[96] Государство. 530e. См. также: Законы. 820c — «Необходимо иметь их [соизмеримость и несоизмеримость] в виду *и различать*, иначе человек будет совсем никчемным».

[97] «О том, какую математику изучали в античных школах, мы знаем, по сути дела, очень мало» (Щетников. Введение к главе «Теон Смирнский» // Пифагорейская традиция. С. 418). И если спросят отдельно, «как выглядели учебные программы и программы исследований в академии

«Законов» явно показывают важность этой дисциплины[98]. «Неизвестно, — пишет Жмудь, — насколько было распространено преподавание математических дисциплин в пифагорейской школе. Но даже если оно затрагивало лишь небольшое число учеников, в условиях крайней малочисленности как научных сочинений, так и самих ученых это имело далеко идущие последствия. Постоянные занятия математикой позволяли накапливать и сохранять новые знания, а вместе с тем приобщать к ней именно в том возрасте, который благоприятен и для изучения, и для самостоятельного творчества. Эта традиция, поддержанная впоследствии софистами и закрепленная авторитетом Платона, пережила и Античность, и Средневековье, она сохраняет свою ценность и в наши дни»[99].

Платона, то мы будем вынуждены признаться, что не знаем этого», хотя диалоги Платона демонстрируют устный характер поиска истины в диалоге обучающих и обучающихся, «и мы можем надеяться, что учебные программы академии отражаются в диалогах» (Müller. Platons Akademiegründung. S. 61–62). То, что можно вообще сказать о жизни в Академии, описывается в работах: Cherniss. The Riddle of the Early Academy. P. 69–70; Мочалова. Метафизика ранней академии и проблемы творческого наследия Платона и Аристотеля. С. 249.

98 При этом Платон реалист, он понимает, что невозможно требовать длительного и тщательного математического обучения для всех, но обязательным должно быть хотя бы «школьное знание»; см.: Законы. 809c — «Грамоте же прежде всего, затем игре на кифаре и счету по крайней мере, поскольку они применяются в ратном деле, домоводстве и в государственном управлении, как мы сказали, следует обучаться каждому, а кроме того, получать полезные сведения о божественных круговоротах — звезд, Солнца и Луны».

99 Жмудь. Наука, философия и религия в раннем пифагореизме. С. 200–201.

Глава 6.
Послесловие от автора

«Точка зрения Платона определенна и необходима, но на ней *нельзя остановиться*...»[100] — откликнемся в какой-то мере на этот призыв Гегеля. Действительно, в ходе наших рассуждений не раз было показано, что взгляды Платона интересны и важны не только с исторической точки зрения, но содержат, либо непосредственно, либо в актуализированной форме, импульсы и вопросы, заслуживающие дальнейшего обсуждения. Помимо конкретных тем, интересных для математиков и философов, можно поставить и такой вопрос: что посоветовал бы Платон, с одной стороны, современному философу, а с другой — математику?

Чтобы нарисованная нами картина не была слишком односторонней, упомянем для начала, что у Платона воспитание и обучение включали не только математику и философию, но весьма широкий ряд предметов; стражей, например, нужно обучать не только военному делу, но и «упражнять в гимнастических, мусических и прочих науках, которые им приличествуют»[101]. Наверное, Платон и сегодня говорил бы о необходимости спортивных упражнений для философов...

Далее, надо иметь в виду, что «философ» тогда и сегодня — это несколько разные вещи. Для Платона философ — это государственный деятель высокого ранга. Если в «Тимее» (17d) Платон говорит о различных природах, задачах и занятиях («Каждый будет иметь сообразно своей природе подходящий лишь ему род занятий»), это значит, что не каждый человек должен (и не каждый способен) серьезно заниматься математикой, но для *философов* это обязательно, так как *они* не справятся с требованиями, налагаемыми их

---

100 Гегель. Лекции по истории философии. С. 130. (Курсив мой.)

101 Тимей. 18а.

должностью без математических знаний и опыта. Сегодня ситуация другая: для нас философ — это «профессор университета», который может успешно работать, мыслить и публиковать свои труды, не прибегая к математике. Поэтому требования Платона не могут быть полностью и буквально применены к нынешним философам. Все же мы считаем, что и для них Платон потребовал бы тщательного и длительного математического образования в какой-то форме.

Наконец вспомним, что Платон не был математиком и не стремился им стать. Он интересовался философскими, нравственными, государственными вопросами. В нашей работе это видно из того, что из всего корпуса платоновских произведений мы процитировали ровно 2,5 %, в которые вошли все фрагменты, определяющие отношения между математикой и философией, а также описывающие роль мистики и т. д. Отрывки, непосредственно посвященные математике, составляют не больше 1 %. Платон — это в первую очередь *философ* и *моралист*, который стремится познавать сам, а затем обучать других тому, что действительно полезно как для отдельного человека, так и для общества. Он не заинтересован в истине, отделенной от практической жизни, от ее требований, борьбы, страданий. Он не стремится целенаправленно к математическим знаниям ради них самих и не пытается подражать математике там, где она вырабатывает свои данные в одиночку (такие данные для Платона — не более чем первая ступень). Жизненно важное познание происходит только в процессе живого общения; Эрих Франк удачно назвал платоновскую форму философствования «Symphilosophieren» и подчеркивал, что «философия как результат опытного общения является невозможной в отрыве от существования самого философствующего и от существования другого, в борьбе с правдой которого она себя осуществляет»[102]. И здесь лежит, можно добавить, самая глубокая причина того, что труды Платона написаны в форме *диалогов* с частично открытым финалом — форма совсем иная, чем в математике.

---

[102] Frank. Die Philosophie von Jaspers. S. 116.

Если все это так, то для Платона требование иметь математическую подготовку вряд ли означает, что каждый будущий философ должен сначала закончить математический факультет. Это невозможно уже из-за того, что сам Платон — на это указал Мюллер[103] — говорил о *различных природных предрасположенностях учеников*[104]. Мордухай-Болтовской поясняет этот пункт подробнее: «Мы слишком далеки от мнения Платона, начертавшего при входе в свою Академию слова: "Ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω". Если бы в душе самого хозяина Академии не уживался рядом с геометром еще поэт, который контрабандой, вопреки вывеске, вошел в Академию, то мы не имели бы платоновской философии. Но этот случай уживания в одной душе геометра и поэта, создающего двойственность души, случай очень редкий, явление вроде двойственности сознания. Обыкновенно звук каждой из этих струн души заглушает другую»[105]. Надо быть реалистом: многие гуманитарии чувствуют то же, что и один интервьюер, который после разговора со знаменитым математиком заметил, что «жизнь математиков — это какая-то другая реальность. Они своего рода инопланетяне»[106]. Более

---

[103] Müller. Platons Akademiegründung. S. 63.

[104] Государство. 415а–с: «Хотя все члены государства братья... но бог, вылепивший вас, в тех из вас, кто способен править, примешал при рождении золота, и поэтому они наиболее ценны, в помощников их — серебра, железа же и меди — в земледельцев и разных ремесленников. Вы все родственны, по большей частью рождаете себе подобных, хотя все же бывает, что от золота родится серебряное потомство, а от серебра — золотое; то же и в остальных случаях. От правителей бог требует прежде всего и преимущественно, чтобы именно здесь они оказались доблестными стражами и ничто так усиленно не оберегали, как свое потомство, наблюдая, что за примесь имеется в душе их детей, и, если ребенок родится с примесью меди или железа, они никоим образом не должны иметь к нему жалости, но поступать так, как того заслуживают его природные задатки, то есть включать его в число ремесленников или земледельцев; если же родится кто-нибудь с примесью золота или серебра, это надо ценить и с почетом переводить его в стражи или в помощники».

[105] Мордухай-Болтовской. Философия — Психология — Математика. С. 107.

[106] Иванова-Гладильщикова. Заниматься математикой — это в некотором смысле воспевать жизнь. Русский Журнал. 18.04.2013.

того, среди самих математиков можно обнаружить различные типы личности; например, Перязев определил 16 таких типов и приводил по этому поводу слова Пуанкаре: «Если часто об одних говорят, что они аналитики, а других называют геометрами, то это не мешает тому, что первые остаются аналитиками, даже когда занимаются вопросами геометрии. В то время как другие являются геометрами, даже если занимаются чистым анализом. Сама природа их ума делает их "логиками" или "интуитивистами", и они не могут переродиться, когда принимаются за новую тему»[107]. Вывод Перязева таков: «В результате по типу математического мышления учащемуся будут даваться рекомендации по составлению индивидуальной программы его математического образования. Все последующие модули электронных учебных материалов необходимо разрабатывать в альтернативном виде: несколько вариантов, ориентированных на определенные типы математического мышления»[108]. И наконец, такая мысль: в древнем сказании, переданном Критием[109], говорится, что разумнейшие люди рождаются благодаря воздействию *мягкого климата*, но не все мы можем переехать в Грецию…

И все же убеждение Платона, что занятия математикой хотя бы *в какой-то мере* полезны или даже необходимы каждому образованному человеку, особенно философу, остается в силе и в наши дни. Это то убеждение, которое немецкий математик, физик и философ Иоахим Юнгиус выразил в 1629 г. в своем обращении ректора под заголовком «О пропедевтической пользе математики для изучения философии». Там он объяснял: «Тот, кто начал изучение философии правильным образом, имеет лучшие предпосылки к успешному его завершению; и про всю философию превосходнее всех скажет тот, кто скажет о точном определении ее основ»[110]. Нельзя, по его мнению, сначала отягощать изучение

---

107 Перязев. О специализации в математическом образовании. С. 255.

108 Там же. С. 257.

109 Тимей. 24с.

110 Jungius. Über den propädeutischen Nutzen der Mathematik für das Studium der Philosophie. S. 98.

философии спорными философскими проблемами, которые только запутывают студента и показывают ему мир, полный противоречий; скорее студенты должны изучать чистую математику и, в частности, геометрию, чтобы привыкнуть к ясному мышлению, к отчетливым аргументам и доказательствам. Если начинающий философ глубоко воспримет это базовое обучение, то сможет идти дальше, к следующим, более «высоким» наукам, и «тогда он сможет снова и снова оглядываться назад, на занятия геометрией как на образец и, насколько это возможно, воспроизводить его ясную прозрачность и основательную надежность; он в состоянии отличить поддающиеся проверке обоснования от аподиктических и располагать теоремы в надлежащей последовательности, логично выводя более поздние из более ранних»[111].

Математик Рихард Курант подчеркивал еще одну значительную пользу от математических занятий в рамках гуманитарных наук. В докладе, сделанном на собрании немецких филологов и школьных преподавателей, он сказал: «Даже если современный математик-исследователь, ввиду процветания научной жизни, не боится за судьбу математики как науки, он все же должен осознавать, что эта наука, как элемент образования и воспитания, всецело нуждается в защите и поручительстве. И если меня спросят, в чем заключается значение математического образования, я приведу слова Канта: она должна обращать взгляд молодого человека на нравственный закон внутри него и на звездное небо над ним. В указании на это *второе* направление взгляда и заключается важная воспитательная роль, которая значит в математических и естественно-научных учебных предметах гораздо больше, чем их формальные элементы или практическая польза. Если точным наукам оставить недостаточно места в школе, то вырастает поколение, которое в преувеличенном культе изнеженной личности забывает, что личность — это только тогда наивысшее счастье человека, когда она может подчиняться объективному, внеличному»[112].

---

[111] Jungius. Op. cit. S. 108.

[112] Courant. Über die allgemeine Bedeutung des mathematischen Denkens. S. 94.

Стоит обратить внимание и на актуальные рассуждения А. И. Щетникова, который сравнил преподавание математики в античной и в современной школе, и нашел в античном образце нечто очень важное и требующее сохранения. Он писал: «С утверждением М. В. Ломоносова "Математику следует учить уже хотя бы потому, что она ум в порядок приводит" согласились бы учителя обеих культурных традиций. Но само упорядочивание ума здесь и там осмыслялось по-разному. В школе Нового времени к математике относятся прежде всего как к гимнастике ума. Учащимся прививается методичность и безошибочность, а соответствие заданным требованиям проверяется на экзаменах. Кроме того, математику оценивают по ее прикладной полезности в науке, технике и финансовых расчетах. Совсем иным был взгляд на назначение математики в Античности. Конечно, умение считать, измерять и вычислять и тогда ценилось в меру его практической полезности. Однако со времен пифагорейцев и Платона математическим наукам приписывалось гораздо более высокое предназначение — быть средством для *очищения ума*. Как говорит Сократ в диалоге Платона "Государство", "в этих науках очищается и вновь оживает взор души каждого человека, который другие занятия губят и делают слепым, а между тем сохранить его в целости более важно, чем иметь тысячу телесных очей, ведь только при его помощи можно увидеть истину"»[113].

Многократную пользу серьезных математических занятий можно кратко описать следующим образом:

1) они тренируют ум,
2) они приучают к тщательному логическому мышлению,
3) и с их помощью мы познаем как наши личные мотивы и предубеждения (лежащие в области разума), так и наши надежды, страхи и стратегии выживания (лежащие в области эмоций).

---

[113] Щетников. Введение к главе «Теон Смирнский» // Пифагорейская традиция. С. 419–420.

Все это вместе помогает нам на пути «вверх», где мы способны «соблюдать *справедливость вместе с разумностью*»[114].

Сразу скажем, что, разумеется, серьезное обучение математике философов (и других гуманитариев) нуждается в продуманной методике, искусном выборе тем и в подходящих пособиях, иначе студенты испытают лишь *horror mathematici*. При этом мы не можем просто воспроизводить то, чем занимался Платон. Книга Теона Смирнского[115], например, интересна тем, что в ней мы видим стремление древних узнать свойства чисел и их соотношения, но эти исследования имеют скорее исторический интерес. Хотя вполне возможно найти такие вопросы и их решения древними, которые до сих пор представляют интерес: например, замечательные подборки Барвина[116] и Жукова[117]. Далее следует читать тезисы С. А. Березина («Зачем учить гуманитариев математике»), А. В. Дорофеева («Математика на философском факультете»), В. А. Еровенко («Надо ли студентам-философам изучать идеологию и методологию математики?»), Е. А. Зайцева («Геометрический образ числа и величины: об учебном пособии по математике для студентов-гуманитариев»), С. Р. Когаловского («Моделирование в обучении математике»), Г. В. Кондратьевой («К вопросу о строгости курса школьной математики в контексте времени, которое отводится на изучение предмета»), Н. А. Перязева («О специализации в математическом образовании»), Н. Х. Розова («Математика для философа: рабочий инструмент профессионала или бесцельная экскурсия в непонятное?») и А. И. Субботина («Субстанциальная и операциональная реальности в математических преобразованиях [педагогический аспект]»[118] — здесь в краткой форме изложены

---

114 Государство. 621c–d.

115 Изложение математических предметов, полезных при чтении Платона. Русский перевод в сборнике: Пифагорейская традиция. С. 423–533.

116 Барвин, Фрибус. Старинные задачи.

117 Жуков. Прометеева искра.

118 Все эти тезисы можно найти в сборнике «Философия математики: актуальные проблемы. Математика и реальность».

важные аспекты занятий математикой для современных гуманитариев. И наконец, в приложении к этой работе мы приведем несколько практических примеров подходящих задач. При этом важно, чтобы преподаватель выбирал те задачи, которые нравятся ему самому и которые он сможет с энтузиазмом обсудить со студентами, — тогда, возможно, искра его интереса затронет и учеников.

***

Хочется сказать несколько слов о третьем пункте: о важности осознания как наших личных мотивов и предубеждений (лежащих в области разума), так и наших надежд, страхов и стратегий выживания (лежащих в области эмоций). Мы говорили выше о мнении Платона, что математики не знают, что делать со своей «добычей»[119], — и не переживают из-за этого; они, к примеру, принимают аксиомы просто «за исходные положения и не считают нужным отдавать в них отчет ни себе, ни другим, словно это всякому и без того ясно»[120]. Эта некритическая черта проявляется еще сильнее у современных математиков. Лоренцен говорит о «философской индифферентности»[121], в которую математика попала с XIX столетия — и физика, кстати, тоже: когда квантового физика Дюра спросили, занимаются ли современные представители точных наук философией, он ответил: «Совсем немного. Философские рассмотрения часто относят к идеологии. Работа ремесленника над понятными "инженерными моделями" лучше подходит прагматичному духу времени... Сейчас ценят, прежде всего, успех в науке, а "успех" одного автора обычно означает, что его труды вдоволь цитируются коллегами и другими авторами»[122]. В противоположность такой индифферентности, свойственной математике и физике, философ неутомимо ставит вопросы, не боясь

---

119 Евтидем. 290.

120 Государство. 510c–e.

121 Lorenzen. *Wie ist Philosophie der Mathematik möglich?* S. 201.

122 Dürr, Oesterreicher. Wir erleben mehr als wir begreifen. S. 146.

упрека в «идеологии», и видит свою задачу именно в прояснении исходных (и обычно бессознательных) положений. Правда, иногда границы между задачами для философов и задачами для самих математиков расплывчаты; такие вопросы, как «что есть число?» кажутся философскими, но можно задавать их и самим математикам, ведь «откуда философ должен знать это, если этого не знают сами математики, занимающиеся числами постоянно?»[123] Но выявление предмнений[124], которые кроются *за* математическими аксиомами, правилами, понятиями и методами, — это типичная задача философа.

Занятия философскими исследованиями в сфере математики полезны для математиков, но — и это главное для Платона — имеют глубокое значение *и для самих философов*. Дело в том, что и философы часто не осознают *свои* пред-мнения и смело строят на них целые системы, будучи уверены при этом в своей правоте. Любопытно, осмелятся ли они «копнуть глубже», когда речь заходит не только о математиках, но и о них самих?

Способность и готовность к самокритичному мышлению, т. е. к вскрытию и осознанию собственных, личных пред-мнений, были крайне важны для Платона, поэтому в нижеследующем тексте мы видим два раза «нам», а не «вам»:

> Прежде всего рассмотреть то, что представляется нам теперь очевидным, чтобы не сбиться с пути и не прийти легко к взаимному соглашению так, как будто нам все ясно[125].

---

123 Lorenzen. Wie ist Philosophie der Mathematik möglich? S. 194.

124 Под «предмнениями» мы понимаем весь комплекс опыта и ощущений, которые мы получили из детства, а также все ценности, традиции и представления, которые мы воспринимаем от нашего окружения. Этот комплекс образует основу, на которую опираются наши мнения, чаще всего неосознанно для нас самих. Говоря другими словами, мы лишь частично формируем наше мнение о чем-либо, исходя из независимых наблюдений и источников, в значительной же степени они предобусловлены окружающей нас культурой.

125 Софист. 242с.

Этот элемент критики и самокритики крайне важен и в сегодняшнем научном процессе. И к счастью, есть прекрасные положительные примеры. М. А. Розов писал о книге Н. Н. Лузина «Лекции об аналитических множествах и их приложениях» следующее: «Так что поразило у Лузина?.. Ощущается некоторая рефлексивная отстраненность автора от того, что он излагает. Автор не слился с этой теорией, не идентифицировался с ней, он стоит в стороне, точно скульптор, вытирая руки и критически оглядывая то, что получилось, с полным сознанием отсутствия окончательных штрихов»[126]. То, что Розов пишет о книге Лузина, чувствуется также в трудах Платона.

Все же надо согласиться, что способность к критическому мышлению, когда она нацелена на самого мыслителя, часто является очень слабой, если вообще есть. Дело в том, что, как считал Эйлер, человеческий разум находится *под влиянием извращенной воли*, и эта воля очень не любит самокритики, она направлена только на защиту и оправдание своих личных убеждений перед другими мнениями. И *здесь* лежит третья причина, почему «экскурсии» в математическую область так полезны: на основании полученного таким образом опыта философ становится более способным созерцать и исследовать *свои собственные* предмнения — т. е. ставить самокритический вопрос платоновского Сократа:

> А если вдруг наша предпосылка была *неверна*?[127]

Самокритика — это необходимая, но при этом сложная и неприятная работа (вспомним высказание Эйнштейна: «Самый сложный путь — это путь внутрь самого себя»), и здесь, повторим, *реальный опыт* исследований предмнений в сфере математики очень помогает. Если философ при занятии математикой вдруг воскликнет: «О ужас! Как я мог так сильно ошибаться!», он будет более готов к осторожности и самокритике и в своей собственной области.

---

[126] Розов. О стиле в науках. С. 22.

[127] Менон. 89с.

Кстати, последние результаты нейрофизиологических исследований проливают свет на этот непростой путь к новым взглядам и привычкам. Они показывают, что наш мозг обычно предпочитает функционировать в уже знакомом направлении — закон инерции работает и здесь! — т. е. мозг стремится к сохранению и защите уже полученного, пока не возникнут достаточно сильные новые требования. Так, Геральд Гютер, профессор нейробиологии университета Маннхейма, пишет о том, что наш мозг — это самоорганизующаяся система, которая постоянно приспосабливается к внешним условиям. «Если эти условия довольно долгое время не изменяются, остаются неизменными и те пути решения проблем, и те соединения нервных клеток в мозге, которые использовались раньше для преодоления этих требований. Если они возрастают постепенно, то ничего не происходит. Мозг продолжает работать как раньше — как компьютер, который не понимает, что он слишком медленный и что его жесткий диск слишком мал. В случае, когда мы ощущаем, что требования начинают превосходить наши способности, наш мозг включает механизм, который развивает, прокладывает и делает более эффективными те связи, которые нужны для их выполнения. А если вид этих требований *принципиально* изменяется? То сначала опять ничего не происходит — мозг продолжает работу как разумный, обучаемый компьютер, который не замечает, что он теперь выполняет ошибочную программу. Только если мы чувствуем, что ситуация изменилась *так сильно*, что мы больше не можем продвигаться вперед с прежними стратегиями, — тогда наш мозг включает механизм, который развивает связи в мозгу, проложенные для новых задач. И *тогда* нам дается возможность попробовать что-то *новое* и, если это функционирует, *переучиться*»[128]. Значит, надо надеяться, что иногда мы будем сталкиваться с достаточно мощными новыми требованиями...

При обнаружении предмнений как в математике, так и в философии необходимо рассматривать всю историю научных мнений и утверждений. Задачу философии математики можно, следовательно,

---

[128] Hüther. Biologie der Angst. S. 82. (Курсив мой.)

описать так: «Пролить свет на предварительные решения, скрытые уже в самом начале образования теорий в математике, таким образом, что она вставит эти предварительные решения в более широкий контекст истории всех наших донаучных мнений. Только на этой основе они смогут дойти до сознания, и только отсюда может возникнуть воля к изменениям»[129].

Но самокритичные философские размышления не исчерпываются открытием умопостигаемых предмнений. Дело намного сложнее. Что лежит *за* ними? Какие чувства, эмоции, истории, испытания, надежды, стремления и страхи приводят человека к решению стать, допустим, математиком-платоником, а не формалистом или интуиционистом? или стать математиком вообще? И если человек выбирает математику, чего он ищет в этой науке? Ищет ли он правду, истину, которую невозможно найти в другой науке? Может быть, но не обязательно. Гильберт считал, что лучше отказаться от поисков истины — достаточно, если построенная на аксиомах система будет *возможной*, т. е. *непротиворечивой*[130]. Кроме того, он назвал и еще одну инстанцию: «Необходим *успех* — он является наивысшей инстанцией в математике, и ему покоряется каждый»[131]. Такие высказывания указывают на определенное мировоззрение и на особый темперамент; и действительно, Бернайс сказал, что математика для Гильберта имела значение *мировоззрения*, и тот обращался к математическим проблемам как *завоеватель*, стремящийся добиться от математического мышления как можно более широких властных полномочий[132]. Отсюда психологически понятно, почему Гильберт так резко и неумолимо воевал

---

129 Lorenzen. Wie ist Philosophie der Mathematik möglich? S. 199.

130 Так Бернайс описывал позицию Гильберта. См.: Bernays. Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik. S. 11.

131 Hilbert. Über das Unendliche. S. 81. Когда Френкель писал о сторонниках такого образа мыслей, он говорил не об «успехе», а о «плодотворности», что звучит несколько симпатичнее! (Френкель, Бар-Хиллел. Основания теории множеств. С. 406)

132 Bernays. Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik. S. 94.

против Брауэра[133]: он боялся, что брауэровская программа изгнала бы математику из обширного «рая», созданного Кантором.

Обладая совсем другим характером, Герман Вейль реагировал на программу Брауэра по-другому. Действительно, сказал он, эта программа влечет за собой далеко идущие ограничения в математике, но это хорошо. В противоположность неопределенной всеобщности, к которой нас приучил за последние десятилетия существовавший до сих пор анализ, мы должны заново научиться *скромности*. «Мы хотели атаковать небо, — но лишь нагромоздили один туман на другой»[134].

Еще один взгляд, демонстрирующий другую черту характера, мы находим у Оскара Бэккера. *Страх*, сказал он, — это та движущая сила, из-за которой человек занимается математикой, но не страх перед изгнанием из канторовского рая, как у Гилберта, а экзистенциальный страх — страх смерти. В конечном счете математик стремится к овладению бесконечным с помощью конечного. И здесь обнаруживается не что иное, как попытка математика преодолеть с помощью бесконечных конструкций свою конечность, свое пребывание в руках смерти, которое — возможно, совсем бессознательно, — глубоко пугает его[135]. Интересно при этом, что здесь роль математики сходна с ролью религии. Когда Д. К. Бурлака описывает религию таким образом: «Религия — это попытка человека выйти за пределы времени как такового... это творческая попытка живого человека приобщиться к вечности, осуществляемая в границах времени»[136], то стоит лишь заменить слово «религия» на «математика», и получится высказывание в духе Беккера.

---

[133] Гильберт потребовал, например, чтобы Брауэра вычернули из списка издателей главного математического журнала «Mathematische Annalen», и добился этого, принизив при этом научную репутацию Брауэра.

[134] Weyl. Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. S. 16–17.

[135] Более детальные рассуждения можно найти в сочинениях Бэккера: Becker. Mathematische Existenz. S. 439–809; Idem. Grösse und Grenze der mathematischen Denkweise.

[136] Бурлака. Автореферат. С. 33.

Итак, мы увидели не только научные предмнения, но и экзистенциальные условия, воздействующие как на выбор математики в качестве сферы деятельности в целом, так и на выбор того или иного математического направления. Теперь можно спросить: какие черты характера побуждают человека выбрать такое направление, как математический *платонизм*? (При этом мы, конечно же, имеем в виду не поверхностный платонизм классической математики, которая не заботится о своих основах, а те взгляды на математику, в которых обнаруживаются существенные элементы платоновской философии). Мы полагаем, что имеется 5 таких существенных элементов: α) истина; β) мораль; γ) честность; δ) бесстрашие и ε) деятельность.

α) *Истина.* В математике, как говорит А. А. Ивин[137], используется три разных толкования истины, взаимно дополняющие друг друга: истина как согласованность, как средство, ведущее к успеху, и как соответствие. Мы уже приводили специфическую точку зрения Гильберта по этому поводу; добавим еще следующее его высказывание: «Если произвольно выбранные аксиомы не противоречат друг другу со всеми своими последствиями, то они правдивы, и тогда существуют определенные этими аксиомами вещи. Вот это для меня критерий истины и существования»[138]. Витгенштейн

---

[137] Ивин. Проблема истины в математике. С. 48.

[138] Гильберт в письме к Фреге, опубликованном в: Unbekannte Briefe Frege's über die Grundlagen der Geometrie und Antwortbrief Hilbert's an Frege // Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Jg. 1941. 2. Abhandlung. S. 17. «В принципе, — так описал этот взгляд Л. А. Калужнин, — свойства и отношения, сформулированные в аксиомах, *совершенно произвольны*. На них накладывается только требование непротиворечивости, т. е. невозможности вывода из них какого-либо утверждения A и его отрицания ¬A. Но, конечно, в действительности аксиомы выбираются так, чтобы они отражали какие-то существенные стороны действительности. Так сразу видно, что в аксиомах Гильберта сформулированы некоторые свойства и отношения, которые соответствуют привычному содержательному пониманию. Но — и именно это важно подчеркнуть — после того как сами отношения и встречающиеся в них понятия абстрагированы от дейст-

выразил свой взгляд таким образом: счет означает «технический прием, ежедневно применяемый в самых разных актах нашей жизни. Вот почему мы учимся считать так, как учимся: с бесконечными упражнениями, с нещадной точностью; потому-то мы неуклонно настаиваем, чтобы после слова "один" все произносили слово "два", после слова "два" — "три" и т. д. — "А тогда не оказывается ли этот счет просто неким *употреблением*; не получается ли, что такому ряду не соответствует никакая истина?" — *Истина* состоит в том, чтобы этот счет был пригоден. — "То есть, ты хочешь сказать, что «быть истинным» — значит быть употребимым (или полезным)?" — Нет, не это; а то, что о натуральном ряде чисел — так же, как и о нашем языке — не скажешь, что он истинен, можно же сказать, что он применим, и прежде всего, что он *применяется*»[139]. Для математика-платоника все эти понятия истины и существования абсолютно недостаточны.

β) *Мораль*. Здесь следует обратиться к рассуждениям Брауэра в его докладе в Вене. В нем он прямо и беззастенчиво формулирует: математика является инструментом человека, преднамеренно созданным и применяемым на службе инстинкта самосохранения и овладения окружающей средой; единственное оправдание математического мышления, говорит он, лежит в его целесообразности и пригодности для подчинения мира, включая людей[140]. Такое

вительности, в формально аксиоматическом построении теории намеренно отвлекаются от содержательного понимания, и *вопрос об истинности или очевидности аксиом уже больше не ставится*. В самой математической теории изучаются только логические следствия из аксиом, принятых в качестве посылок» (Калужнин. Что такое математическая логика? С. 140–141; курсив мой.)

[139] Витгенштейн. Замечания по основаниям математики. С. 5. Ср. также: «Поразмыслим над тем, что математическая убедительность достигается грамматическими предложениями; выражением, результатом этой убедительности служит то, что мы принимаем некое правило. Поэтому нет ничего удивительного в том, что словесное выражение результата математического доказательства ввергает нас в плутни мифотворчества» (Там же. С. 82–83).

[140] Brouwer. Mathematik, Wissenschaft und Sprache. S. 153–164.

описание совсем не соответствует убеждениям платоновского математика. Для него цель математика — уводить нас «ввысь», о чем мы уже не раз говорили.

γ) *Честность*. Вспомним, что Платон жаловался, что Парменид «рассказывает нам какую-то сказку, будто детям»[141], т. е. действует нечестно, вводит нас в заблуждение. Похожим образом философ Фейерабенд однажды отметил: «Что действительно приводит меня в замешательство в научных статьях, так это то, что в них нам рассказывают сказки»[142]. Сказки — здесь, разумеется, в отрицательном смысле слова — рассказывают, например, те ученые, которые просто слепо повторяют мнения других авторов; Ван дер Варден, после многолетних и тщательных исследований истории математики в древности, на основании собственного чтения подлинных источников, восклицал: «Сколько утверждений в книгах по истории математики списывалось из других подобных же книг без всякой критики и без изучения источников! Сколько находится в обращении побасенок, которые считаются "общепризнанными истинами"!»[143] Другой пример приводит Куайн: он исследовал книгу «Symbolic Logic» Льюиса Кэрролла, математика и знаменитого сказочника, и пришел к выводу, что тот совсем не честно приводит мнение своих оппонентов и «подает детям прискорбный пример интеллектуальной недобросовестности»[144]. Еще одну форму «сказок» мы видим там, где речь красива, а содержание скудно: «Иногда, особенно в философии, стиль явно берет верх над содержанием, что приводит к набору красивых и якобы значимых фраз, в которые читатель тщетно пытается вложить доступное ему содержание и поэтому поражается их глубокомыслию»[145]. Значит, такой автор нечестен, он подтасовывает и создает то, что при

---

[141] Софист. 242c.

[142] Feyerabend. Die Torheit der Philosophen. S. 17.

[143] Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. С. 12–13.

[144] Van Orman Quine. Theorien und Dinge. S. 172.

[145] Розов. О стиле в науках. С. 18–19.

пристальном рассмотрении оказывается миражом в научной одежде. Но сказки мы находим даже в самой математике. В книге Шпальта[146], доктора математики, одна глава называется «Современная сказка о равномерной конвергенции». В этой книге Шпальт описывает результат своих исследований как «первоклассные похороны для единого всеобъемлющего математического разума». Он взял на себя труд читать оригинальную литературу, касающуюся важных математических тем, и обнаружил, что общеупотребительные представления оказываются довольно часто результатами пропагандистской риторики и искажения истории. Например, Шпальт обозначает обычное в наше время отклонение исчисления методом конечно малых как «догматическое утверждение, которое неприемлемо, как любое другое догматическое утверждение, — и математика, кстати, содержит множество таких догм»[147]. А теперь вспомним Сократа — как реального, так и платоновского — со своим неутомимым расспрашиванием: правда ли это? Так ли это в действительности? Современный платоновский математик воспроизводит эту привычку. Хорошим примером является высказывание Джона Нэша: «Мы всегда должны проверять свои основные предположения, как в жизни, так и в науке»[148].

δ) *Бесстрашие*. В математике оно состоит в том, что отдельный мыслитель смеет идти своим путем, даже если его коллеги, как Энгельс говорил, «морщат нос и строят гримасы»[149] из-за того, что он размышляет над философскими вопросами. Образцом смелого математика-платоника мы вновь назовем Пауля Финслера (подробности см. в Приложении А). Герберт Гросс указывает в преди-

---

146 Spalt. Vom Mythos der mathematischen Vernunft.

147 Ibid. S. 339. Шпальт жестко выступает также против математического предприятия Николаса Бурбаки, называя его «Архипелагом Бурбаки» — сравнивая «интеллектуальную тюрьму», выстраиваемую в трудах этого французского коллектива, с лагерной системой, описанной в «Архипелаге ГУЛАГ».

148 Nash. Interview. S. 3.

149 Маркс, Энгельс. Сочинения. Т. 20. С. 575.

словии к сборнику «Пауль Финслер, Статьи к теории множеств»[150], что Финслер, настаивающий на «абсолютной логике» в качестве гаранта «правильного» мышления, стал на всю жизнь аутсайдером среди коллег из-за этой претензии. Все же нельзя считать его взгляд слишком простым: «Аксиоматичная теория множеств, которая относится к объективным математическим предметам, понятийно очаровывающая идея нециклических множеств, все финслеровское собрание оснований математики заслуживают подробного изучения»[151]. Так же смело, несмотря на, мягко говоря, удивление своих коллег, Финслер опубликовал книгу «О жизни после смерти»[152], в которой он, в лучших платоновских традициях, представил смесь математических и экзистенциально-философских размышлений.

ε) *Деятельность*, т. е. готовность и стремление использовать свои знания и свой талант на благо общества. Здесь снова необходимо вспомнить, что Платон, несмотря на свою склонность к математике, был в первую очередь философом и моралистом. Математика, как он понимал ее, не уводит нас от реального мира, а помогает нам лучше понимать, что приводит к благу народа[153]. Не

---

[150] Unger. Paul Finsler — Aufsätze zur Mengenlehre.

[151] Ibid. S. VII–VIII.

[152] Finsler. Vom Leben nach dem Tode. Д. Паррокья перевел эту книгу на французский: Finsler P. De la vie après la mort. Mathématiques et métaphysique. Paris: Encre Marine, 1999.

[153] То, что Платон в большей степени занимался не общественными делами напрямую, а вопросами воспитания и образования, говорит не об отвлеченности его мысли от реальной жизни, а о его стремлении обнаружить фундамент благого государства и подготовить подходящих для такого государства чиновников и лидеров. И. Н. Мочалова писала: «Возвращение Платона из первой поездки в Южную Италию в 388/387 году в Афины сделало его активным участником обсуждения проблем воспитания и образования. Придя к выводу о невозможности для порядочного человека без ущерба для своей добродетели заниматься общественными делами при существующем государственном устройстве, Платон сознательно и убежденно, как сам он об этом пишет в Седьмом письме, делает выбор в пользу занятий философией, подчеркивая, что "лишь от нее одной исходят

были преувеличением и следующие слова А. Ф. Лосева: «И биография Платона, и его произведения полны необычайной активности, практической предприимчивости и постоянного искательства во что бы то ни стало реально воплотить в жизнь свои философские принципы»[154]. Это подчеркивал и Гегель: «То, что было начато Сократом, было завершено Платоном, который признает существенным, истинно существующим лишь всеобщее, идею, добро. Своим изображением идей Платон раскрыл пред нами интеллектуальный мир, но не находящийся по ту сторону действительности, на небе, в каком-то другом месте, а действительный мир»[155]. И здесь Финслер вновь служит нам хорошим примером: в своей вышеупомянутой книге «О жизни после смерти» он установил и защитил, с помощью личного опыта и математических размышлений, тезис, что каждый человек проживает жизнь каждого другого человека, и это значит, что то, что ты делаешь сейчас другому, делаешь, на самом деле, самому себе (т. е. тогда, когда ты сам

как государственная законность, так и все, касающееся частных лиц" (Pl. Ep. VII. 326ab, ср.: Pl. Apol. 32e). Именно о пемещении интересов Платона из области политики в область образования и воспитания свидетельствует выбор места, где Платон, вероятно, вскоре после своего возвращения решает поселиться, чтобы заняться преподаванием» (Мочалова. Метафизика ранней академии и проблемы творческого наследия Платона и Аристотеля. С. 237–238).

154 Лосев. Платоновский объективный идеализм и его трагическая судьба. С. 36.

155 Гегель. Лекции по истории философии. С. 147. Ср. также с. 141: «Более всех других пользуется известностью и вместе с тем дурной славой одно место в "Государстве", в котором Платон выражает свой взгляд на значение философии, и эту известность и дурную славу указанное высказывание заслужило потому, что оно находится в полном противоречии с обычными представлениями людей. Оно более всех других привлекает внимание еще и потому, что оно касается отношения философии к государству и, следовательно, к действительности. Ибо, хотя и другие приписывают философии некоторую ценность, она все же ведь не выходит за пределы мысли отдельного человека; здесь же она пускается в рассмотрение вопросов о государственном устройстве, правительстве, действительности».

будешь этим человеком). Это, пишет Финслер, и есть то, что сказано в Библии: «...и дела их идут вслед за ними»[156]. Следовательно, остается в силе и этот девиз: «забрать с собой» мы можем то, что мы дали другим. Цель Финслера в этой книге была не только просветительской — там, где он излагал математические и астрономические результаты и размышления для простых читателей, — но и в первую очередь нравственной, и он хотел высказать эти мысли ради блага людей. Деятельность и смелость в служении добру — вот образ действий математика-платоника![157]

***

Иногда Платон позволял себе употреблять «торжественные» выражения. Позволим себе закончить эту работу такими словами одного исследователя истории математики: «Математика — это служение божественному, это предназначение и посвящение, это близость Бога и праведное упоение истиной. Горе тому, кто расценит эту взрывную силу Вселенной как дурачество, сухую болтовню или каприз ученых. Такой человек когда-нибудь будет захвачен последним отголоском этой космической власти и будет вращаться, как пожухлый лист в мусорной куче истории, если еще

---

[156] Библия. Откр. 14, 13.

[157] Можно упомянуть и других математиков платоновского направления. Леонард Эйлер, например, написал книжку, в которой защищал христианскую веру (Euler. Rettung der Göttlichen Offenbahrung wider die Einwürfe der Freygeister). В своих письмах к немецкой принцессе он обсуждал не только научные, но и философские и теологические вопросы (Эйлер. Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях). Или Курт Гедель, которого интересовала возможность доказания существования Бога (см.: Muck. Eigenschaften Gottes im Licht des Gödelschen Arguments. S. 60–86). Или Андреас Шпайзер, который не только писал статьи о философии Платона (Speiser. Platons Ideenlehre und die Mathematik) и целый комментарий на платоновский *Парменид* (Speiser. Ein Parmenideskommentar), но и занимался общественными вопросами, например в своей ректорской речи «О свободе» (Speiser. Über die Freiheit).

раньше не ослепнет из-за тупости. Разумеется, ясно, что не каждый может и должен заниматься математикой. Однако так же несомненно, что отрицание математики — это преступление по отношению к духу, по отношению к культуре и по отношению к развитию человечества»[158].

[158] Colerus. Von Pythagoras bis Hilbert. S. 275–276.

Приложение А:
Характеристики математического платонизма

Математика, которая изучается в наших школах и университетах, называется «классической». Существуют, как мы уже видели, и другие математические направления, такие как интуиционизм Брауэра или оперативная математика Лоренцена, но в наших университетах они изучаются довольно редко.

Особенность классической математики состоит в том, что ее самые важные черты основаны на мировоззрении Платона, поэтому она называется также «математическим платонизмом». То есть наша обычная классическая математика — это не что иное, как математический платонизм. Это, конечно же, не значит, что все представители классической математики являются истинными платониками. Многие из них совершенно не принимают философию Платона, они просто считают, что математический платонизм удобен и эффективен, и поэтому используют его. Они, как иронично заметил Леопольд Кронекер (мы уже цитировали это остроумное замечание), оспаривают существование пашни, но наслаждаются растущим на ней картофелем! Но есть классические математики, которые признают себя настоящими платониками и дают себе отчет о «пашне», т. е. о своих философских убеждениях. Один из них — это швейцарский математик Пауль Финслер, и его взгляды прекрасно подходят для того, чтобы изложить характеристики математического платонизма.

Финслер (1894–1970) был профессором математики университета Цюриха. Он стал знаменитым после защиты диссертации об особой форме геометрии («Финслерова геометрия»), которая в настоящее время все больше и больше применяется физиками[1]. Он

---

[1] См., например, статью Г. Ю. Богословского, доктора физ.-мат. наук: «Финслерова геометрия и теория относительности».

также занимался основаниями математики и создал неформальную теорию множеств, о которой мы будем говорить в дальнейшем. В 1926 г. он написал свою основную работу[2], в которой предугадал открытия Геделя, сделанные в 1931 г.[3]

О его личности профессор математики Герберт Гросс писал: «Финслер в одинаковой степени обладал безупречно острой логикой, вычислительными способностями и тонким юмором. Слушать его лекции было важным опытом для меня, как студента-математика... Самым ценным, что Финслер передал многим из своих учеников, были сильная вера в способности человеческого разума и недоверие по отношению к любому математическому формализму, претендующему на нечто большее, чем быть просто стенографией, в которой могут выражаться математические *мысли* и представления»[4].

Было бы интересно сравнить характер Финслера с характером Платона, — вероятно, здесь нашлись бы схожие черты, особенно учитывая слова Гросса: «Финслер был озабочен ходом всемирной истории и нашим недостаточным осознанием того, что мы сами определяем свою судьбу». Кроме того, «Финслер был проницательным философом, математическое мышление было для него естественной основой жизни. Счастье для него состояло не в поиске истины; только через нахождение истины он рассчитывал обрести счастье и свободу»[5]. Наконец, Финслер, так же как и Платон, интересовался астрономией: в 1924 г. он обнаружил свою первую комету, а в 1937 г., в Цюрихе, — вторую, названную его именем. Астрономия была его любимым занятием до самой смерти.

---

[2] Finsler. Formale Beweise und die Entscheidbarkeit. S. 676–682.

[3] Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. S. 173–198.

[4] Gross. Nachruf auf Paul Finsler. S. 19–20.

[5] Ibid.

Свои философские убеждения сам Финслер изложил в нескольких статьях[6], коротко же их можно представить в десяти пунктах:

1. Существует абсолютная истина.
2. Существует абсолютная логика.
3. Существует идеальный мир.
4. Предметы математики принадлежат идеальному миру и, следовательно, не зависят ни от времени, ни от человека.
5. Из непротиворечивости математических предметов следует их существование.
6. Существует актуально бесконечное множество чисел.
7. В математике нет антиномий.
8. Все математические проблемы в идеальном мире уже решены.
9. Формальные методы не могут заменить настоящее мышление.
10. Классическую математику можно и нужно спасать.

Эти убеждения выражают главным образом мировоззрение Платона, и Финслер, зная это, и сам называл свою точку зрения математическим платонизмом — две его статьи называются «Платоновская точка зрения в математике» и «Все же платонизм». При этом Финслер отличал «разумный платонизм» от «наивного»; наивный платонизм предполагает, что соединение множеств всегда образует новое множество, и это предположение приводит к проблемам, таким как, например, антиномия Рассела. — Кратко объясним эти десять пунктов.

---

6 *1925*: Gibt es Widersprüche in der Mathematik?; *1926*: Formale Beweise und die Entscheidbarkeit; *1926*: Über die Grundlegung der Mengenlehre I; *1927/28*: Über die Lösung von Paradoxien; *1933*: Die Existenz der Zahlenreihe und des Kontinuums; *1938*: Diskussionsvotum; *1938*: A propos de la discussion sur les fondements de mathématiques; *1943/44*: Gibt es unentscheidbare Sätze?; *1954*: Die Unendlichkeit der Zahlenreihe; *1956*: Der platonische Standpunkt in der Mathematik; *1956*: Und doch Platonismus; *1956*: Briefwechsel mit Paul Lorenzen; *1958*: Vom Leben nach dem Tode; *1963/64*: Über die Grundlegung der Mengenlehre II; *1969*: Über die Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese. Подробности см. в списке литературы.

1. Существует абсолютная истина

Бернайс выразил мнение, что финслеровская теория множеств основана на определенной философской позиции. Финслер согласился, но не расценил это суждение как возражение, так как его философские предпосылки не были взяты с потолка — скорее он считал их обязательной предпосылкой каждой науки, и математики в особенности. К этим предпосылкам принадлежит прежде всего убеждение, что можно абсолютно четко провести различие между «истинным» и «ложным». На самом деле, как сказал Финслер, эта позиция «состоит в следующем: мы знаем в принципе, что подразумевается под истинным и под ложным; а также в том, что мы требуем... чтобы ответ на любой однозначный вопрос был также однозначным. Без этого философского положения возможно, наверное, состояться в профессии, но вряд ли получится заниматься наукой»[7]. Другими словами: по Финслеру, существует абсолютная истина, «по крайней мере в математике»[8]. На ее основании мы можем не только выражать какие-то мнения, но и *объективно* различать истинное и ложное[9]. Выступая против любого релятивизма в этой сфере, Финслер однажды почти торжественно воскликнул: «Есть лишь одна наука, в которой царствует только чистая истина»[10].

---

7 Finsler. A propos de la discussion... S. 174.

8 Finsler. Vom Leben nach dem Tode. S. 32. Финслер, кажется, склонен предполагать, что существует «абсолютная истина» и вне математики. Этим вопросом задавались и многие другие мыслители, например стоит вспомнить размышления Ленина: «Существует ли объективная истина?» Там мы читаем следующее: «Если существует объективная истина (как думают материалисты), если естествознание, отражая внешний мир в "опыте" человека, одно только способно давать нам объективную истину, то всякий фидеизм отвергается безусловно. Если же объективной истины нет, истина (в том числе и научная) есть лишь организующая форма человеческого опыта, то этим самым признается основная посылка поповщины, открывается дверь для нее, очищается место для "организующих форм" религиозного опыта» (Ленин. Материализм и эмпириокритицизм. С. 127).

9 Finsler. Der platonische Standpunkt in der Mathematik. S. 252; Он же. Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 172.

10 Finsler. Gibt es Widersprüche in der Mathematik? S. 155.

То, что можно назвать эту позицию «платонической», видно из схожих выражений у Платона. «Истину вообще нельзя опровергнуть»[11]. Если нет одинаковой Истины для всех, то нет и возможности для объективной науки. «Рассматривать и пытаться взаимно опровергать наши впечатления и мнения — все это пустой и громкий вздор»[12].

2. Существует абсолютная логика

Чтобы обосновать точную науку, нужно признать, согласно Финслеру, существование абсолютной *логики*, на которую можно опираться[13] и без которой не прийти к благоразумным результатам[14]. «Логика, т. е. правильные умозаключения, должна применяться для обоснования математики. Можно, конечно, исследовать логику в деталях; однако сама по себе она должна рассматриваться как неопровержимая и не зависеть от людей и от нашего мышления. Скорее наше мышление должно руководствоваться логикой, чтобы быть "правильным". Логика так же неизменна, как числа и чистая математика; изменяться может только наше знание о ней. То, что "истинно" в условиях логичного мышления или логичного умозаключения, основывается не на соглашениях, а установлено абсолютным способом; это абсолютное отличие Истинного от Ложного. В этом смысле может существовать только *одна* логика»[15].

Вместе с логикой как таковой в абсолютном смысле надо применять и отдельные логические понятия, такие как «все», «бесконечно», «нециркульно» («zirkelfrei»), «несчетно», «система», «непротиворечиво»[16]. Их правильность и пригодность никак не

---

[11] Горгий. 473с.

[12] Теэтет. 162а.

[13] Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre I. S. 685–701.

[14] Finsler. Vom Leben nach dem Tode. S. 19.

[15] Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 178.

[16] Эти понятия появляются у Финслера в разных местах, см.: Über die Grundlegung der Mengenlehre I. S. 684–701; Über die Grundlegung der Mengenlehre

страдают от того, что есть люди, которые их не понимают или не хотят понимать[17]. Эти понятия приводят к совершенно однозначным результатам, если только мы применяем их аккуратно, т. е. если мы действуем «строго логически»[18].

Соответственно, преобразование чистой, абсолютной логики не предполагается, так как она — именно *та* логика, которой *должно* подчиняться любое мыслящее существо[19]. Лишь записанную или формализованную логику можно перестраивать; она действительно может оказаться ошибочной или слишком узкой и, следовательно, нуждающейся в исправлении[20].

Но нельзя путать «логистику» с логикой, «современную логику» с логичным мышлением![21] Формальная логика может быть только вспомогательной дисциплиной; она ни в коем случае не «острее», чем логическое мышление[22], и на самом деле на ней даже нельзя построить теорию множеств[23]. Для этого нужна *мысль*, которая возвышается, — опираясь на чистую логику, — *над* логическими формулами; нужны «содержательные» умозаключения, «содержательное» мышление[24]. Такое мышление позволяет нам находить

II. S. 213; A propos de la discussion… S. 171; Über die Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese. S. 71.

17 Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 214.

18 Finsler. Gibt es Widersprüche in der Mathematik? S. 150–153; A propos de la discussion… S. 174.

19 Finsler. Gibt es Widersprüche in der Mathematik? S. 149.

20 Ibid. S. 149.

21 Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 179: «Логическое мышление не идентично "логическим вычислениям", "формальной логике" или "логистике". Формальная логика может представлять собой не более чем одну часть логического мышления, причем всегда нужно проверять, соответствует ли она действительно требованиям логики, является она "правильной", не только с формальной точки зрения, но и по смыслу».

22 Finsler. Die Existenz der Zahlenreihe. S. 88.

23 Burckhardt. Zur Neubegründung der Mengenlehre. S. 148–149.

24 Ibid.; Finsler. Die Existenz der Zahlenreihe. S. 88; Он же. Über die Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese. S. 78. К чему это может привести,

сущности, недоступные ни опыту, ни логистике[25]; и только оно может разрешить противоречия. Применяя содержательные умозаключения, чистую логику, в математике можно охватить такие вещи, которые невозможно выразить полностью фиксируемым языком[26].

Финслера упрекали в том, что он, применяя «содержательные умозаключения», не дает доказательств, а лишь приводит «правдоподобные соображения». Финслер отвергал этот упрек и утверждал, что «о правдоподобном соображении можно говорить, когда мы думаем, что результат может быть разным; но надо говорить о доказательстве, когда этот результат не может быть понят иначе»[27]. Он хотел понимать доказуемость как можно более широко, т. е. допускать не только формальные, но и любые «идеальные» доказательства, если только они безупречны по содержанию. Ведь в противном случае всегда предполагалось бы, что предложение, которое нельзя доказать с использованием ограниченных методов,

---

если «содержательное» мышление либо исключается, либо допускается, Скулем продемонстрировал на простых примерах (см.: Skolem. The Logical Nature of Arithmetic. P. 375–384). См. также Упражнение Г9, где мы ознакомимся с примерами «содержательного мышления» или «абсолютной логики».

25 Finsler. Vom Leben nach dem Tode. S. 34.

26 Мышление, по Финслеру, не полностью зависит от зафиксированного языка. «Упомянутое выше число нельзя зафиксировать языком, но можно с помощью мысли; оно существует тем же способом, что и число 4. Этот способ мышления не ведет в тупик, так как из него можно делать выводы, конечный результат которых может быть представлен в языке. Введение мнимых чисел в анализ порождала когда-то угрызения совести, но мы учились проводить с ними вычисления, и, как это часто бывает, после "путешествие через мнимое" мы смогли получить важные и реальные результаты. Аналогично мы научились работать с вещами, которые могут быть выражены через язык в их совокупности, но не индивидуально, и все же мы сможем получить важные результаты, которые могут быть, после "путешествия через молчание", выражены языком. Математик, особенно если ему покажут путь, безусловно способен и сам пройти его часть» (Finsler. A propos de la discussion. S. 179–180).

27 Finsler. A propos de la discussion, S. 177.

«было бы доказуемо без этого ограничения, и другим способом, а именно этой ситуации и надо избежать»[28].

Ниже в пункте 9 мы вернемся к этим вопросам; сейчас же мы можем сформулировать, что логика для Финслера — это не человеческое изобретение, не результат соглашения каких-то мыслителей или продукт культурного развития, — нет, она дана нам, можно сказать, «от богов». Бывает, что мы не понимаем логику или используем ее ошибочно, но тогда проблема заключается не в логике, а в нас самих.

Такое представление о логике мы находим и у Платона. Возможность ошибочного использования логики (но это наша проблема, а не проблема логики!) отражается, к примеру, в таком самокритичном высказывании Сократа:

> Добрый мой Кратил, я и сам давно дивлюсь своей мудрости и не доверяю ей. Видимо, мне еще самому нужно разобраться в том, что я, собственно, говорю. Ибо тяжелее всего быть обманутым самим собой. Ведь тогда обманщик неотступно следует за тобой и всегда находится рядом, разве это не ужасно?[29]

Но людские недостатки не «встают на пути» у притязаний вечной логики, так же как употребление не вполне честной, «ораторской» логики:

> Милый мой, ты пытаешься опровергать меня по-ораторски, по образцу тех, кто держит речи в судах. Ведь и там одна сторона считает, что одолела другую, если в подтверждение своих слов представила многих и вдобавок почтенных свидетелей, а противник — одного какого-нибудь или же вовсе никого. Но для выяснения истины такое опровержение не дает ровно ничего[30].

---

[28] Finsler. Gibt es unentscheidbare Sätze? S. 314.

[29] Кратил. 428d.

[30] Горгий. 471e. Похоже, и даже еще хуже, действуют софисты: они применяют не настоящую логику, а искусство убеждения, обман; их искусство

3. Существует идеальный мир

Идеальный мир в смысле Платона — это, по мнению Финслера, *фундамент* математики, без которого ее бы просто не существовало. Он объяснял это на примере чисел. Натуральные числа часто пытаются представить через ряд черточек:

|, ||, |||, ||||, |||||, ||||||, |||||||, ||||||||, ...

и говорят, что мы можем продолжать этот процесс «как угодно долго». Но давайте, восклицает Финслер, нарисуем триллион черточек *и еще одну!* Конечно, это полный бред — *вы не сможете*! Но теория чисел исследует намного большие числа, поэтому нам неизбежно приходится воспринимать натуральные числа как идеальные предметы. Мы не можем записать их каждое по отдельности, но они существуют *в идеальном смысле*[31].

4. Предметы математики принадлежат идеальному миру и, следовательно, не зависят ни от времени, ни от человека

Математика — не игра. В шахматах, например, фигуры и правила придуманы *человеком*[32], но в математике речь идет скорее об абсолютных, зафиксированных истинах, которые мы можем лишь исследовать[33]. Финслер неутомимо подчеркивает, что математика охватывает объективные отношения[34], она изображает положение вещей, не зависящее от нас. Математические факты не могут быть другими, нежели они есть[35]; их особенность в том, что они не зависят от нашего мышления, а также от свойств нашего мозга[36].

только «красноречивое ораторство... льстивое угодничество» (Горгий. 502d).

31 Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 181.

32 Finsler. Die Existenz der Zahlenreihe. S. 88.

33 Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 175.

34 Finsler. Der platonische Standpunkt. S. 250.

35 Finsler. Und doch Platonismus. S. 266.

36 Ibid. S. 267.

Мы можем продвигаться в их познании, изменяя наши формулировки, однако «законы как таковые остаются»[37].

Особенно важно, что числа — это не произвольно изобретенные человеком сущности (как мог бы человек, сказал Финслер, сотворить бесконечное количество существ?[38]), они на самом деле существуют независимо от нас, мы лишь можем их исследовать[39]. Они, будучи идеальными вещами, неощутимы, но все же образуют четко определенные системы, неизменные и вечные[40], которые остаются, «безразлично, занимаемся ли мы ними или нет»[41]; поэтому для существования натурального числа *не* является необходимым, чтобы *мы* могли до него досчитать[42].

Так же, конечно, обстоит дело и с другими математическими предметами: множествами, линиями в геометрии и т. п. Все это вещи *идеальные*, существующие вне времени и никогда не изменяющиеся[43]. Это именно то, что сказал Аристотель о математических предметах у Платона: они отличаются от чувственно воспринимаемых тем, что «они вечны и неподвижны»[44].

5. Из непротиворечивости математических предметов следует их существование

Что означает «существование» в математике? Можно было бы сказать, что противоречивая вещь *никогда* не существует. Не существует рационального числа, квадрат которого был бы равен 2, и не

---

37 Finsler. Vom Leben nach dem Tode. S. 47. См. также: Über die Grundlegung der Mengenlehre I. S. 701: «Математические объекты и их свойства не должны зависеть от того ограниченного вида, в котором мы можем их представить».

38 Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 173.

39 Ibid. S. 173.

40 Ibid. S. 177.

41 Finsler. Vom Leben nach dem Tode. S. 6.

42 Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 202.

43 Ibid. S. 181.

44 Аристотель. Метафизика. A6 987b 14–17.

существует множества, элементы которого — все порядковые числительные, и только они[45]. Но *непротиворечивая вещь* существует в идеальном смысле *всегда*[46]. В чистой математике, как сказал Финслер, «существование» есть не что иное, как непротиворечивость[47]. Естествознание основано на наблюдениях, а в математике все принципиально решает *только* непротиворечивость[48].

Разумеется, мы не можем *требовать* существования идеальной вещи; если мы, например, определяем какой-то математический предмет, то это определение не гарантирует, что он действительно идеально существует, ведь наше определение могло бы содержать в себе логическое противоречие, и тогда эта вещь просто не существовала бы, и мы не смогли бы создать ее, даже приложив максимум усилий[49].

6. Существует актуально бесконечное множество чисел

Акцент здесь поставлен на «актуальность», в противоположность учению Аристотеля и следующим ему современным конструктивистским направлениям, признающим лишь потенциальную бесконечность[50].

---

[45] Finsler. Und doch Platonismus. S. 267; Burckhardt. Zur Neubegründung der Mengenlehre. S. 148.

[46] Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre I. S. 690; Der platonische Standpunkt in der Mathematik. S. 252; Briefwechsel mit Paul Lorenzen. S. 275. Буркхардт сформулировал так: «Мы считаем существующими все множества, для которых предположение их существования не ведет к противоречию ни с одной из наших трех аксиом» (Burckhardt. Op. cit. S. 148, 153).

[47] Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 179.

[48] Finsler. Und doch Platonismus. S. 266.

[49] Finsler. Die Existenz der Zahlenreihe. S. 90.

[50] По Аристотелю, математика — это продукт абстрагирования и идеализации, которые происходят в нашей душе, т. е. она является результатом деятельности человека. Таким же образом, как плотник смотрит на ствол дерева как на стройматериал и закрывает глаза на другие его качества, так и математик воспринимает каменную колонну как цилиндр, а мяч как шар.

Мы уже цитировали высказывание Кронеккера: «Господь сотворил натуральные числа; остальное — дело рук человека». Финслер соглашается с первым утверждением[51], но добавляет: вопрос о том, *сколько* натуральных чисел сотворил Господь, Он оставил для нас. Конечно ли их число, или же их бесконечно много? Финслер указал на то, что этот вопрос не так прост, как кажется. В «Пармениде» Платона дается обоснование *актуальной бесконечности* ряда чисел[52], и Финслер соглашается с этим, но, скажет он, это лишь убеждение, правоту которого надо *доказать*[53]. Такое доказательство должно объяснить, *почему* ряд натуральных чисел не ограничен. Это не нечто само по себе разумеющееся[54], так как в

А что касается отрезка, то, по Аристотелю, он не состоит из точек; точки появляются в отрезке тогда, когда человек производит деление, т. е. перед делением точки существуют только потенциально, а не актуально. (Подробное изложение этой темы см. у Беккера: Becker. Mathematische Existenz. S. 630, 683–687.)

51 Финслер не согласен с тем, что остальные числа являются «делом рук человека». В классической математике, скажет он, «реальные и комплексные числа — это также не произвольно изобретенные человеком сущности» (Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 173).

52 Парменид. 144а: «Если существует одно, то необходимо, чтобы существовало и число. Но при существовании числа должно быть многое и бесконечная множественность существующего. В самом деле, разве число не оказывается бесконечным по количеству и причастным бытию?»

53 Чтобы показать важность определения количества натуральных чисел, Финслер приводит следующий небольшой пример. В школе, сказал он, «ставят вопрос, сколько простых чисел существует, и отвечают: бесконечно много, ведь уже Евклид доказал это. Но доказательство Евклида имеет смысл только тогда, когда мы уже знаем, что существует бесконечно много натуральных чисел. Известно ли это? Нет, большинство студентов не знает, они просто думают так. Но если это неизвестно, то неизвестно, существует ли бесконечно много простых чисел — доказательство Евклида напрасно» (Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 175).

54 Дедекинд строил свою систему оперирования натуральными числами на условии, что существует бесконечно много вещей, и чтобы прояснить это условие, он рассматривал сначала себя, потом мысль о себе, потом мысль о мысли о себе, и т. д., и кажущийся бесконечным на этом пути ряд мыслей. Но на самом деле, сказал бы Финслер, это не работает. Если мы

ряду порядковых числительных существует самое большое, т. е. последнее, поэтому *этот* ряд ограничен — почему же у натуральных чисел нет такого предела?

Вопрос этот, кстати, совсем не маргинален, так как именно в нем «лежит *корень математического платонизма*, который подтверждает актуальное существование бесконечных множеств»[55]. А возможно ли предоставить настоящее математическое доказательство? Да, скажет Финслер, «найти убедительный результат, т. е. существование бесконечного количества чисел, — нелегко, но возможно»[56].

7. В математике нет антиномий

Антиномии были проблемой для целого поколения выдающихся математиков, и было предпринято много разных попыток преодолеть эти невыносимые противоречия. Но Финслер сказал, что представитель разумного платонизма знает, что здесь нет ничего сложного, надо просто «думать правильно», исследуя и исправляя свой ход мышления, как того требовал Платон. Тогда, утверждал Финслер, никаких принципиальных трудностей или противоречий не возникнет, математика явится «чистой» сферой идеального разумного мира. Если же возникают проблемы, значит, мы сами привели к ним.

действительно попробуем образовать такой ряд, то увидим, что очень скоро мы не сможем идентифицировать различные шаги, особенно если у нас нет еще ряда натуральных чисел, которыми мы могли бы посчитать эти шаги, и рано или поздно мы просто не сможем продолжить этот ряд «мысль о мысли о мысли… о себе». Ряд этих мыслей не бесконечен. (Die Unendlichkeit der Zahlenreihe. S. 29.) Разные аспекты и представления из этой сферы излагаются в сборнике: Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты. М.: Янус-К, 1997.

55 Neidhart. Unendlichkeit im Schnittpunkt von Mathematik und Theologie, 2. Band. S. 499.

56 Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 175. Доказательство Финслера находится в его статьях: Die Existenz der Zahlenreihe und des Kontinuums; Die Unendlichkeit der Zahlenreihe; более подробно в: Burckhardt. Zur Neubegründung der Mengenlehre, 1938. S. 146–165; 1939. S. 146–155.

Если я формирую, например, множество Рассела, т. е. множество всех множеств, которые не содержат самих себя, тогда, *конечно*, я провоцирую антиномию. В принципе ситуация такова же, как с антиномией лжеца; если я скажу: «Я лгу», то, *конечно*, спровоцирую противоречие[57]. Но зачем вообще образовывать такие выражения? Просто исключим их из математики, и все получится. Финслер выразился коротко: «Там, где мы не создали антиномию, она и не появляется»[58]. И следовательно: «Тот, кто еще верит в антиномии, верит в привидения»[59], он просто не продумал вопрос как следует[60].

Взгляд Финслера коротко выражается в следующей цитате: «В математике позволено все, лишь бы только не противоречить самому себе. Это единственная ошибка, которую мы можем совершить, и если мы ее избегаем, антиномии исчезают, и вся теория множеств со всеми своими мощностями, *высокими и высочайшими»* остается неизменной[61].

8. *Все математические проблемы уже решены*

По мнению Финслера, все решения математических задач и проблем пребывают в идеальном мире, независимо от того, знаем ли мы о них или нет, и узнаем ли когда-либо. «Чистая математика, — сказал он, — не зависит от нашей человеческой неполноты. Вопрос, правильно ли математическое предложение или ошибочно, не связан с тем, можем ли мы решить его или нет»[62].

Возьмем для иллюстрации теорему Ферма, т. е. утверждение, что уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет решений в целых числах a, b, c, если n больше двух. Если $n = 2$, то существуют решения в целых

---

57 См. Приложение Г10.

58 Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 179.

59 Finsler. Der platonische Standpunkt in der Mathematik. S. 250.

60 Finsler. Und doch Platonismus. S. 266.

61 Finsler. A propos de la discussion. S. 170.

62 Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 177.

числах, например $3^2 + 4^2 = 5^2$ или $5^2 + 12^2 = 13^2$, но если даны уравнения $a^3 + b^3 = c^3$, $a^4 + b^4 = c^4$ и т. д., то мы никогда найдем такие целые числа a, b, c, которые им удовлетворяют. Теорема понятна и кажется простой, но самые крупные математики долго не могли доказать или опровергнуть ее. Тем не менее математические платоники не сомневались: в идеальном математическом мире проблема уже решена: Ферма либо прав, либо не прав, просто мы пока не знаем об этом. Платон сказал бы, что решение теоремы Ферма пребывает в идеальном мире, и наши души когда-то видели это решение, но математики просто не могут это вспомнить. Любопытно, что в 1995 г. душа американского математика Эндрю Уайлса «вспомнила» и «увидела», и Уайлс смог записать и опубликовать решение теоремы Ферма. Теперь Уайлс может помочь нам «вспомнить» и узнать его, как в свое время платоновский Сократ помогал молодому рабу вспомнить вечно существующее решение задач об удвоении квадрата.

9. Формальные методы не могут заменить настоящее мышление

Финслер ценил формальные методы, но указывал, что человеческое мышление всегда выше и мощнее любого формализма. Чтобы доказать это, он приводил положение, о котором в рамках формальной системы невозможно сказать, является оно противоречивым или нет, но на пути неформального мышления возможно доказать, что оно содержит противоречие[63]. Это утверждение Финслера, как мы уже заметили, в принципе сходно с более поздней знаменитой теоремой Геделя о неполноте формальных систем, но, к сожалению, тогда на доказательство Финслера не обратили внимания.

Эти результаты Финслера и Геделя имеют глубокое значение: мышление, понятое в платоновском смысле, принципиально превышает любой формализм. Они демонстрируют, как сказал математик Абрахам Френкель, что возможности человеческого разума *принципиально превышают* возможности действий в рамках чисто логи-

---

[63] Finsler. Formale Beweise und die Entscheidbarkeit. S. 676–682. Также см. Приложение Г10.

ческих схем, как это происходит у компьютера; «благодаря упомянутым результатам мы теперь знаем... чего мы не можем ожидать от электронных вычислительных машин, так как это невозможно по принципиальным причинам»[64]. Результаты Финслера и Геделя приводят нас к выводу, что «истина всегда лежит *за пределами* правильного и неправильного»[65], и, наконец, они представляют собой отход от механистически-материалистического мировоззрения.

Углубленный взгляд на математический платонизм предлагает, наконец, статья Финслера «О независимости континуум-гипотезы»[66]. Как известно, в 1963 г. П. Коэн доказал, что континуум-гипотеза недоказуема на основании системы аксиом Цермело–Френкеля (ZFC). Этот результат считался — и считается до сих пор — большим математическим успехом: по мнению Мостовского (и, как он считает, по мнению большинства логиков и математиков), доказательства непротиворечивости и независимости общей континуум-гипотезы являются самым важным событием в математике за последние 25 лет[67]. Но Финслер не разделял его восторгов; по его мнению, результат Коэна опирается на предположение о непротиворечивости ZFC, и если мы не знаем, истинно ли это предположение, то все результаты могут быть лишь гипотетическими. И он с легким сарказмом спрашивает: «Зачем приводить такие сложные доказательства, если в итоге все же неизвестно, истинен ли результат?»[68] Эта некомфортная ситуация типична для формалистического подхода; в то время как математический платоник может коротко и ясно сказать: «Существует бесконечно много

---

[64] Fraenkel. Philosophie der Mathematik. S. 355.

[65] Weiss. Gödels Unvollständigkeitssatz... (Курсив мой.)

[66] Finsler. Über die Unabhängigkeit der Kontinnumhypothese. S. 67–78.

[67] Mostowski. Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese. S. 121.

[68] Finsler. Über die Unabhängigkeit der Kontinnumhypothese. S. 77. Интересно, что уже Платон формулировал похожий вопрос: «У кого началом служит то, чего он не знает, а заключение и середина состоят из того, что нельзя сплести воедино, может ли подобного рода несогласованность когда-либо стать знанием?» (Государство. 533c).

простых чисел», формалист вынужден выразиться так: «Можно доказать, что, если аксиомы ZFC непротиворечивы, существует бесконечно много простых чисел». И что касается континуум-гипотезы, то, по мнению Финслера, она либо истинна, либо нет, мы просто пока не знаем ответа. Да, идя формальным путем, мы не сможем доказать то или другое, но при этом возможно, что на другом пути мы найдем решение.

Интересно посмотреть, как платоновские — и не чисто формальные — взгляды Финслера конкретно воплотились в его собственной теории множеств. Представим сначала *формальную* систему аксиом множеств — систему Цермело–Френкеля, которая выглядит так:

- $\forall a_1 \forall a_2\ (\forall b\ (b \in a_1 \Leftrightarrow b \in a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)$
- $\exists a\ \forall b\ (b \notin a)$
- $\exists a\colon \big(\varnothing \in a\ \land\ \forall b\ (b \in a \Rightarrow b \cup \{b\} \in a)\big)$
- $\forall a_1 \forall a_2\ \exists c\ \forall b\ \big(b \in c \Leftrightarrow (b = a_1\ \lor\ b = a_2)\big)$
- $\forall a\ \exists d\ \forall b\ \big(b \in d \Leftrightarrow \forall c\ (c \in b \Rightarrow c \in a)\big)$
- $\forall a\ \exists d\ \forall c\ \big(c \in d \Leftrightarrow \exists b\ (b \in a\ \land\ c \in b)\big)$
- $\forall a\ \exists c\ \forall b\ \big(b \in c \Leftrightarrow b \in a\ \land\ \Phi[b]\big)$
- $\forall x\ \exists! y\ \phi[x, y] \Rightarrow \forall a\ \exists d\ \forall c\ \big(c \in d \Leftrightarrow \exists b\ (b \in a\ \land\ \phi[b, c])\big)$
- $\forall a\ \Big(a \neq \varnothing \Rightarrow \exists b\ \big(b \in a\ \land\ \forall c\ (c \in b \Rightarrow c \notin a)\big)\Big)$
- $\forall a\ \Big(a \neq \varnothing\ \land\ \forall b\ (b \in a \Rightarrow b \neq \varnothing)\ \land\ \forall b_1 \forall b_2\ (b_1 \neq b_2\ \land\ \{b_1, b_2\} \subseteq a \Rightarrow b_1 \cap b_2 = \varnothing)$ $\Rightarrow \exists d \forall b\ \big(b \in a \to \exists c\ (b \cap d = \{c\})\big)\Big)$

Каждую аксиому можно сформулировать обычными словами; вторая аксиома, например, гласит: «Существует пустое множество», т. е. существует множество без элементов. Использование знаков и выражений формальной логики подчеркивает формальный характер этой системы.

Неформальная система Финслера выглядит по-другому и состоит только из трех аксиом:

1. Для любых множеств M и N всегда однозначно решено, имеет ли M отношение β к N или нет.
2. Изоморфные множества идентичны.
3. Множества образуют систему вещей, которая, при поддержании аксиом I и II, больше не может быть в дальнейшем расширена.

Платоновский взгляд у Финслера выражается здесь в том, что эти аксиомы относятся к *объективно существующим* математическим предметам, т. е. к чисто идеальной, но в каком-то смысле реальной сфере.

Было бы желательно, если бы можно было — как в случае с натуральными числами — соединить все множества в определенную систему[69]. Оказывается, что в финслеровской теории это возможно; в дальнейшем все антиномии устраняются, так как существования противоречивых по определению множеств не требуется («Если мы не создали антиномию, она и не появится»). При этом Финслер использует как существенное вспомогательное средство распределение множеств на такие, определение которых не является цикличным, и те, определение которых циклично. Для математических построений нециклические множества образуют надежное и достаточное основание; то, что понятие «нециклический» само содержит круг, не помеха, так как оно, по Финслеру, принадлежит чистой логике[70].

Теория множеств Финслера не была признана большинством математиков. Это не очень удивительно, ведь у математиков бывают совершенно различные взгляды в этой сфере; Анри Пуанкаре,

---

[69] Finsler. Gibt es Widersprüche in der Mathematik? S. 153; Über die Grundlegung der Mengenlehre I. S. 683.

[70] Для дальнейшего изучения финслеровской теории множеств рекомендуем читать: Unger. Vorwort des Herausgebers // Paul Finsler. Aufsätze zur Mengenlehre. S. XI–XVI.

например, называл теорию множеств Кантора «болезнью разума», а Давид Гильберт называл ту же самую теорию «раем», из которого он не хочет быть изгнанным[71]. Что касается именно финслеровской теории множеств, то на одной конференции математик Вейль так набросился на нее, что бедный Финслер заработал нервное истощение. Правда, Финслер использовал специфическую, необычную форму выражения, и многие не были готовы ознакомиться с ней и, следовательно, не поняли сути дела. Финслер часто жаловался на то, что его противники, например Рейнхольд Бэр, просто «не хотят видеть истину»[72]. И к сожалению, такое непонимание продолжается до сих пор. Так, доктор математики Томас Форстер из университета Кэмбриджа презрительно назвал Финслера «геометром с непрофессиональным интересом к основам математики и теории множеств», но потом продемонстрировал, что не разбирается в проблеме, когда счел финслеровские выражения и символы просто «внутренним жаргоном для понятий, для которых уже есть отлично подходящие обозначения, понятные другим смертным»[73] ("$y\beta x$" вместо "$x \in y$"), и что он не видит — или не понимает — финслеровских объяснений особенного смысла термина "$y\beta x$".[74]

Ван дер Варден рассудил, что ответ на вопрос «Кто прав?» в таких спорах не может быть бесспорным, так как зависит от философских убеждений того, кто судит[75]. Финслер, однако, настаивал на том, что математика *не зависит* от личных философских убеждений: «Речь здесь идет не о какой-либо философии, а о чистой математике и логике»[76].

---

71 Этим различным взглядам очень удивлялся Туралф Скулем (см.: Skolem. Über die Grundlagendiskussionen in der Mathematik. S. 89).

72 И действительно критика Бэра не затрагивает теорию Финслера; см. подробности в: Gut. Inhaltliches Denken und formale Systeme. S. 127–132.

73 Forster. Review of "Finsler Set Theory". P. 3.

74 См. подробнее в: Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 183–184.

75 Van der Waerden. Stellungnahme zur Auseinandersetzung Finsler — Baer.

76 Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 178.

Но, несмотря на все эти трудности, знаменитое немецкое научное издательство «Wissenschaftliche Buchgesellschaft» опубликовало все статьи Финслера[77], вышли в свет и другие сборники[78]. И профессор математики Герберт Гросс, как мы уже упоминали, выразил мнение, что крайне желательно тщательно изучить идеи Финслера и их платоновскую основу[79].

10. Классическую математику можно и нужно спасать

Финслер придерживался позиции классической математики[80] и хотел, — так же, как и Гильберт[81], — защитить ее, преодолев «кризис» теории множеств[82]. При этом Финслеру пришлось вести борьбу на три фронта: должна была быть решена проблема антиномий и, вследствие этого, необходимо было оправдать теорию множеств со всеми ее мощностями (что удалось!)[83]; нужно было защитить закон исключенного третьего и отвергнуть ненужные и произвольные ограничения конструктивного понятия интуиционистов[84]; и в-третьих, свирепствующему формализму нужно было

---

77 Unger. Paul Finsler — Aufsätze zur Mengenlehre.

78 Finsler Set Theory: Platonism and Circularity. Translation of Paul Finsler's Papers on Set Theory. Ed. by David Booth and Renatus Ziegler. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1996 / Bakker A., Ziegler R. Finsler Mengenlehre. Universiteit Amsterdam: Rapport, 1997. Понятное, доступное представление финслеровской теории множеств дал Буркхардт: Burckhardt. Zur Neubegründung der Mengenlehre, 1938. S. 146–165; 1939, S. 146–155.

79 «Аксиоматическая теория множеств, которая относится к объективным математическим предметам, понятийно очаровывающая идея нециклических множеств, все финслеровское собрание оснований математики заслуживают подробного изучения» (Gross. Nachruf auf Paul Finsler. S. 20).

80 Über die Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese. S. 67; Briefwechsel mit Paul Lorenzen. S. 277. И свою статью «Der platonische Standpunkt» Финслер посвятил Ролфу Неванлинне, «последователю классической математики»!

81 Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre I. S. 684.

82 Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 173.

83 Finsler. A propos de la discussion... S. 170; Diskussionsvotum. S. 157.

84 Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 177.

отчетливо указать его границы[85]. То, что все это возможно, т. е. что классическая математика с ее основной платоновской установкой действительно *может* быть сохранена, для Финслера не подлежало сомнению.

***

Позволим себе упомянуть еще об одной черте математического платонизма, или, лучше сказать, о черте математиков-платоников, хотя она представляет лишь некую «тенденцию», которую можно обнаружить и у математиков других направлений. Выше мы уже сказали, что однажды Финслер опубликовал книгу под названием «О жизни после смерти». В ней он соединил математические и астрономические выводы со своим личным жизненным опытом и высказал мысль, что любой человек проживает жизнь каждого другого человека. Если это так, то из этого следует: то, что ты делаешь для какого-то человека, хорошее или дурное, ты делаешь в конце концов для самого себя. Эта книга у многих вызвала недоумение и непонимание, но она написана в чисто платоновской традиции: математика полезна, но есть и то, что важнее ее, — это жизнь, благодеяние, справедливость, добродетельность, благо. И нам кажется, что эта черта (хотя и не только она) «типична» для математического платонизма вообще: если мы рассмотрим, например, биографии выдающих классических математиков времен нацизма, то увидим, что мало кто из немецких математиков целиком стоял на позициях национал-социализма. Видимо, философия Платона даже в узкой области математического мышления служит некой защитой от увлечения идеологией всех направлений и способствует ясному взгляду на то, что является истинным благом.

***

Подводя итоги, можно сказать, что Финслер применял математический платонизм не просто как удобное и эффективное средство, но сознательно опирался на философию Платона. Особенно важным мне кажется подчеркивание Финслером значения не просто фор-

---

85 Finsler. Diskussionsvotum. S. 157–159; A propos de la discussion… S. 162.

мального, а осмысленного мышления. Это — мышление в лучшем платоновском смысле, мышление, которое сохраняет себе полную свободу, не ограничивается какими-либо формальностями или догмами; это — мышление, которое тем не менее не является беспорядочным, оно, напротив, полностью предано прозрачности, логике и истине.

Приложение Б:
Мотивировки выбора математического платонизма

Обычно люди не выбирают осознанно какую-либо определенную религию или философию, а принимают ту, в которой они родились. Таким же образом студенты-математики обычно не выбирают то или иное математическое направление — платонизм, интуиционизм и т. д., — а принимают то, которое преподается в их университете. В большинстве случаев сегодня это «очищенный» или «благоразумный» (в смысле Бернайса) платонизм. Однако хотелось бы, чтобы мы не довольствовались простым нахождением в мэйнстриме математического платонизма, а могли указать на *факты* и *размышления*, которые обосновывают такой выбор или хотя бы настоятельно рекомендуют его. Естественно, мы не сможем «доказать», что платонизм является «правильным» — в конечном счете это личное решение, какое направление предпочесть и выбрать, — но хорошо, если мы можем выявить ясные поводы для того, чтобы предпочесть именно его. В дальнейшем мы назовем несколько таких причин.

Б1: Загадки ряда натуральных чисел

Натуральные числа представляются очень простой вещью: знакомый ряд знакомых чисел 1, 2, 3, 4, 5... Они возникли в повседневной жизни и употребляются в ней — 2 яблока, 5 коров. Но уже древние греки заметили, что существуют интересные свойства, касающиеся отдельных чисел и отношений между ними, и они сформулировали такие понятия, как «простые числа», «совершенные числа»[1], «дружественные числа»[2] и т. д. Греки

---

[1] Совершенное число — это натуральное число, равное сумме всех своих собственных делителей, отличных от него самого. Они встречаются редко, четвертое совершенное число — это уже число 8128 (действительно,

обнаружили также интересные законы, например: если $p = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$ простое число, то $2^n p$ — совершенное число[3]. Особое очарование натуральных чисел состоит в том, что существуют кажущиеся простыми проблемы, которые при этом трудно решить. В. П. Смилга говорит о парадоксальной, странной и удивительной красоте теории чисел, которая «прежде всего, быть может, обнаруживает себя в пленительной простоте формулировок невероятных по сложности теорем», и как пример он приводит известную проблему близнецов: «Среди простых чисел встречаются странные пары: 5–7; 11–13; 17–19; 29–31; 41–43... и т. д. Спрашивается: оборвется ли где-либо этот ряд, или же он продолжается до бесконечности? Как видим, формулировка теоремы вполне ясна способному ученику второго-третьего класса. Ни Эйлер (а он был гений), ни Гаусс (и он был гений) и никто другой из сотен блестящих умов не нашел ответа до наших дней»[4].

Известна также проблема Ферма: он предположил, что для любого натурального числа $n > 2$ уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет решений в целых ненулевых числах a, b, c. Например, если дано уравнение $a^3 + b^3 = c^3$, то мы никогда не найдем такие целые числа a, b, c, которые удовлетворяли бы этому уравнению. Суть такого предположения понятна, но многие известнейшие математики обломали себе зубы об эту задачку, и она была решена только в 1995 г. Эндрю Уайлсом. Но остались и до сих пор не решенные

делители числа 8128 — это 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032, 4064, и их сумма равна 8128).

2 Дружественные числа — это пара натуральных чисел, каждое из которых равно сумме всех делителей другого. Так, делители числа 284 — это 1, 2, 4, 71, 142; их сумма равна 220, а делители числа 220 — это 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110; их сумма равна 284. Выдающиеся математики интересовались такими отношениями; Эйлер, например, нашел несколько таких пар.

3 Например, для $n = 2 : p = 1 + 2 + 2^2 = 7$ — это простое число, следовательно $2^2 \cdot 7 = 28$ — совершенное число. Доказательство этого утверждения мы приводим в Приложении Г2.

4 Смилга. Десять историй о математиках и физиках.

вопросы — кроме упомянутой проблемы близнецов, существует, например, проблема дружественных чисел. В сентябре 2007 г., как мы знаем из Википедии, было известно 11 994 387 пар дружественных чисел, но неизвестно, является количество таких пар конечным или бесконечным. Все до сих пор найденные пары состоят из чисел одной четности, и также неизвестно, существует ли хотя бы одна четно-нечетная пара.

Такие обстоятельства можно, конечно же, интерпретировать поразному, но, по мнению многих математиков, они явно подтверждают точку зрения платонизма, согласно которой числа являются не нашим изобретением, а самостоятельной областью идейных сущностей. Вспомним, что даже Кронэкер называл натуральные числа изобретением Бога.

Надо сказать, что существуют представляющиеся «чудесными» свойства чисел, в которых на самом деле нет ничего чудесного; они просто базируются на десятичной системе. Такое происходит в следующих примерах:

$1 \times 9 + 2$	$= 11$	$1 \times 8 + 1$	$= 9$
$12 \times 9 + 3$	$= 111$	$12 \times 8 + 2$	$= 98$
$123 \times 9 + 4$	$= 1111$	$123 \times 8 + 3$	$= 987$
$1234 \times 9 + 5$	$= 11111$	$1234 \times 8 + 4$	$= 9876$
$12345 \times 9 + 6$	$= 111111$	$12345 \times 8 + 5$	$= 98765$
$123456 \times 9 + 7$	$= 1111111$	$123456 \times 8 + 6$	$= 987654$
$1234567 \times 9 + 8$	$= 11111111$	$1234567 \times 8 + 7$	$= 9876543$
$12345678 \times 9 + 9$	$= 111111111$	$12345678 \times 8 + 8$	$= 98765432$
$123456789 \times 9 + 10$	$= 1111111111$	$123456789 \times 8 + 9$	$= 987654321$

Однако в царстве натуральных чисел существуют действительно удивительные явления. Называем одно[5], которое выглядит простым, но раскрыть его загадку удалось совсем недавно. Здесь главную роль играет так называемое «разбиение натурального числа n — это представление n в виде суммы натуральных чисел. Это разбиение может быть представлено в разных вариантах, например $7=4+3$, но также и $7=1+1+1+1+1+2$ или $7=2+2+3$, и т. д., и мы можем

[5] Другие примеры находятся в Приложении Г11.

определить количество разбиений $p\ (n)$ для каждого натурального числа n. Первые $p\ (n)$ такие:

1	2	3	4	5
	1 + 1	2 + 1	3 + 1	4 + 1
		1 + 1 + 1	2 + 2	3 + 2
			2 + 1 + 1	3 + 1 + 1
			1 + 1 + 1 + 1	2 + 2 + 1
				2 + 1 + 1 + 1
				1 + 1 + 1 + 1 + 1
↓	↓	↓	↓	↓
$p(1) = 1$	$p(2) = 2$	$p(3) = 3$	$p(4) = 5$	$p(5) = 7$

Количество разбиений сначала увеличивается медленно:

$$p\ (6) = 11$$
$$p\ (7) = 15$$
$$p\ (8) = 22$$
$$p\ (9) = 30$$
$$p\ (10) = 42$$

но вскоре начинает расти крайне быстро:

$$p\ (100) = 190\ 569\ 292$$
$$p\ (1000) = 24\ 061\ 467\ 864\ 032\ 622\ 473\ 692\ 149\ 727\ 991.$$

И возникает вопрос: есть ли здесь какая-то закономерность, какая-то структура?

Сами по себе числа разбиений совсем не сложные. Но они «составляют сумасшедшую последовательность целых чисел, которая быстро возрастает до бесконечности», как говорил их исследователь Кен Оно из университета Эмори в Атланте (США). И «эта провокационная последовательность вызывает удивление, уже с давних пор завораживая математиков». Только недавно, в 2011 г., группа математиков под руководством Кена Оно обнаружила систему этих чисел[6], и случилось «чудо»: оказалось, что числа разбиений поразительным образом являются фрактальными, самоподобными.

---

[6] URL: http://esciencecommons.blogspot.ru/2011/01/new-theories-reveal-nature-of-numbers.html

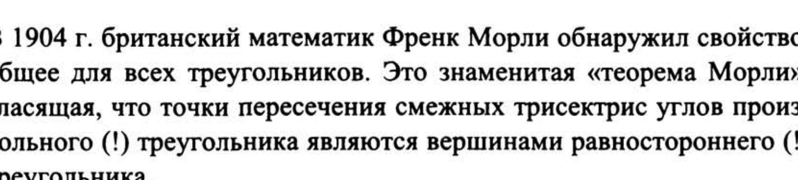
Понятие «натуральное число», разумеется, понимается только в номиналистическом смысле, но сами числа — это сущности. Они образуют хитросплетения, которые действительно могут вызвать глубокое изумление. И мы не колеблясь процитируем математика Лохер-Эрнста, говорившего, что ряд натуральных чисел «представляется нам духовным художественным произведением самого чудесного сорта»[7].

Ряд натуральных чисел, видимо, лучше всего понимать в платоновском смысле. И хочется добавить: если «Бог сотворил» натуральные числа, то он заключил в них множество тайн и загадок — пищу для будущих поколений математиков…

Б2: Удивительное свойство всех треугольников

В 1904 г. британский математик Френк Морли обнаружил свойство, общее для всех треугольников. Это знаменитая «теорема Морли», гласящая, что точки пересечения смежных трисектрис углов произвольного (!) треугольника являются вершинами равностороннего (!) треугольника.

Это неожиданный факт. Трудно сказать, что больше удивляет: сама теорема Морли или то, что Морли ее обнаружил. (Тоже самое мы могли бы сказать о пентагональной теореме Эйлера, описание которой дается ниже в Приложении Г11.) Посмотрим на три примера. Мы видим, что треугольник Морли изменяет свой размер и свое положение, но всегда является правильным[8]:



[7] Locher-Ernst. Die Reihe der natürlichen Zahlen als Geist-Kunstwerk. S. 16.

[8] В Примечании Г8 мы представим одно из доказательств теоремы Морли.

Математик платонического толка склонен интерпретировать этот факт таким образом: треугольник Морли всегда «пребывал» во всех треугольниках, просто мы долго не знали об этом (или, по Платону: наша душа созерцала когда-то это свойство треугольников, но забыла). Мы не сами изобрели этот равносторонний треугольник, но *обнаружили* его вечное существование (по Платону: обнаружили тогда, когда наша душа вспомнила). Другими словами, платоновское понимание феномена треугольника Морли — как и пентагональной теоремы Эйлера — можно считать вполне убедительным.

Можно, конечно, возразить, что эти числовые и геометрические явления формирует исключительно наш разум и что если мы не сразу понимаем все детали наших собственных построений, то это просто похоже на прибор, изобретенный инженером, который сам не знает всех свойств и способностей своего аппарата. Но такое толкование на самом деле непродуктивно, так как сразу возникает вопрос: почему мозг разных людей практически единообразно формирует математические представления, термины и законы? Откуда этот разум? И мы, рано или поздно, вернемся к беседе Сократа с молодым рабом…

Б3: Роль закона исключенного третьего в арифметике[9]

Ряд натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5…, как мы уже сказали, не вызывает на первый взгляд никаких трудностей. Эти числа просто «здесь», перед нашими глазами, как камни на земле или звезды на небе. Если мы пишем уравнение $13 + x = 20$, то мы выбираем «из всех (!) натуральных чисел» те, что подходят, и говорим, что в нашем примере подходит число 7 (и только 7). Если пишем $13 - x = 20$, то скажем, что подходящего натурального числа *не существует*. То есть такой x либо существует, либо нет, третья возможность исключена. Или возьмем теорему Ферма: хотя мы

---

9 Я использую здесь некоторые мысли Лоренцена (Lorenzen. Wie ist Philosophie der Mathematik möglich? S. 199–207). В Примечании В12 закон исключенного третьего обсуждается снова, но с другого ракурса.

долго не знали, существуют ли три числа a, b, c, которые удовлетворяют уравнение $x^n + y^n = z^n$, если $n > 2$, мы были уверены, что они либо существуют, либо нет, третья возможность исключена. Факт, что с 1995 г. мы знаем ответ, не имеет принципиального значения, уже *до* этого было решено, есть такие три числа или нет.

В таких случаях мы судим таким же образом, как и в случае с упаковкой яиц: если кто-то утверждает, что не все яйца целы, то мы можем с уверенности сказать, что он либо прав, либо не прав, — просто открыть упаковку и проверить! В случае теоремы Ферма удалось «посмотреть в упаковку и проверить», но это только удачный случай, и в случае проблемы Гольдбаха[10] мы тоже полагаем, что, хотя количество четных чисел, которые надо проверить, является бесконечным, проверка в принципе возможна, следовательно, вопрос решен, мы только пока не знаем решения.

Почему мы так думаем? Потому, что мы представляем себе множество, состоящее *даже из бесконечного количества* чисел или *бесконечного количества* комбинаций чисел как упаковку яиц и думаем, что *и здесь* мы можем применить закон исключенного третьего: либо да, либо нет.

Но откуда это представление, что мы можем обращаться так не только с конечным, *но и с бесконечным количеством* вещей, например числами? По мнению Лоренцена, объяснение таково: в древности, по крайней мере после Аристотеля, только конечное рассматривалось как «актуальное»[11]. Но в Средневековье иудейско-

---

10 В более сильной форме это утверждение сформулировал Эйлер: любое четное число, начиная с 4-х, можно представить в виде суммы двух простых чисел. Например, $8 = 3 + 5$, $20 = 7 + 13$, $44 = 13 + 31$. При этом возможны варианты: $20 = 7 + 13 = 3 + 17$, $44 = 3 + 41 = 7 + 37 = 13 + 31$, но, как гласит теорема Гольдбаха, по крайне мере одна такая сумма существует.

11 По Платону, актуальная бесконечность существует: «Если существует одно, то необходимо, чтобы существовало и число. Но при существовании числа должно быть многое и бесконечная множественность существующего. В самом деле, разве число не оказывается бесконечным по количеству и причастным бытию?» (Парменид. 144а). «В этом отрывке — сказал Нейдхарт, — лежит корень математического платонизма, который подтверждает актуальное существование бесконечных множеств» (Neid-

эллинистическое представление *бесконечности Бога* слилось с аристотелевской актуальностью Бога, — и только с тех пор мы привыкли говорить об актуальной бесконечности; в эпоху Возрождения начали говорить даже о бесконечности земного мира. Вместе с тем утверждалось, что человеческое мышление способно воспроизводить мышление Бога. И тут, говорит Лоренцен, скрываются предмнения, которые лежат в основе современной классической математики. Тот факт, что большинство математиков не принимали взглядов Брауэра, связан не с тем, что эти взгляды усложняют математику (если Брауэр прав, то, ради истины, надо следовать им, несмотря на трудности!), но с тем, что они противостоят теолого-метафизическим, — и в конце концов платоническим, — убеждениям классических математиков.

Б4: Понятие «степень множества» в теории множеств

Возьмем опять ряд натуральных чисел. Все вместе они представляют, как говорят, «множество». Квадраты этих чисел тоже представляют множество, как и четные числа, простые числа, числа больше 5 и т. д. Эти множества определяются с помощью свойств[12]. Они являются, очевидно, частями ряда натуральных чисел, поэтому и называются подмножествами. И очевидно, что существует бесконечное количество подмножеств.

Интересно, что в современной математике говорится также о *всевозможных* (!) подмножествах, которые объединяются (!) под названием «множества подмножеств», или «степени множеств». А что это такое на самом деле? Ведь мы не определили это «множество» с помощью его свойств и не объяснили, как можно определить *все* подмножества! *За* верой, что мы в принципе *можем*

---

hart. Unendlichkeit im Schnittpunkt von Mathematik und Theologie. 2. Band. S. 499).

12 Множество простых чисел, например, определяется с помощью следующего свойства: число x называется «простым», если из уравнения $x = m \cdot n$ следует, что либо $m = 1$, либо $n = 1$. По формуле: $\forall m,n\left(x = mn \rightarrow m = 1 \vee n = 1\right)$

привести определяющие свойства для *всех* подмножеств, лежит определенное представление, а именно представление, что в математике все лингвистические средства даны нам как бесконечное множество яиц в коробочке, которые «в принципе» все доступны. Значит, этот пример классической математики можно понимать практически только на основании платоновских взглядов.

Б5: Загадка интеллектуальной молнии

Вспомним слова Гаусса, которые мы уже цитировали: «Наконец, несколько дней назад, я преуспел, — но не благодаря моим тяжелым поискам, а только милостью Бога — так я хотел бы сказать. Как удар молнии, загадка была разрешена; я сам не смог бы выявить связующую нить между тем, что я знал раньше, моими последними попытками, — и тем, вследствие чего попытка удалась»[13]. Многие математики сталкивались с этим феноменом: без собственного труда проблема не решается — «Ничего не приходит из ничего!», — но важнейшая мысль приходит «извне». Чистяков, например, напоминает, что у Архита, который решил знаменитую делосскую задачу, был «необыкновенно тонкий ум и весьма большой талант», но это не все — решение Архита «вызывает восторг и удивление даже у современных математиков. Так, например, крупный голландский математик Ван дер Варден, известный своими трудами по современной алгебре и замечательными исследованиями по истории античной математики, излагая метод Архита... не мог воздержаться от восклицания: "Разве это не замечательно? Архита, должно быть, осенило некоторое поистине божественное вдохновение, когда он нашел это построение"»[14].

Каждый студент испытывает нечно подобное, хотя, конечно, и в меньшей степени: бывают моменты, когда он не просто *верит* профессору и более-менее с пониманием следует его объяснениям, но *ясно чувствует*: «А-а-а, — сейчас я понял!» А то, что в этот

---

13 Письмо Гаусса к Олберсу от 3 сентября 1805 г. (Gauss. Werke X/1. S. 25).

14 Чистяков. Три знаменитые задачи древности. С. 14–15.

момент происходит, невозможно объяснить лишь с рациональной точки зрения, — скорее это действительно похоже на удар молнии. И тогда студент понимает смысл мифа Платона о припоминании того, что его душа видела раньше.

Приложение В:
Темы для философско-математических дискуссий

Приведем несколько примеров задач, которыми философ может заниматься как самостоятельно, так и в кругу единомышленников, в надежде, что эти примеры окажутся интересными и плодотворными с точки зрения обмена идеями в философско-математических кругах. При этом пусть философ не боится некоторой самоуверенности математиков, а смело задает свои вопросы. Пауль Лоренцен, философ и одновременно математик, сказал: «Тот, кто не знает этих вещей, думает, наверное, таким образом: "Если математики используют эти предложения, то все правильно". Ведь мы живем в век, верящий в науку. Но что, если окажется, что это не совсем так?»[1] Пусть не боится и математик жалостливой улыбки философов, если заблудился в густой чаще философских выражений, ведь в них действительно не все ясно…

B1: Упражнения по диалектике

То, что важно в математике — точная формулировка задачи или проблемы, поиск способов и путей успешного их решения, тщательная проверка каждого шага до получения результата, и в конце концов верификация правильности результата, — является образцом и для философских дискуссий. Как мы уже много раз видели в предыдущих частях нашей работы, Платон сознательно настаивал на многолетнем изучении математических дисциплин с целью подготовки ученика к более глубокому и объемному пониманию философских вопросов и к более достоверным философским размышлениям.

---

[1] Lorenzen. Wie ist Philosophie der Mathematik möglich? S. 199.

В наши дни студенты гуманитарных дисциплин обычно не имеют достаточной математической подготовки: многие забыли почти все, чему учились в школе, и зачастую вспоминают об уроках математики без всякого удовольствия. Это, конечно, не только их вина, но сейчас нас интересует вопрос: возможно ли тренировать с ними математические навыки и привычки в смысле Платона? Ответить на него не просто, так как многое этому препятствует: время, деньги, учебная программа, нехватка подходящих преподавателей, неготовность студентов... Но все же стоит искать для этого возможности; в Приложении Г мы предлагаем в качестве стимула ряд упражнений, которые опытный учитель легко сможет адаптировать, исходя из уровня своих учеников. Кроме того, очень полезным может быть то, что описывала в своей книге И. Н. Мочалова — овладение *диалектическим опытом* и диалектическим искусством в платоновской академии. И мы спрашиваем: почему в философских семинарах не отводить каждый раз хотя бы 15 минут на такую тренировку? Вот это описание:

«Для двух участников (или групп участников) устанавливалось некоторое утверждение, называемое θέσις или πρόβλημα, например "удовольствие есть благо". Вопрошающий должен был занимать положение, противоположное положению отвечающего, стремясь уличить его в противоречии и заставить перейти на свою точку зрения, в то время как тот, возражая, стремился показать слабость аргументации противника. Эти дебаты проходили, очевидно, перед аудиторией, под наблюдением старших, опытных академиков, которые давали требуемые в ходе обсуждения разъяснения. В частности, оба участника должны были оставаться в области общепринятого (δόξα, ἔνδοξον), не впадая в "невероятное" (ἄδοξα) и "противное здравому смыслу" (παράδοξα). Средства, которыми при этом пользовался вопрошающий, — силлогизмы, примеры, аналогии; отвечающий — различения понятий и их значений. Участники спора, как правило, пользовались двумя видами диалектических заключений: ἐπιχείρημα, не определяемый ближе диалектический вывод, и ἀπόρημα, альтернативное заключение.

Для введения противника в заблуждение вместо обмена вопросами и ответами могло быть использовано пространное и поэтому трудное для восприятия рассуждение. Выдвигаемые ради упражнения тезисы не отражали убеждений участников спора, так как в академической диалектике сохранялось софистическое εἰς ἑκάτερον ἐπιχειρεῖν. В "Государстве" Платон предостерегал своих юных учеников от злоупотребления участием в подобных "играх" ради забавы и шутки, замечая, что следует "допускать к отвлеченным рассуждениям лишь упорядоченные и стойкие натуры, а не так, как теперь, когда за это берется кто попало, в том числе совсем неподходящие люди" (Pl. Rep. 535 D). — Другой формой овладения диалектическим искусством был учебный доклад (чтение перед школьной аудиторией), в котором его составитель брал на себя труд вне вопросно-ответной формы развить тезис и антитезис, приведя аргументы pro и contra. Кроме этого, в Академии была широко распространена практика организации диспутов, состоявших из речи и ответной речи и воспроизводящих в редуцированной форме характер беседы»[2].

Дело, конечно же, не только в формальной тренировке ментальных или аргументативных способностей, но и в *атмосфере*, в которой все это происходит. Поэтому, если мы хотим имитировать упражнения по диалектике в платоновской академии, обязательно надо «честно имитировать» и эту особую атмосферу. Она состоит, во-первых, в характере и роли учителя. Повторяем здесь то, что Мочалова пишет о Платоне как учителе и наставнике: «Согласно античной традиции, по характеру Платон был человеком застенчивым и склонным к уединению… в юности он был так стыдлив и вел себя так сдержано, что никто не видел, чтобы он смеялся… желанием его было оставить по себе память в друзьях или в книгах. Сам же он по большей части сторонился людей… Платон не любил публичных лекций и, вероятно, старался избегать

---

2 Мочалова. Метафизика ранней академии и проблемы творческого наследия Платона и Аристотеля. С. 248–249.

выступлений перед широкой аудиторией...»[3] Хотя характер невозможно имитировать, такие черты сдержанности и скромности важны и для сегодняшнего учителя или человека, ведущего собрание.

В связи с этим стоит вспомнить и высказывание Клиния, обращенное к Афинянину:

> Твои мысли казались нам убедительными, пока ты их излагал. Однако сразу поверить тебе в столь важных вопросах было бы достойно скорее неразумного юноши[4].

Не просто верить, но думать самостоятельно — вот что необходимо: «Общим для бесед и диалогов было отсутствие в них готовых ответов, ибо Платон, прибегая к иносказаниям и прячась за маски персонажей диалогов, решал с их помощью одну задачу: помочь ученикам самостоятельно найти истину, полагая при этом, что многим из них для этого достаточно лишь "малейшего указания" (Pl. Ep. VII, 341 E). Такая позиция Платона давала каждому из его учеников свободу в поисках собственного пути к истине. Все ученики, таким образом, получали возможность идти своим путем, создавая оригинальные учения и считая при этом, что каждый из них, и только он один, правильно понял Учителя...»[5]

B2: Точки зрения участников

В течении нескольких заседаний философско-математического кружка, даже и на самой первой встрече, можно поставить следующую задачу: участники — как минимум, каждый опытный участник и докладчик — должны коротко изложить свою философско-математическую точку зрения, примерно в том смысле, как это предлагал Скулем: «Чтобы дискуссии о природе математики были

---

[3] Цитату целиком см. на с. 45 наст. изд.

[4] Законы. 635e.

[5] Мочалова. Указ. соч.

плодотворными, каждый участник этих обсуждений должен сказать о себе, является ли он платоником и, таким образом, рассматривает ли он математические объекты как существующие изначально, независимо от человеческого мышления, или же он согласен с математикой того сорта, которая говорит только о верификации, то есть об уже наблюдаемых фактах, или он хочет изложить утверждения, касающиеся объектов, которые он обнаружит или сможет сконструировать в будущем»[6]. Таким образом аудитория познакомится с различными позициями не только «на бумаге», а в лице настоящих, живых ученых; и для самих участников такая задача интересна потому, что они должны будут подумать о своих убеждениях и представить их в понятной для аудитории форме.

В3: Пять вопросов

— В чем специфика математических объектов, где и как они существуют?

— Определяются ли в математике все понятия точно, в отличие от других наук, и выводятся ли ее теоремы строго из аксиом, или это не так?

— Имеют ли место в математике научные революции?

— Как в математике возникают новые понятия, теории, новые дисциплины?

— Влияют ли на развитие математики внешние обстоятельства или только внутренние?[7]

---

6 Skolem. The Logical Nature of Arithmetic. P. 383–384.

7 Эти вопросы ставила Людмила Сергеевна Сычева. См.: Сычева. Философия математики на пути от философии к науке. С. 158–161.

В4: Правильно или просто удобно?

Выше мы говорили о том, что платоники настаивают на «истине», а формалисты (так же как и «нечестные платоники») удовлетворяются «удобством». Приведем здесь две яркие цитаты:

«Попытки достичь абсолютно истинных основ математики закончились неудачей. С другой стороны, профессиональные математики просто продолжают работать в своих областях математики, не задаваясь вопросом об обосновании получаемых результатов. Такая точка зрения удобна, но возникает вопрос: а являются ли получаемые результаты истинными, и если да, то в каком смысле они таковыми являются?»[8]

«Понимание математики как чистого вычисления (Kalkül) не вызывает острых дискуссий. Они возникают, как только математика начинает пониматься как "система знаний"... Если мы понимаем математику как инструмент дедукции в области эмпирического знания, а не как научную систему, то мы видим, что целый ряд спорных моментов — это вопросы не истинности, а практического применения. Вопрос принимает следующий вид: какая форма математической системы является технически самой подходящей для предполагаемой цели? Какая система гарантирует наивысшую надежность? Если мы сравниваем, например, системы классической и интуиционистской математики, то видим, что первая гораздо проще и технически намного практичнее, в то время как вторая лучше предохраняет от неожиданных происшествий, — например, противоречий. В настоящий момент очень трудно оценить степень надежности системы классической математики; говоря другими словами, решение, какую степень убедительности следует приписывать ее принципам, остается субъективным. Большинство математиков, кажется, считают эту степень убедительности достаточно высокой для всех практических целей и

---

[8] Хаханян. О тезисе Черча и принципе униформизации. С. 205.

поэтому предпочитают применять классическую, а не интуиционистскую математику»[9].

Вопрос к философу: почему бы не довольствоваться тем, что математика полезна и хорошо функционирует? Почему надо искать «истину»? Зачем она нам нужна? Что она «дает» нам?

B5: Возможно ли окончательно обосновать математику?

Этот вопрос тесно связан с предыдущим параграфом. Как и там, мы находим здесь различные, зачастую противоречивые мнения. Пауль Финслер, как мы видели, настаивал на том, что математика стоит на абсолютно надежном фундаменте. Н. Г. Баранец, напротив, считает, что этот фундамент принципиально не является «твердым». Чтобы инициировать дискуссию, можно вручить участникам такие противоречащие друг другу цитаты:

> ① «Математические факты не зависят от времени, они вечны, в то время как природные явления преходящи»[10]. «Чистая математика, которую мы исследуем, не зависит от нашего человеческого несовершенства»[11].
>
> ② «Вопрос об основаниях математики и знания вообще на современном уровне не может быть разрешен в окончательном виде и остается открытым»[12].

Можно выдать и следующий текст, который более подробно описывает обсуждающуюся ситуацию — и ставит вопрос о точке зрения самого автора:

---

9 Carnap. Grundlagen der Logik und Mathematik. S. 70–71.

10 Finsler. Und doch Platonismus. S. 267.

11 Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre II. S. 177.

12 Баранец, Веревкин. О судьбе математических конструктивистских школ А. А. Маркова и Э. А. Бишопа. С. 217.

③ «Обзор классических, если можно так сказать, направлений (логицизм, интуиционизм и конструктивизм, формалистское течение) и современных подходов (аксиоматический и теоретико-категориальный) показывает, что проблема философского обоснования такова, что она постоянно остается проблемой и, очевидно, останется таковой и в дальнейшем. Одной из основных задач философии часто полагают ее устремленность на решение вечных проблем. Это такие вопросы, которые волновали человечество всегда, поскольку бытие постоянно открыто нашему взору, предъявляя ему все новые горизонты для раздумий и помыслов. Далее, это проблемы, ответ на которые каждый человек ищет для себя сам, раскрывая свою сущность. Как говорится, *jeder stirbt für sich allein* (каждый умирает в одиночку[13]). Наконец, вечными подобные вопросы становятся потому, что не находят окончательного ответа, ибо его нет. Потому человечество по отношению к подобным темам всегда в пути, в неизменном поиске. К числу таких вечных проблем, очевидно, относят и задачи философского обоснования математики. В этом смысле, если иметь в виду нашу тему, математика обречена всегда находиться в "кризисной" ситуации. Но от этих систематических потрясений математика не гибнет. Наоборот. Характеризуя итоги исследований в области обоснования, М. Бунго отметил, что ныне уже никому не следует принимать позу человека, выработавшего "окончательные решения" и разрушившего тем самым все иные концепции. О результатах можно сказать так. Теории обоснования не похожи на здания, развалившиеся при замене фундаментов. Их лучше уподобить растущему организму с частями хрупкими и взаимно друг друга уравновешивающими. Процесс обоснования — это процесс поиска своего рода "вечной" истины. Он не может иметь окончания, но каждый его шаг обогащает наше понимание, продвигая к более полному знанию. "Достоверность" никогда не может быть достигнута, "основания" никогда не могут быть обоснованы, — пишет И. Лакатос, — но "хитрость разума" превращает всякое увеличение строгости в увеличение содержания, в цель математики"»[14].

---

13 Более точно: «Каждый человек переживает свою личную смерть».

14 Сухотин. Философия математики. VIII, 3.

B6: Можно ли обойтись без актуально бесконечного?

Представление о том, что бесконечное множество вещей, например множество натуральных чисел, дано нам «актуально», выглядит очень смелым (хотя и встречается уже у Платона), и неудивительно, что оно вызывает различные сомнения. Возьмем, например, следующий бесконечный ряд:

$$5 - 5 + 5 - 5 + 5 - 5 + \ldots$$

Его сумму можно определить так:

$$(5 - 5) + (5 - 5) + (5 - 5) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$$

или так:

$$5 - (5 - 5) - (5 - 5) - (5 - 5) - \ldots = 5 - 0 - 0 - 0 - \ldots = 5$$

То есть, просто применяя алгебраические правила, мы получаем разные результаты. Очевидно, что эти правила не работают, когда речь идет о бесконечности. Можно также вспомнить, что утверждение «Целое больше, чем часть» неверно в сфере бесконечного количества чисел: множество четных чисел, например, действительно является частью множества натуральных чисел и, следовательно, их должно быть меньше, чем всех натуральных чисел. Но на самом деле их не меньше, так как каждому четному числу соответствует одно натуральное число, и наоборот:

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & \\ | & | & | & | & | & | & | & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \end{array}$$

Значит, наши обычные правила и представления перестают действовать в сфере бесконечного. Это заметил уже Галилей, а Бернард Больцано написал целую книгу о проблемах в этой сфере[15].

---

15 Bolzano. Paradoxien des Unendlichen. См. также: Fraenkel. Das Problem des Unendlichen in der neueren Mathematik. S. 279–297.

И все же многие математики считают, что нельзя отказаться от понятия актуально бесконечного. По Гильберту[16], реальность всегда конечна, но бесконечное *неизбежно* появляется в математике в двух случаях. Во-первых, в формулах. Формула

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

например, содержит бесконечно много высказываний, и в этом проявляется сама суть формул. Во-вторых, в методе идеальных элементов, где конечно-конкретное дополняется до тотальности (например, при применении терминов «все» и «есть» Вейерштрассом). Гильбертовский ряд примеров легко можно продолжить. На самом деле представление, что бесконечное «дано» нам актуально, встречается в классической математике сплошь и рядом[17].

Но возникает следующий вопрос: как воспринимать эту бесконечность? Считаем ли мы, что она действительно существует в физическом (или хотя бы в идеальном) мире? Или мы понимаем ее в ограниченном, небуквальном смысле Гильберта, т. е. просто как «фигуру речи», которая сама по себе бессмыслена, но делает теорию проще и позволяет получить интересные и даже полезные результаты?

Многие математики не задаются этими вопросами, но философу нужна «истина» о бесконечном. Какие выводы, спрашивает он, предполагают «реальное» существование бесконечного количества, скажем, чисел? А что касается Гильберта, он спрашивает: если эта «фигура речи» при этом оказывается столь полезна или даже фактически неизбежна, то разве не предполагается, что ей принадлежит какая-то «реальность»?

---

16 Hilbert. Über das Unendliche. S. 80, 81–83, 94–108. Ср. также: Hilbert. Naturerkennen und Logik. S. 960.

17 Приведем хотя бы один пример: «Если мы признаем лишь потенциально бесконечные множества, то вряд ли следует признавать доказательства теорем Геделя о неполноте абсолютно безупречными» (Чагров. Бесконечность, всеведение, теоремы Геделя о неполноте. С. 208).

B7: Суть аксиоматического метода

Метод, возводящий здание математики на системе аксиом, освобождает ее, как предполагается, ото всех «метафизических» предмнений (что считается желательным). Поэтому уже самая древняя часть математической науки, теоретическая геометрия, с самого начала была построена на аксиомах. Она исходит из некоторых предположений, по поводу которых Платон заметил, что математики «не считают нужным отдавать в них отчет ни себе, ни другим, словно это всякому и без того ясно»[18]. Современная математика применяет этот метод, примерно с 1900 г., практически везде. Он основан, как сказал Лоренцен, на «мифе о середине». Этот миф сравнивает истину с деревом. Человек, который озабочен истиной, хватается за ствол этого дерева — там все ясно и гарантировано. Ученый — это тот человек, который взбирается на дерево, чтобы исследовать его ветви, насколько они надежны, вплоть до всех мелких ответвлений. А философ — это тот, кто начинает копать, чтобы освободить и исследовать корни дерева. К сожалению, ветви и корни этого мифического дерева простираются до бесконечности, поэтому ученым и философам приходится прилагать бесконечные усилия. При взгляде на эту досадную двойную бесконечность аксиоматик упрямо ограничивается серединой, отказываясь от поисков «истины» сверху и снизу, и рассматривает аксиомы как гипотезы, которые можно или нужно поменять на другие, в зависимости от положения дел. С этой точки зрения аксиоматика стоит в тесной связи с естествознанием, и теоретическая физика может, в конце концов, послужить оправданием математики — и наоборот. Можно сказать, что математик верит в аксиомы, так как они физически необходимы, а физик верит в аксиомы, так как они гарантированы математически. Слепой и парализованный помогают друг другу...

Но вспомним, что существует и критический взгляд на чисто аксиоматический метод (см. выше мнение Финслера).

---

[18] Государство. 510.

В8: Этноматематика

В связи с процитированным выше пунктом *В3*–5 — «Влияют ли на развитие математики внешние обстоятельства или только внутренние?» — обратим внимание на исследования «этноматематиков», направленные против европоцентризма в истории математики[19]. Они утверждают, что «западноевропейская математическая парадигма представляет собой лишь одну из возможных парадигм, которая, как и все остальные придуманные человеком системы, находится в прямой зависимости от предметной деятельности и условий, в которых человек существует»[20]. Также они считают, «что первичные (базовые) понятия и идеи математики не даны человеку до его личностного, практического опыта, что они не существуют сами по себе вне человека, вне его бытия, вне его деятельности. Эти идеи и понятия рождались и рождаются вместе с рождением самого человека как "человека разумного", вместе с возникновением у него "способности к суждению", вместе с обретением им сознания. Учитывая то, что современный человек — результат многовековой эволюции, что каждый из людей обладает генетической памятью, которая хранит в том или ином виде опыт предшествующих поколений его предков (архетипы Юнга), можно сказать, что кажущиеся внеопытными, априорными (в смысле Канта) фундаментальные математические понятия (и не только математические) на самом деле не являются таковыми. Они возникают как представления и формируются как понятия в процессе повседневной обыденной практической деятельности, в процессе социализации личности, что и находит свое подтверждение в результатах работ многих исследователей, работающих в области этноматематематики. Иными словами, результаты такого рода работ можно рассматривать в качестве дополнительных аргументов в пользу

---

19 См.: Яшин. Этноматематика и природа базовых понятий математики. С. 165–169. Тот же самый вопрос касается и философии: какие *внешние* факторы влияют на ее развитие и на развитие ее отдельных форм?

20 Там же. С. 167.

взаимосвязи априоризма и эмпиризма в математическом познании, на которую сегодня обращают внимание некоторые философы»[21].

Свидетельствует ли это высказывание против платонизма и против точки зрения сторонников универсальности и единственности математики? Наверное, не совсем. Во-первых, этноматематика интересуется проблемами не формальной, «академической» математики, а «опытной», обусловленной спецификой предметной деятельности, характерной для каждой из культур, внутри которой она возникает. Во-вторых, «результаты этих исследований говорят о том, что универсальные математические структуры ("число" и "числовая прямая", "симметрия", "прямая линия" и некоторые другие) обнаруживаются в любой культуре»[22], и это значит, что хотя бы базовую, универсальную часть математики можно воспринимать как математический платонизм, а более разработанные ветви отнести на счет более изобретательных математиков.

В9: Вопросы Витгенштейна

Е. Е. Медведева[23] и З. А. Сокулер[24] обратили внимание на философию Витгенштейна, который, по мнению его покровителя Б. Рассела, был одновременно и «глуп», и «гениален». Действительно, в его трудах мы находим размышления и вопросы, которые, с одной стороны, удивляют (мягко говоря), а с другой — дают пищу для размышлений. Назовем некоторые из них.

- «А в чем же состоит характерная неумолимость математики?»[25]
- «Необходимо уяснить, в чем, собственно, состоит умозаключение»[26].

---

[21] Яшин. Указ. соч. С. 167–168.

[22] Там же. С. 167.

[23] Медведева. Витгенштейн versus платонизм в математике. С. 140–144.

[24] Сокулер. Интерпретация Витгенштейном теоремы Геделя и диагональной процедуры Кантора. С. 152–154.

[25] Витгенштейн: Замечания по основаниям математики, с. 5.

- «Предположим, кто-то записывает ряд 1, 3, 5, 7... по формуле $2x + 1$. И он задает себе вопрос: "А делаю ли я всякий раз одно и то же или каждый раз нечто иное?" Если кто-то со дня на день обещает другому: "Завтра я навещу тебя", — говорит ли он каждый день одно и то же или же каждый день что-то другое?»[27]
- «"Но я все же знаю и то, что, какое число мне ни предложи, я смогу дать следующее за ним безо всяких колебаний". — Разумеется, если этому не воспрепятствует моя смерть или множество иных происшествий. Но моя уверенность в том, что я смогу продолжить ряд, безусловно, очень важна»[28].

B10: Трансцендентальный конструктивизм

Более «философская» задача: исследовать рассуждения Канта по поводу данных вопросов. Базовым текстом может послужить статья С. Л. Катречка, где сказано: «Трансцендентальный конструктивизм можно рассматривать не только как программу обоснования абстракций математики, но и как новый тип онтологии»[29].

B11: Компьютерные доказательства

Доказательства — это «знак математики», ее отличительная черта. Но что это такое на самом деле? Если в школе учитель доказывает теорему Пифагора, то для многих учеников на самом деле ничего не было доказано, так как у них не хватает знаний или способностей, чтобы проследить за каждым шагом и убедиться в его правильности. Но иногда споры разгораются и между знаме-

---

26 Витгенштейн. Замечания по основаниям математики. С. 6.

27 Витгенштейн. Философские исследования. С. 168.

28 Там же. С. 5.

29 Катречко. Трансцендентальный конструктивизм как программа обоснования математики и как новый тип онтологии. С. 171–174.

нитыми математиками: действительно ли доказана какая-то теорема или нет? Когда Брауэр изложил, в чем состоит ошибочность одной из основных теорем Вейерштрасса, то некоторые математики сочли, что он действительно предложил доказательство, направленное против этой теоремы, но многие не согласились с этим, так как не разделяли его основные взгляды и методы[30]. Сегодня встречается и следующая сложность: «Доказательства некоторых знаменитых математических проблем напрямую связаны с проблемой обозримости доказательств, поскольку важнейшим фактором, влияющим на убедительность доказательства, является его обозримость, то есть возможность его мысленного схватывания целиком. С развитием математики и появлением все более сложных и длинных доказательств они теряют свое методологическое достоинство — свойство убедительности»[31]. Эта проблема обостряется при необходимости использовать мощные компьютеры; возникает такой вопрос: «Можно ли считать математически легитимным такое доказательство, которое выполнено на компьютере? Если философски акцентировать эту проблему, то, по существу, она сводится к проблеме "доверия к компьютерам". Появление мощных компьютеров породило естественное сомнение в надежной методологической обоснованности имеющихся машинных способов доказательства математических теорем»[32]. В 1977 г., например, было представлено доказательство знаменитой «теоремы четырех цветов», но оно могло было быть выполнено лишь с помощью компьютера. И так как человеческих возможностей недостаточно, чтобы отследить всю операцию, проделанную компьютером, возникает вопрос: был ли использован здесь «рациональный метод»? Некоторые математики считают, что да, другие — что нет.

---

[30] Теорема Вейерштрасса: «Любая непрерывная функция *f(x)*, определенная всюду в пределах отрезка I, имеет максимум». Доказательство Брауэра см. в: Brouwer. Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie. S. 1–7.

[31] Михайлова. Проблема обоснования современной математики в контексте новых философско-метологических кризисов. С. 189.

[32] Там же. С. 188.

Глядя на это доказательство, один математик сказал: «Хорошее доказательство должно читаться как поэма, но это выглядит как телефонная книга!»

В12: Теории нечетных множеств

Философ, логик и математик Уиллард Ван Орман Куайн, который в принципе защищает закон исключенного третьего, однажды спросил, какова «цена» этой позиции. Проблема в том, что часто нелегко или совсем невозможно дать точный ответ: да или нет. Уже древние греки занимались парадоксом кучи: каждый раз, когда мы удаляем из кучи зерен одно зернышко, куча остается кучей и в конце концов получается «куча из нуля зернышек»[33]. В этом случае мы можем, конечно, прийти к соглашению, что «куча» состоит не меньше чем из тысячи зернышек, — тогда точное определение возможно. Но Куайн приводит и другой пример: если мы будем постепенно отнимать от стола одну молекулу, когда стол перестанет быть столом? Здесь проблема намного сложнее. Если мы и здесь будем настаивать на двузначной логике, то должны будем предположить, что существуют физические объекты, которые идентичны вплоть до самой последней молекулы, благодаря которой один объект является столом, а другой нет. В процессе размышления о таких примерах «может случиться так, что мы разочаруемся в бивалентности и с грустью перейдем к тому, чтобы вглядываться в ее неопределенные и многозначные альтернативы в надежде найти что-то прочное»[34].

То, что принцип двузначности действительно не подходит многим явлениям и что следует найти более широкие альтер-

---

[33] В традиционной форме этот софизм звучит так: Одна песчинка не образует кучу. Если добавить к ней еще одну песчинку, то это тоже не будет кучей. Если еще одну — тоже, и еще одну — тоже... Следовательно, (n+1) песчинок не образует кучу. Но тогда и никакое число песчинок не образует кучу.

[34] Van Orman Quine. Theorien und Dinge. S. 53.

нативы, А. И. Орлов описывает следующими словами: «Границы реальных совокупностей зачастую размыты… Э. Борель предложил описывать реальные совокупности функциями принадлежности, а Л. Заде и его последователи развили математический аппарат теории нечетких (размытых, расплывчатых, туманных, пушистых) множеств. Возникла возможность "нечеткого удвоения" математики: заменяя обычные числа и множества на нечеткие, получаем новые математические объекты (например, нечеткие классификации, т. е. нечеткие аналоги отношений эквивалентности), некоторые свойства которых отличаются от свойств исходных объектов»[35]. Как философ будет трактовать эту ситуацию?

B13: Роль фантазии

Для многих математика является самым сухим предметом, где надо просто «тупо изучать формулы». В этом есть какая-то правда, если мы смотрим только на результаты, особенно в их формальном виде, и если у нас пока нет чувства «красоты математических формул»[36]. Но если мы спросим, каким образом математик получает свои результаты и как мы сами можем решать математические задачи, то значение *фантазии*, силы воображения и творческого ума становится очевидным. Они заложены в нас, но их надо стимулировать и развивать. Для этого существует педагогический

---

[35] Орлов, Луценко. О развитии системной нечеткой интервальной математики. С. 190–191.

[36] О красоте можно говорить долго; интересно, например, сра́внить отношение к ней Платона с той ролью, которую красота играет в современных точных науках. Говоря о последнем, мы можем процитировать В. П. Смилгу: он назвал знаменитую формулу Эйлера $e^{i\pi} = -1$ «чудовищной», «но результат так красив. Так заманчив» (Смилга. Десять историй о математиках и физиках), и хотя красота не является главной движущей силой математики, но «...теория должна быть красива. Физик не всегда может логически обосновать новые идеи. Поэтому он апеллирует к интуиции. А если так — красота далеко не последний аргумент. Об этом много и настойчиво говорил Эйнштейн» (Там же).

метод, и о нем пишет А. И. Субботин: «Первый пункт этого метода имеет древнюю историю: умение усматривать (узревать) некое единство противоположностей считалось *мистическим*, присущим мудрецам, и пользовалось большим уважением. В наше время, когда нормативно-рационалистическое мышление столкнулось с неразрешимыми проблемами, востребовано рефлексивное, творческое мышление, дающее позитивные результаты. И запреты на те или иные формы такого мышления становятся анахронизмом. Как пишет П. С. Гуревич, "можно говорить о мистике как о поиске истины и реальности, которая выходит за пределы чувственной и интеллектуальной сфер... Мистик видит единство там, где обычный взор усматривает лишь многообразие и разобщенность. Мистический опыт — особое состояние сознания (мистическое сознание)". Конечно, "чистый" мистик вполне удовлетворяется таким эйфорическим состоянием своего сознания, но педагогически важно учить ребенка не только достигать, но и использовать его — через фантазию — для конструирования в своем сознании конкретных математических или иных преобразований, т. е. переводить его именно в чувственную и интеллектуальную сферу, чтобы делать, таким образом, открытия. Как писал Г. С. Альтшуллер: "Что значит управлять фантазией? Это значит уметь «включать» и «выключать» ее, менять ее «потенциал» и «направление» и, главное, направлять так, чтобы получить максимальную творческую отдачу"»[37].

Конечно, мы не можем скомандовать фантазии: «Немедленно включайся!» или активировать творческий ум, когда он нам нужен. Вспомним, что говорил Гаусс об «ударе молнии»[38], который от нас не зависит. Ван дер Варден также пишет, исходя из личного опыта, что для решения математической проблемы нужно как обдумывание (размышление), так и идея (мысль, Einfall). Обдумывание, серьезные интеллектуальные усилия и даже страдания

---

[37] Субботин. Субстанциальная и операциональная реальности в математических преобразованиях (педагогический аспект). С. 263.

[38] Письмо Гаусса к Олберсу от 3 сентября 1805 г. (Gauss. Werke X/1. S. 25).

необходимы, но «идея приходит не из сознания, также не приходит она через чувства извне. Однако откуда-то идея должна происходить, поэтому мы говорим: она происходит из *бессознательного.* Хорошая идея всегда несет в себе нечто таинственное; мы склонны называть ее божественной»[39].

B14: Математическо-философские семинары

В течение многих лет в университете Цюриха проходили математическо-философские семинары — семинары различного уровня, проходившие с разными целями. В довольно узком кругу профессора Дюрр, Финслер и Буркхардт подробно обсуждали основания теории множеств и ее философские предпосылки, и результат этих обсуждений был опубликован[40]. В более широком кругу, где были задействованы студенты, математики и философы, разбиралось, например, знаменитое и не очень сложное доказательство Туральфа Скулема, в котором говорится о невозможности охарактеризовать ряд чисел посредством конечного или счетно-бесконечного количества утверждений с исключительно числовыми переменными[41]. Правда, такие дискуссии часто были довольно заковыристыми — математики и философы просто не понимали друг друга, — но все же они оказались вполне плодотворными и просвещающими. Они в каком-то смысле возродили традиции платоновской Академии, где Платон жил и работал в тесной связи с математиками.

Первое примечание: Чтобы такие семинары были успешными, надо иметь в виду: математики часто не привыкли обсуждать философские вопросы и не знакомы с философской терминологией, а некоторые философы уже забыли все, чему учились в школе, и

---

39 Van der Waerden. Einfall und Überlegung. S. 3.

40 Burckhardt. Zur Neubegründung der Mengenlehre, 1938. S. 146–165; 1939. S. 146–155.

41 Skolem. Über die Nicht-Charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen. S. 150–161.

математика для них теперь — «закрытая область». Поэтому рекомендуется начинать с простых любопытных упражнений, чтобы возбудить интерес обеих сторон. Можно — если привести хотя бы один пример — сначала продемонстрировать «ложное доказательство»[42], которое (конечно, неправильно) использует метод от противного, и спросить: где здесь ошибка? Потом можно дать задание одному математику и одному философу сделать короткие доклады о сложностях строгого логического мышления.

Второе примечание: Существует и множество других интересных вопросов. Например, в работах Кантора зачастую можно обнаружить удивительные и странные результаты. Ведущий семинара может, допустим, рассказать о письме к Дедекинду, в котором Кантор спрашивает: можно ли сопоставить поверхность квадратной площадки с отрезком прямой таким образом, чтобы каждой точке поверхности соответствовала одна точка на этом отрезке, и наоборот? Кантор предполагал, что нет. Затем один из участвующих в семинаре математиков может привести доказательство Кантора, согласно которому ответ на самом деле будет положительным! А завершить семинар можно словами самого Кантора: «Я вижу это, но никак не могу в это поверить!» — словами, которым все участники семинара могут посочувствовать.

---

[42] *Утверждение*: 1 является самым большим естественным числом. *Доказательство*: Мы используем доказательство от противного и предполагаем, что утверждение ложно, т. е. существует другое самое большое естественное число; пусть это будет x. Значит, x больше 1, т. е. существует неравенство $1 < x$. Значит, x является положительным числом, поэтому мы можем умножить данное неравенство на x и получить $x < x^2$. Значит, x^2 больше x, но это противоречит предположению, что x — самое большое число. Мы получили противоречие, следовательно, 1 действительно является самым большим естественным числом.

Приложение Г:
Некоторые упражнения для гуманитариев

Введение

В параграфе 3.1 мы говорили о том, почему Платон так высоко оценивает пользу математики для философского образования: только она «побуждает к созерцанию бытия». Только она? По словам Д. К. Бурлаки, «философская трансценденция отрывает разум от твердой почвы имманентного»[43], и из них можно было бы сделать вывод, что *сама философия* открывает, расчищает и подготавливает «путь вверх». Но Платон, видимо, сомневался, что такая философская трансценденция способна выполнить эту задачу, обходясь исключительно своими собственными силами — в этом ей необходима помощь от другой сферы знания. Вспомним сравнение философии с иудеями в пустыне: мы сказали, что без божественного «огня» и «облака» последние не нашли бы путь![44]

Но если математика должна и может «побуждать к созерцанию бытия», то это не происходит автоматически. На пути к этой цели находятся некоторые помехи и неправильные представления; их надо устранить и преодолеть, иначе математические уроки останутся для философов бесплодными. Назовем самые главные пункты.

Математикой в смысле Платона надо заниматься в «*философском* духе», т. е. отличать ее от обыденной, «школьной» математики, направленной на практические нужды (сколько литров сока, какова длина забора и т. д.). В школьной математике предметы наглядны, «телесны»: десять яблок, начерченная с помощью циркуля и линейки кривая, деревянная пирамида... Довольно осязаем даже сам ее язык: мы «добавляем», «конструируем», «передвигаем»... Такая математика, скажет Платон, пригодна «для

---

[43] Бурлака. Мышление и Откровение. С. 39.

[44] См.: с. 399 наст. изд.

земледелия, мореплавания, руководства военными действиями»[45], но новая «духовная», «философская» математика, которую мы ищем, *полностью противоположна* практической[46], она есть «наука, которой занимаются ради познания *вечного бытия*, а не того, что возникает и гибнет»[47]. И Платон не устает снова и снова подчеркивать этот пункт: надо заниматься математикой не «как попало, а до тех пор, пока [изучающие ее] не придут с помощью самого мышления к созерцанию *природы* чисел»[48], другими словами, пока не проникнут в *саму ее суть*.

Хочется спросить: возможно ли такое математическое образование? По мнению Платона, оно возможно, если только мы сможем увлечь свои мысли в *правильную сторону*:

> ...у каждого в душе *есть* такая способность; *есть* у души и орудие, помогающее каждому обучиться. Но как глазу невозможно повернуться от мрака к свету иначе чем вместе со всем телом, так же нужно *отвратиться* всей душой ото всего становящегося: тогда способность человека к познанию сможет выдержать созерцание бытия и того, что в нем всего ярче, а это, как мы утверждаем, и есть благо. Не правда ли? — Да. — Как раз здесь и могло бы проявиться искусство обращения — каким образом всего легче и действеннее можно обратить человека: это вовсе не значит вложить в него способность видеть — она у него *уже имеется, но неверно направлена*, и он смотрит не туда, куда надо. Вот здесь-то и надо приложить силы[49].

В другой области, при исследовании русской религиозной философии, Д. К. Бурлака требует «обращаться не к "букве", а к

---

45 Государство. 527c.

46 «Кто хоть немного знает толк в геометрии, не будет оспаривать, что наука эта полностью противоположна тем словесным выражениям, которые в ходу у занимающихся ею» (Там же. 527a).

47 Там же. 527b.

48 Там же. 525c.

49 Там же. 518c–d.

"духу"»[50]. Эту удачную формулировку можно перенести и на изучение математики. Но что означает в математике «обращаться не к букве, а к *духу*»? Разумеется, какие-то фундаментальные математические «буквы» являются необходимыми и для философов, и было бы желательно включить в виде обязательного предмета в их учебный план хотя бы один курс, посвященный элементарным математическим правилам, терминам и методам — без этого вряд ли возможно почувствовать «математический дух». Но он не исчерпывается сухими правилами и формулами, он скрывается под ними. По словам Платона, он скорее состоит в постижении *сущности* математических вещей, правил, формул и методов. Поэтому мы можем просто заменить слово «философия» на слово «математика» в высказывании Бурлаки, чтобы получить верное утверждение: «Философия [Математика] в значении творческой работы, совершаемой мыслящим духом, действительно не должна быть "школьной"»[51]. Можно сказать и так: она должна *превосходить* школьный образ математических уроков. Значит, речь не идет о тренировке в сложении, умножении чисел или в конструировании треугольников; дело также не в том, что философ должен вникать в абстрактную сферу высшей математики. Скорее учащиеся, по Платону, должны будут «рассуждать о числах *самих по себе*»[52]. Не высокая математика, а математика на «высшем уровне»... Метко сформулировал эту мысль Р. Штайнер: «Когда у человека исчезают представления, вызванные внешними явлениями, тогда он понимает, что подразумевал греческий философ *Платон*, когда писал над воротами своей школы: "Негеометр да не войдет!" Смысл таков: не должен входить тот, кто не может подняться до свободного от чувственности мышления»[53].

«Подняться до свободного от чувственности мышления» — как же это возможно? Мы видели мнение, что чувственное познание не

---

[50] Бурлака. Афтореферат. С. 5.

[51] Бурлака. Мышление и Откровение. С. 30.

[52] Государство. 525d.

[53] Steiner. Mythen und Sagen. S. 244.

в силах освободиться от своей области — оно обречено оставаться «в своей языческой стране», — и таким же образом «мыслящий разум не может освободиться от логики дела или предмета, им изучаемого»[54]. Это в каком-то смысле верно, но школьное и университетское образование как раз строится на убеждении, что поэтапное развитие к более свободным формам мышления возможно. Можно подняться по лестнице ввысь:

На этом пути вверх математика играет — с помощью различных упражнений, в различных видах и на различных ступенях — важную роль, несмотря на трудности в ее усвоении для многих учашихся. Но третья ступень, обозначенная нами как «духовная» или «философская» математика, практически неизвестна, хотя это как раз та форма математики, знания которой Платон требовал для образования философов. Поэтому представим здесь коротко одно такое упражнение (в разделах Г11 и Г12 находятся и другие). В одном докладе Р. Штайнер показал, как в геометрии можно — сначала довольно наглядно, а потом все более и более «свободно» — перешагнуть от точки к линии, от линии к двухмерному

---

[54] Бурлака. Мышление и Откровение. С. 140.

пространству, далее к трехмерному и, наконец, к четерехмерному пространству: точка → отрезок → квадрат → куб → тессаракт[55]. Если мы исполняем эти шаги вполне сознательно, то избавляемся от оков обычных наглядных представлений. В этом ничего «мистического», мы просто развиваем геометрическое воображение, не теряя при этом наглядность представлений, а развивая ее на новом, «высшем» уровне.

Такие упражнения — как простые, так и более сложные — требуют от человека готовности мысленно проделать каждый шаг самому, и в начале это совсем нелегко. Но они являются необходимой ступенью на пути к формированию «сверхчувственных органов». Такие «органы» можно — и *нужно* — развивать, чтобы не утратить человеческие чувства, не стать холодным мыслящим роботом. Штайнер формулирует: «В высшем мире мы всегда будем лишаться чувств, если здесь, в мире обычного сознания, не приобретем способностей созерцания в высшем мире. Как в материнском теле человек формирует глаза для созерцания в физически-чувственном мире, так же в материнском теле Земли он должен формировать сверхчувственные органы — тогда он родится в высшем мире»[56]. Вспомним здесь, что русский математик Мордухай-Болтовской, знаменитый благодаря академическому изданию «Начал» Евклида и «Математических трудов» Ньютона, писал: сущность важных проблем можно охватить, лишь «переходя из сферы науки в сферу гипернауки...»[57].

Многие сомневаются, что такие «философские» или «духовные» математические упражнения имеют смысл и пользу. Но Платон не сомневался в этом и подчеркнул:

> «Это у тебя приятная черта: ты, видно, боишься, как бы большинству не показалось, будто ты предписываешь бес-

---

[55] Обычно Штайнер просто давал импульсы (в медицине, образовании, сельском хозяйстве, математике), разработанные позже другими авторами, особенно математиками. См. примеч. 308 на с. 182.

[56] Штайнер. Четвертое измерение. Математика и действительность. С. 108.

[57] Мордухай-Болтовской. Философия — Психология — Математика. С. 401.

> полезные науки. Между тем вот что очень важно, хотя поверить этому трудно: в науках очищается и вновь оживает некое орудие души каждого человека, которое другие занятия губят и делают слепым, а между тем сохранить его в целости более ценно, чем иметь тысячу глаз, — ведь только при его помощи можно увидеть истину»[58].

Как мы сказали, такие «духовно-математические занятия» не получаются легко, они требуют полной отдачи. «Я думаю, — говорит платоновский Сократ, — ты нелегко и немного найдешь таких предметов, которые представляли бы для обучающегося, даже усердного, больше трудностей, чем этот»[59]. Надо учиться долго и серьезно, «нужна *привычка*, раз ему предстоит увидеть все то, что там, наверху»[60]. И Платон подчеркивает: «Только если кто постоянно занимается этим делом и *слил с ним всю свою жизнь*, у него внезапно, как свет, засиявший от искры огня, возникает в душе это сознание...»[61] Поэтому Ренатус Циглер прав, когда он пишет: «Как знал уже Платон, интенсивное погружение в процессы мышления, в особенности математического мышления, — дело не только формальное. Речь идет о *сознательном упорном труде* в области самостоятельного мышления. При ближайшем рассмотрении, в этом процессе раскрываются новые источники опыта, которые ведут к нечувственным областям действительности»[62].

Правда, многие студенты не привыкли сосредотачиваться в течение длительного периода времени на математических задачах. Поэтому упражнения, подобные тем, что приведены в п. Г2, могут показаться невозможными, слишком утомительными, страшными. Но это значит, что студентам нужен хороший проводник по горным маршрутам, готовый помочь и в то же время достаточно строгий, чтобы заставлять их делать над собой усилие...

---

58 Государство. 527d.

59 Там же. 526c.

60 Там же. 516a.

61 VII Письмо. 341d.

62 Ziegler. Mathematik und Geisteswissenschaft. S. 20. (Курсив мой.)

Упорный труд — это одно, *направление* этого труда — совсем другое. Надо не только трудиться, надо *отвернуться* от обычной формы математических уроков, и это оказывается довольно сложно,

> ведь это не то же самое, что перевернуть черепок; тут надо *душу повернуть* от некоего сумеречного дня к истинному дню бытия: такое восхождение мы, верно, назовем стремлением к мудрости[63].

Было бы интересно узнать, *какими средствами и методами* пользовались в платоновской Академии, чтобы обучить студентов понимать математику в этом новом смысле. К сожалению, мы практически ничего не знаем об этом. Мы лишь слышали от Платона, что

> *никто* не пользуется арифметикой действительно как наукой, увлекающей нас к бытию[64],

и это значит, что Платону и его сотрудникам приходилось искать новые формы, методы и содержание для таких математических уроков. Поэтому нам самим необходимо придумывать специальные «философско-математические» курсы для гуманитариев (и желательно также для самих математиков — ведь им тоже было бы полезно узнать немножко о пути вверх...).

Опытный преподаватель, возможно скажет, что на практике только часть (и иногда очень малая) гуманитариев готова и способна следить за ходом таких упражнений. Но так, вероятно, было и в самой Академии. «Негеометр да не войдет!» — означал ли этот лозунг, что лишь хорошо знающие математику принимались в ее ряды? Вряд ли, говорит И. Н. Мочалова: «Если бы не получившие математического образования не принимались в Академию, то Аристотель вряд ли мог стать учеником Платона». Но, добавляет она, «для тех, кто выбрал Академию, изучение, в той или иной степени, математического квадривиума становилось обяза-

---

[63] Государство. 521b–d.

[64] Там же. 523a.

тельным»[65]. Несомненно, многие из ее членов не имели специфического «математического устройства ума», и охотно подписались бы под словами одного швейцарского поэта: «Я люблю тыкву и картофель, но *круг* пугает меня!»[66] Но все же то, что пишет Жмудь о пифагорейской школе, имело вес не только для Академии Платона, но и для нас: «Неизвестно, насколько было распространено преподавание математических дисциплин в пифагорейской школе. Но даже если оно затрагивало лишь небольшое число учеников, в условиях крайней малочисленности как научных сочинений, так и самих ученых это имело далеко идущие последствия. Постоянные занятия математикой позволяли накапливать и сохранять новые знания, а вместе с тем приобщать к ней именно в том возрасте, который благоприятен и для изучения, и для самостоятельного творчества. Эта традиция, поддержанная впоследствии софистами и закрепленная авторитетом Платона, пережила и Античность, и Средневековье, она сохраняет свою ценность и в наши дни»[67].

Как мне кажется, есть многочисленные упражнения, ведущие «человека к *размышлению*»[68]. При их выборе необходимо учитывать мнения опытных авторов[69], но также рекомендуется сохранять определенную свободу, так как выбор задач и упражнений должен учитывать знания учащихся и предпочтения самого преподавателя,

---

65 Мочалова. Метафизика ранней академии и проблемы творческого наследия Платона и Аристотеля. С. 244.

66 Eggimann. Jesus-Texte. S. 69. Некоторые проблемы математического образования для гуманитариев и их неготовность или неспособность к нему обсуждаются в параграфе 4.7, раздел 5.

67 Жмудь. Наука, философия и религия в раннем пифагореизме. С. 200–201.

68 Государство. 523a.

69 Важные аспекты были представлены в 5-й секции («Современные проблемы математического образования») Третьей всероссийской научной конференции, проходившей 27–28 сентября 2013 г. в Москве; см.: Философия математики: актуальные проблемы. Математика и реальность / В. А. Бажанов и другие. М.: Центр стратегической конъюнктуры, 2013. С. 233–263.

ведь успех зависит от интереса и энтузиазма двух сторон. Важно при этом — мы повторяемся, — что все это должно происходить не «школьно», а в духе платоновских требований: нельзя довольствоваться полученными результатами и отворачиваться от задачи сразу по ее решению, как это обычно делают школьники. Только *дополнительный шаг* приводит нас к тому, что было для Платона самым важным: к тому, чтобы быть способным улавливать «суть дела», находить «руководящие идеи под поверхностью». Например: допустим, в какой-то задаче мы использовали формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Спросим себя: что мы имеем в виду, когда говорим, что левая сторона *равна* правой? Далее: что есть равенство? Откуда у нас это понятие, это представление? Является ли оно просто «абстракцией» многообразного опыта в духе Аристотеля, или «руководящей идеей» в духе Платона?[70]

Вспомним убеждение Платона: хорошо, когда туго соображающие ученики становятся с помощью математических упражнений «более восприимчивыми, чем были раньше», но «для этого было бы достаточно какой-то незначительной части геометрии и счета»[71]. Намного важнее вот что:

> рассмотреть преобладающую ее [математики] часть, имеющую более широкое применение: *направлена ли она к нашей цели*, помогает ли она нам созерцать *идею блага*?[72]

---

70 Ср.: Федон. 75b — «Прежде чем начать видеть, слышать и вообще чувствовать, мы должны были каким-то образом узнать *о равном самом по себе* — что это такое, раз нам предстояло соотносить с ним равенства, постигаемые чувствами: ведь мы понимаем, что все они желают быть такими же, как оно, но уступают ему».

71 Государство. 526b.

72 Там же. Раздел Г12, например, просто *требует* дополнительных этических размышлений. Сам Эйнштейн страдал от последствий открытия своей формулы; ср. также высказывания легендарного британского астрофизика Стивена Хокинга: в январе 2016 г., в интервью британским СМИ, он назвал главные факторы, угрожающие развитию жизни на Земле. Неконтролируемое технологическое развитие, сказал Хокинг, может привести к глобальной ядерной войне или распространению генетически

Последующие двенадцать предложенных упражнений отслеживают различные аспекты поставленной цели: от простого тренинга до более «платонического» понимания математики.

Г1: Древневавилонская задача

Рекомендуется для начала коротко показать арифметические средства древних математиков и те виды задач, которыми они занимались, а потом решить одну задачу, сначала методом древних, а потом с использованием наших алгебраических возможностей. Следующий текст содержит одну задачу из клинописных математических текстов и информацию о ней:

«Среди арифметических задач имеется много задач на отдачу денег в рост (позднее, когда начисление в Древнем Риме, а затем в Венеции, считали "со ста", стали говорить о "процентах"), который вавилонские ростовщики рассчитывали с 60 единиц, а именно в год 12 шекелей с 1 мины (т. е. с 60 шекелей). В задачах требуется по данной величине уплачиваемых в год "процентных" денег определить величину начального капитала, найти, во что вырастет данный капитал при начислении процентов и на проценты, определение количества лет, за которые данный начальный капитал вырос до данной суммы, и т. п. Подобные задачи решались арифметически, шаг за шагом, строились и сопоставлялись арифметическая и геометрическая прогрессии.

К таким прогрессиям, так же как и у египтян, вели и задачи на раздел денежных сумм. Так, например, требовалось разделить $1\frac{2}{3}$

модифицированных вирусов. «Мы не сможем перестать двигаться вперед или повернуть прогресс вспять, поэтому нам нужно узнать, где таится опасность, и научиться ее сдерживать». Жизнь на Земле находится в постоянно растущей опасности быть уничтоженной из-за развития ядерного и бактериологического оружия, а также «других угроз, о которых мы еще не думали».

мины серебра между 10 братьями так, чтобы доли братьев образовали арифметическую прогрессию, причем известно, что доля 8-го брата равна 6 шекелям.

Задача решалась так: сначала определялась доля, приходящаяся на каждого брата в среднем, т. е. 10 шекелей, затем сумма долей 8-го и 3-го братьев (20 шекелей), далее превышение доли 3-го брата над долей 8-го (8 шекелей) и, наконец, искомое превышение, т. е. разность долей данной прогрессии.

Решение было арифметическим, велось по продуманному плану, предполагало знание свойств арифметической прогрессии, но алгебраических формул в явном виде не применяло. Вместе с тем в задачах на геометрическую прогрессию, а также на нахождение суммы квадратов чисел предписание, по которому велось вычисление, со всей очевидностью указывает, что вавилонскому математику были известны общие правила суммирования арифметической и геометрической прогрессий и квадратов чисел»[73].

Для гуманитариев в этой задаче нет ничего сложного, нужно только внимательно в ней разобраться (и это полезно). Сначала надо учесть, что вавилоняне использовали шестидесятеричную систему счисления, и это значит, что $1\frac{2}{3}$ мины в вышеупомянутой цитате надо писать в форме $1\frac{40}{60}=\frac{100}{60}$ мины. Но 1 мина равняется 60 шекелям, следовательно, $1\frac{2}{3}$ мины равняется 100 шекелям. Тогда каждый из 10 братьев получил бы, при равном распределении, 10 шекелей.

И вавилоняне продолжали мыслить таким образом:

---

[73] Кольман. История математики в древности. С. 53. Другие источники таких задач: Чистяков. Три знаменитые задачи древности; Барвин, Фрибус. Старинные задачи.

6 шекелей ↑

Братья

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

③ и ⑧ вместе 20 шекелей

→ ③ получает 14 шекелей

→ ③ получает на 8 шекелей больше чем ⑧

→ 8 шекелей больше в течение 5 шагов

→ 1 шаг соответствует $\frac{8}{5}$ шекелей

Теперь они знают значение шага арифметического ряда и могут вычислить все доли:

$$\frac{86}{5}, \frac{78}{5}, \frac{70}{5}, \frac{62}{5}, \frac{54}{5}, \frac{46}{5}, \frac{38}{5}, 6, \frac{22}{5}, \frac{14}{5}$$

А как мы сегодня решили бы эту задачу? Мы, наверное, написали бы систему уравнений, где A — доля «последнего» брата, и x — шаг ряда:

(I) $A+(A+x)+(A+2x)+(A+3x)+(A+4x)+(A+5x)+(A+6x)+(A+7x)+(A+8x)+(A+9x)=100$ шекелей

(II) $A+2x=6$ шекелей

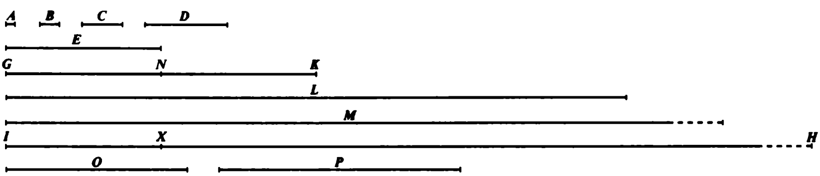
Отсюда мы легко получаем $A=\frac{14}{5}$, $x=\frac{8}{5}$ и, соответственно, все те же доли.

Г2: Один кусочек из Евклида

Желательно, чтобы гуманитарии, особенно философы, познакомились с древнегреческой математикой (или хотя бы получили какое-то представление о ней) как с такой формой математики, которой занимались, например, Платон и Аристотель. Да, можно усомниться в возможности такого занятия в принципе, так как гуманитарии обычно забывают почти все, чему научились на школьных уроках математики. Тем не менее все же стоит попробовать. Вероятность успеха выше, если сказать им, что никакого экзамена не будет, и пригласить просто спокойно следить за рассуждением, не беспокоясь о том, что они, наверное, многого не понимают. Такой урок похож на то, что происходит, когда мы смотрим на известную картину великого мастера: мы многого не знаем о ее технике, истории, композиции и т. д., но все же можем получить ценные впечатления.

Из «Начал» Евклида мы выбрали предложение 36 книги IX, которое дает некий взгляд на скрытую структуру натуральных чисел. Можно сначала выдать всем участникам текст из Евклида, и пусть кто-то (возможно, сам преподаватель) *медленно* прочтет его вслух. Текст такой:

Пусть от единицы будут отложены сколько угодно чисел в двойном отношении до тех пор, пока вся их совокупность сложенная не сделалась первым числом, а именно *A*, *B*, *C*, *D*, и пусть *E* равно будет этой совокупности, и *E*, умноженное на *D*, произведет *IH*. Я утверждаю, что *IH* будет совершенным числом.



Действительно, каково будет количество *A*, *B*, *C*, *D*, столько же возьмем от *E* в двойном отношении чисел *E*, *GK*, *L*, *M*. Значит, "по равенству" (предложение 14 книги VII) будет, что как *A* к *D*, так и *E* к *M*. Значит, произведение из *E*, *D* равно будет произведению из *A*, *M* (предложение 19 книги VII). И произведение из *E*, *D* есть *IH*; и значит, произведение из *A*, *M* будет *IH*. Значит, *A*, умножая *M*, произвело *IH*; значит, *M* измеряет *IH* по числу единиц в *A*. И *A* есть двойка; значит, *IH* будет вдвое больше *M*. Также и *M*, *L*, *GK*, *E* будут последовательно вдвое больше друг друга; значит, *E*, *GK*, *L*, *M*, *IH* последовательно пропорциональны в двойном отношении. Тогда отнимем от второго *GK* и от последнего *IH* соответственно каждое из *GN*, *IX*, равных первому *E*; значит, будет, что как остаток второго числа к первому, так и остаток последнего ко всем ему предшествующим (предложение 35). Значит, будет, что как *NK* к *E*, так и *XH* к *M*, *L*, *KG*, *E* вместе. И *NK* равно *E*; значит, и *XH* равно *M*, *L*, *GK*, *E* вместе. Также и *IX* равно *E*, *E* же равно *A*, *B*, *C*, *D* и единице. Значит, все *IH* равно *E*, *GK*, *L*, *M* и *A*, *B*, *C*, *D* и единице; и оно измеряется ими. Я утверждаю, что и *IH* не измерится никаким иным числом, кроме *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *GK*, *L*, *M* и единицы. В самом деле, если возможно, пусть какое-то *O* измеряет *IH* и пусть *O* не будет тождественно ни с одним из *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *GK*, *L*, *M*. И сколько раз *O* измеряет *IH*, пусть столько единиц будет в *P*; значит, *P*, умножая *O*, произвело *IH*. Но вместе с тем и *E*, умножая *D*, произвело *IH*; значит, будет (предложение 19 книги VII), что как *E* к *P*, так и *O* к *D*. И поскольку от единицы будут последовательно пропорциональные числа *A*, *B*, *C*, *D*, то, значит, *D* не измерится никаким иным числом, кроме *A*, *B*, *C* (предложение 13). И предполагается, что *O* не тождественно ни с одним из *A*, *B*, *C*; значит, *O* не измерит *D*. Но как *O* к *D*, так и *E* к *P*; значит, и *E* не измеряет *P* (определение 21 книги VII). И *E* — первое; всякое же первое число будет первым по отношению ко всякому, кого оно не измеряет (предложение 29 книги VII). Значит, *E*, *P* будут первыми между собой. Первые же и наименьшие (предложение 21 книги VII), наименьшие же равное число раз измеряют имеющие с ними то же отношение (предложение 20 книги VII), предыдущее — предыдущее и последующее — последующее; и как *E* к *P*, так и *O* к *D*; значит, равное число раз *E* измеряет *O* и *P* измеряет *D*. Но *D* не измеряется никаким иным, кроме *A*, *B*, *C*, значит, *P* будет тождественно одному из *A*, *B*, *C*. Пусть оно тождественно *B*. И каково будет количество *B*, *C*, *D*, начиная от *E*, возьмем столько же чисел — *E*, *GK*, *L*. И *E*, *GK*, *L* с *B*, *C*, *D* будут в том же самом отношении; значит, "по равенству" будет (предложение 14 книги VII), что как *B* к *D*, так и *E* к *L*. Значит, произведение из *B*, *L* равно произведению из *D*, *E* (предложение 19 книги VII); но произведение из *D*, *E* равно произведению из *P*, *O*; и значит, произведение из *P*, *O* равно произведению из *B*, *L*. Значит, будет, что как *P* к *B*, так и *L* к *O* (предложение 19 книги VII). И *P* тождественно с *B*; значит, и *L* будет тождественно с *O*; это же невозможно; ибо *O* предполагается не тождественным ни одному из отложенных чисел. Значит, *IH* не измерится никаким числом, кроме *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *GK*, *L*, *M* и единицы. И доказано, что *IN* равно *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *GK*, *L*, *M* и единице. Совершенным же числом будет то, которое равно своим частям (определение 23 книги VII); значит, *IH* будет совершенным, что и требовалось доказать.

Потом следует обсудить особенности этого доказательства, например то, что Евклид мыслит «геометрически», или то, как тщательно обосновывает он каждый шаг. Но это доказательство требует от нас, по-видимому, больших усилий, и мы можем по достоинству оценить современные возможности, которыми располагаем. Современный подход может выглядеть так:

Первый шаг:

Переведем предложение 36 в наш язык:

«Если от единицы откладывается сколько угодно последовательно пропорциональных чисел в двойном отношении, до тех пор, пока вся их совокупность сложенная не сделается первым числом и вся совокупность, умноженная на последнее число, произведет что-то, то возникающее число будет совершенным».	➔	Если $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$ является простым числом, то $S \cdot 2^n$ является совершенным числом.

Второй шаг:

Мы запишем сумму $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$ в форме $2^{n+1} - 1$, которая проще для вычисления. Доказательство этого тождества:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n \quad \| \cdot (1-2)$$
$$S \cdot (1-2) = 1 - 2 + 2 - 2^2 + 2^2 - 2^3 + 2^3 - \ldots - 2^n + 2^n - 2^{n+1}$$
$$S \cdot (1-2) = 1 - 2^{n+1}$$
$$-S = 1 - 2^{n+1}$$
$$S = 2^{n+1} - 1$$
значит, $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Третий шаг:

Убедимся в правильности предложения 36 с помощью нескольких примеров:

$n = 1$: $S = 2^{n+1} - 1 = 2^2 - 1 = 3$ — простое число!
$S \cdot 2n = 3 \cdot 2 = \mathbf{6}$
T: 1, 2, 3; $\sum T = \mathbf{6}$

$n = 2$: $S = 2^{n+1} - 1 = 2^3 - 1 = 7$ — простое число!
$S \cdot 2n = 7 \cdot 4 = \mathbf{28}$
T: 1, 2, 4, 7, 14; $\sum T = \mathbf{28}$

$n = 3$: $S = 2^{n+1} - 1 = 2^4 - 1 = 15$ — не простое число
$S \cdot 2n = 15 \cdot 8 = \mathit{120}$
T: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60; $\sum T = \mathit{240}$

n = 4: $S = 2^{n+1} - 1 = 2^5 - 1 = 31$ — простое число!
$S \cdot 2n = 31 \cdot 16 = \mathbf{496}$
T: 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248; $\sum T = \mathbf{496}$

n = 5: $S = 2^{n+1} - 1 = 2^6 - 1 = 63$ — не простое число
$S \cdot 2n = 63 \cdot 32 = \mathit{2016}$
T: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28, 32, 36, 48, 56, 63, 72, 96, 112, 144, 224, 288; $\sum T = \mathit{1344}$

n = 6: $S = 2^{n+1} - 1 = 2^7 - 1 = 127$ — простое число!
$S \cdot 2^n = 127 \cdot 64 = \mathbf{8128}$;
T: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032, 4064; $\sum T = \mathbf{8128}$

Четвертый шаг:

Докажем предложение 36 нашими средствами. Мы определим все делители произведения $S \cdot 2^n$ — при условии, что S — простое число! Затем образуем сумму этих делителей и покажем, что она равна $S \cdot 2^n$. Тогда $S \cdot 2^n$ — совершенное число.

Делители произведения $S \cdot 2^n$:

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3, \ldots, 2^n,\ S,\ 2S,\ 2^2S,\ 2^3S, \ldots, 2^{n-1}S$$

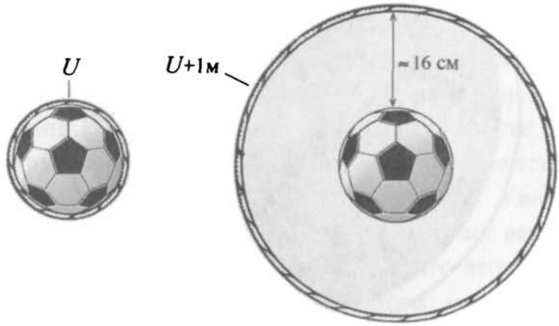
Больше делителей нет, так как S простое число!

Сумма всех делителей:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n + S + 2S + 2^2S + 2^3S + \ldots + 2^{n-1}S$$
$$= (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n) + S + 2S + 2^2S + 2^3S + \ldots + 2^{n-1}S$$
$$= S + S + 2S + 2^2S + 2^3S + \ldots + 2^{n-1}S$$
$$= (S + S) + 2S + 2^2S + 2^3S + \ldots + 2^{n-1}S$$
$$= 2S + 2S + 2^2S + 2^3S + \ldots + 2^{n-1}S$$
$$= (2S + 2S) + 2^2S + 2^3S + \ldots + 2^{n-1}S$$
$$= 2^2S + 2^2S + 2^3S + \ldots + 2^{n-1}S$$
$$= (2^2S + 2^2S) + 2^3S + \ldots + 2^{n-1}S$$
$$= 2^3S + 2^3S + 2^4S + \ldots + 2^{n-1}S$$
$$= (2^3S + 2^3S) + 2^4S + \ldots + 2^{n-1}S$$
$$= 2^4S + 2^4S + \ldots + 2^{n-1}S$$
$$\ldots$$
$$= 2^{n-1}S + 2^{n-1}S$$
$$= S \cdot (2^{n-1} + 2^{n-1})$$
$$= S \cdot 2^n$$

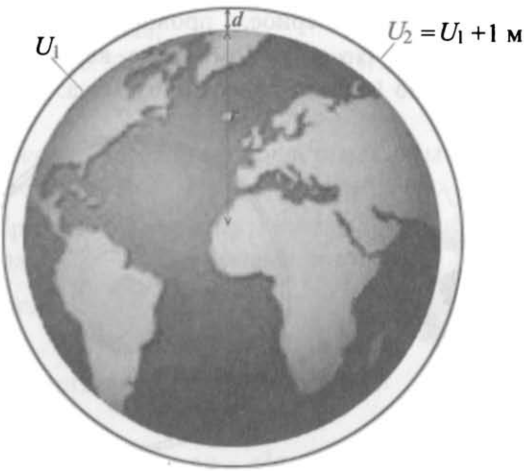
Г3: *Неожиданный результат*

Представим себе футбольный мяч и мысленно уложим веревку вокруг него, так что она будет плотно прилегать к окружности мяча. Теперь мы уберем веревку и удлиним ее на 1 м. Затем положим веревку вокруг футбольного мяча таким образом, чтобы она находилась на одинаковом расстоянии от него в любой точке (как это возможно практически, нас не касается; ремесленник-любитель взял бы, наверное, проволоку вместо веревки). Измерения покажут, что в любом месте веревка находится на расстоянии примерно 16 см от поверхности мяча.



Теперь мы возьмем вместо футбольного мяча нашу Землю и предположим, что она круглая, как мяч, без гор и долин. Снова плотно уложим веревку по ее окружности. Для этого нам нужно примерно 40 000 км веревки, но это нас не смущает. Потом мы повторим процесс: мы продлим веревку длиной 40000 км на 1 м и снова уложим ее вокруг земного шара. Естественно, от этого она не станет прилегать к земле более туго — ведь теперь она длиннее, чем раньше. Пусть она находится всюду на одинаковом расстоянии от окружности. Но каково это расстояние? Можно ли протолкнуть клочок бумаги под веревкой? Или картонку? Или же под ней даже сможет проскользнуть мышь? Вряд ли, кажется нам.

Обратимся за помощью к математике и к геометрии, чтобы найти ответ. Если мы не забыли соотношение между радиусом и длиной окружности, то все просто. Формула звучит: $U = 2r\pi$. Пусть будет U_1 = длина окружности Земли и r = радиус Земли. Длина окружности U_1 равна примерно 40 000 км, и радиус r, следовательно, равен (40 000 : 2π) км. А что касается веревки, то сначала ее длина была равна U_1 = 40 000 км, и после увеличения на 1 м ее новая длина будет U_2 = 40 000 км + 1 м = 40 000,001 км. Из новой веревки мы тоже образуем круг, и если он находится повсюду на расстоянии d от окружности Земли, то его радиус будет $(r + d)$ км.



По формуле мы получаем

$$r + d = 40\,000{,}001 \text{ км} : 2\pi.$$

Но мы уже знаем, что $r = 40\,000$ км : 2π, следовательно,

$$(40\,000 \text{ км} : 2\pi) + d = 40\,000{,}001 \text{ км} : 2\pi.$$

Отсюда $d = (40\,000{,}001 \text{ км} : 2\pi) - (40\,000 \text{ км} : 2\pi) = (40\,000{,}001 \text{ км} - 40\,000 \text{ км}) : 2\pi = 0{,}001 \text{ км} : 2\pi = 1 \text{ м} : 2\pi \approx 1 \text{ м} : 6 \approx 0{,}16 \text{ м} =$ 16 см.

Неожиданный результат! Расстояние между Землей и веревкой равно 16 см — то же самое расстояние, что и раньше, у футбольного мяча. И если мы усомнимся в этом результате, то геометр объяснит нам: это расстояние d совершенно не зависит от размера шара. Это очевидно, если мы будем пользоваться при расчетах не этими километрами и метрами, а просто буквами, т. е. воспользуемся помощью алгебры. Тогда мы находим для расстояния d следующую формулу:

$$d = (U_2 - U_1) : 2\pi = 1 \text{ м} : 2\pi \approx 0{,}16 \text{ м}$$

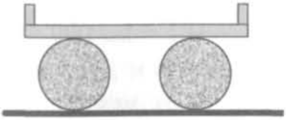
и видим, что радиус шара здесь не фигурирует, следовательно, d не зависит от него.

Г4: Недопустимые обобщения

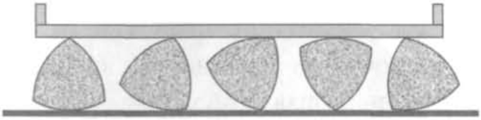
Обобщения часто встречаются как в повседневной, так и в научной жизни. Например, кто-то, встретив троих критян, которые произвели плохое впечатление, может сделать вывод: «Все критяне лжецы, злодеи и лентяи». Поняв важнейшую роль экономики, сразу бросаются строить всеобъемлющую систему диамата. Заметив, что человек может считать от триллиона еще дальше, делают вывод, что он «в принципе» может считать до бесконечности. Много раз переживая окружающий мир как трехмерное пространство, делают вывод, что он действительно только трехмерен. Увидев, что в нашей жизни закон исключенного третьего работает верно: либо на столе лежит книга, либо нет, делают вывод, что этот закон можно применять также в ситуации бесконечного количества вещей. Убедившись, что духовная сфера имеет большое значение, сразу строят целую философскую систему на основе духа.

Математические и физические примеры полезны для того, чтобы сделать человека более осторожным, сдержанным, скромным в суждениях. Есть такой анекдот: после автомобильной поездки по стране у физика спросили, были ли уже острижены овцы. Он ответил так: те стороны, что были обращены ко мне, не были… Можно сказать, конечно, что феномен полуостриженных овец, которые случайно или намеренно показывают физику неостриженную сторону, маловероятен, но в науке мы находим не менее маловероятные и неожиданные феномены.

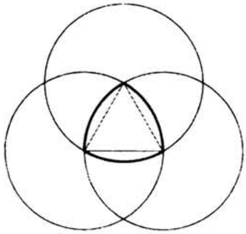
Задача с веревкой вокруг футбольного мяча служит простым примером, доступным для каждого философа. Другой простой пример: у нас есть груз, который нужно перемещать с помощью цилиндрических роликов так, что расстояние между грузом и основой не меняется. Какой профиль поперечного сечения цилиндрического ролика подходит? Каждый ответит, что профиль должен быть круглым и что это единственная возможность:



Но есть и другой профиль:



Он получается из следующей конструкции, использующей равнобедренный треугольник и три одинаковых круга:



Отсюда сразу видно, что ширина этого профиля везде одинакова.

Приведем еще один пример, в этот раз специально показав, что нельзя обобщить наш первый опыт. Это следующая функция, которую исследовал Эйлер:

$$f(n) = n^2 - n + 41$$

Подставим как n натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5... и получим для $f(n)$ следующие значения: 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151… то есть мы видим, что все они являются простыми числами. И если кто-то не верит, пусть он продолжает вычисления. То есть «каждый человек» сделает вывод, что эта функция всегда приводит к простым числам. Но увы — тот, кто *не* поверит и неутомимо продолжит вычисления, неожиданно обнаружит, что для $n = 41$ $f(n) = 1681$, и это не простое число, так как $1681 = 41^2$.

В математике есть множество примеров, которые, по словам Межковского, показывают, что «имеются недопустимые обобщения, которые не подтверждаются бросающимися в глаза ошибочными результатами»[74]. Межковский сам приводит как такие примеры, так и другие, которые мы, наоборот, сочли бы «невозможными», но они являются истинными, — и опять наш опыт и наши утверждения оказываются не такими, как мы думали. Например, следующий тезис: «Каждый шар K с радиусом 1 равноразложен (zerlegungsgleich $\overset{p}{=}$) к двум шарам K_1 и K_2 тоже радиусом 1», т. е.

$$K \overset{p}{=} K_1,\ K \overset{p}{=} K_2,\ K \overset{p}{=} K_1 \cup K_2 = K,\ K_1 \cap K_2 = \varnothing$$

Этот результат полностью противоречит нашему опыту: *одно* яблоко, скажем мы, невозможно разрезать так, чтобы его части были равны частям *двух* яблок того же размера. Ну, папа не может, а математик может...[75]

Г5: Почему минус на минус дает плюс?

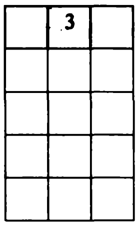
Вопрос не простой. Я помню, что когда услышал в школе, что «минус на минус дает плюс», то удивился: как это? Конечно, если учитель сказал, что это так, то надо верить, но выглядит это загадочно. 5 умножить на 3, это понятно: 3 раза взять слагаемое 5, и получается $5 \cdot 3 = 15$. Уже менее очевидным является факт, что 3 умножить на 5 дает тот же самый результат: $3 \cdot 5 = 15$, ведь это совсем другая задача. Но опыт показывает, что последовательность множителей не имеет значения, и это можно подтвердить наглядно, если мы возьмем как множители стороны прямоугольника, а произ-

---

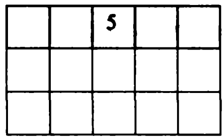
[74] Meschkowski. Mathematik als Bildungsgrundlage. S. 59.

[75] Доказательство у этой теоремы не простое, его можно прочитать в: Meschkowski. Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie. S. 138–155.

ведением станет площадь прямоугольника: его положение очевидно не имеет значение для площади.



5 раза



3 раза

Не очень трудна также задача «(–5) умножить на 3»: мы интерпретируем (–5) как некий долг, и три таких долга, очевидно, составят долг (–15). Но совсем плохо обстоит дело с противоположной задачей: «5 умножить на (–3)» означает «минус три раза пять», что не имеет никакого смысла. К счастью, есть хитрый выход: мы скажем, что *и здесь* можно поменять множители — тогда, конечно, получается

$$5\cdot(-3) = (-3)\cdot 5 = -15\,.$$

Но рассмотрим теперь нашу задачу «минус пять умножить на минус 3», т. е. $(-5)\cdot(-3)$. Здесь перемена множителей *не поможет*, и мы просто не в состоянии понять *смысл* этого выражения. Что же делать?

Есть два выхода, но оба они требуют *расширения поля зрения*. Первый путь обращается к алгебре. Формулируются законы, которые легко обосновать:

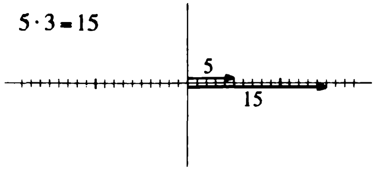
$$(a + b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

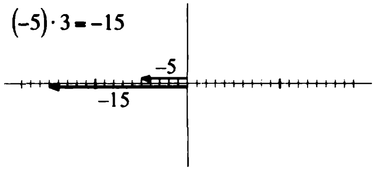
и предполагается, что они действительны *для любых чисел* или терминов. Применяя их, мы выводим так: $(-5)\cdot(-3) = (0 - 5)\cdot(-3) = 0\cdot(-3) - 5\cdot(-3) = 0 - 5\cdot(-3) = 0 - 5\cdot(0 - 3) = 0 - [5\cdot(0 - 3)] = 0 - [(0 - 3)\cdot 5] = 0 - [0\cdot 5 - 3\cdot 5] = 0 - [0 - 15] = 0 - 0 + 15 = 0 + 15 = +15$.

Другой путь использует представление о комплексных числах: «число» — это вектор в двухмерном пространстве, и «умножать» означает «растягивать и вращать». В нашем примере:

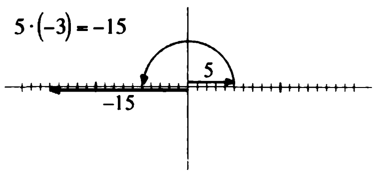
5 умножить на 3 означает «растягивать отрезок длины 5 по правой стороне числовой оси на коэффициент 3»:



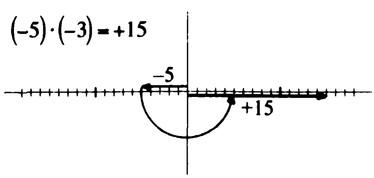
(–5) умножить на 3 означает «растягивать отрезок длины 5 по левой стороне числовой оси на коэффициент 3»:



5 умножить на (–3) означает «растягивать отрезок длины 5 по правой стороне числовой оси на коэффициент 3 и обращать результат на 180° против часовой стрелки»:



(–5) умножить на (–3) означает «растягивать отрезок длины 5 по левой стороне числовой оси на коэффициент 3 и обращать результат на 180° против часовой стрелки»:



Теперь наглядно понятно, почему «минус умножить на минус дает плюс» (разумеется, наши объяснения — это не доказательство; вся система счета просто устроена таким образом, и уже потом можно убедиться, что такая система хорошо работает).

Г6: Почему есть только пять правильных многогранников?

Выше мы обсудили так называемые платоновы тела, т. е. правильные многогранники, которым Платон соположил четыре стихии (землю, воздух, воду и огонь). Платон знал, что есть и пятый многогранник, додекаэдр, и он ассоциировал его со Вселенной, без дальнейших объяснений. Но почему же есть пять и только пять таких тел? Найти ответ нетрудно, и гуманитариям будет особенно интересно, что одно из объяснений этого феномена принадлежит знаменитому Иоганну Кеплеру. Можно раздать текст всем учащимся, чтобы каждый попробовал разобраться в нем; потом можно все обсудить и прояснить неясности. Текст такой:

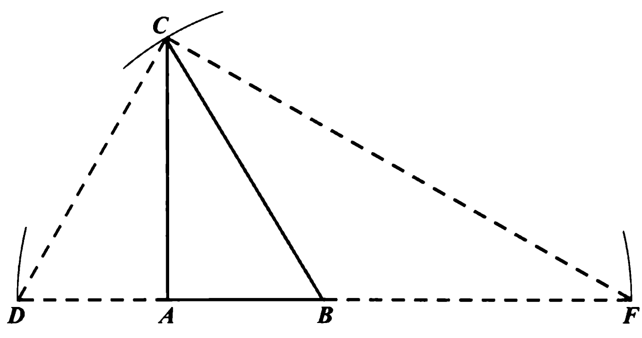
«Кроме упомянутых пяти тел [тетраэдр (пирамида), гексаэдр (куб), октаэдр, икосаэдр, додекаэдр], нет больше ни одного тела с равносторонними и равноугольными гранями. Так как из двух треугольников или двух других фигур нельзя образовать вещественный угол. Из трех треугольников, однако, возникает угол пирамиды, из 4-х — октаэдра, из пяти — икосаэдра. Из шести равносторонних и равноугольных треугольников, которые соприкасаются в одной точке, нельзя образовать вещественный угол. Так как угол равностороннего треугольника составляет 2/3 прямого, 6 таких углов вместе составляют 4 прямых угла. И ничего не выходит — так как целый угол образуется из менее чем 4-х прямых (Евклид. XI. 21). По той же самой причине никакой вещественный угол не может образоваться из более чем 6-ти таких углов. Из 3-х квадратов возникает угол куба; из 4-х квадратов не возникает никакого вещественного угла, так как их углы — это вместе 4 прямых. Из 3-х равносторонних и равноугольных пятиугольников возникает угол додекаэдра. Из 4-х, однако, не возникает никакого вещественного угла. Так как угол равностороннего пятиугольника составляет 1 1/5 прямого, 4 таких угла были бы больше, чем 4 прямых. И ничего не выходит. Также из других многоугольников нельзя образовать вещественный угол, так как из этого получилось бы нечто невозможное. Поэтому ясно, что кроме упомянутых 5-ти, нельзя образовать никакое другое тело, заключенное в равносторонних и равноугольных гранях»[76].

Г7: Доказательсто теоремы Пифагоры по Гауссу

Гуманитариям будет интересно ознакомиться с подлинным текстом «короля математики», текстом, который они легко смогут понять, и который был для Гаусса, наверное, просто небольшим развлечением[77]. Для знающих латинский язык текст будет любопытным упражнением, а остальные все равно смогут следить за ходом мышления.

Brunsvigae, 1797, Oct. 16.

Nova theorematis pythagoraei demonstratio



Theorema.

Si trianguli ABC angulus sit rectus, erit

$$AB^{qu} + AC^{qu} = BC^{qu}$$

Demonstratio.

Producatur AB utrinque fiatque

$$BD = BF = BC.$$

Tum triangula CBD, CBF erunt isocelia et anguli

---

76 Kepler. Mysterium Cosmographicum (1596). Гл. 2. Примеч. 4.

77 Gauss. Werke. Bd. X/1. S. 524-525.

$$BDC = BCD\ ;\ BCF = BFC.$$

At

$$BDC + DCB + BCF + CFB = 2\ \text{Rectis}.$$

Quare $DCB + BCF$ erit = Recto. Hinc Angulus $CDA = ACF$ et triangula ACD, AFC similia. Quare

$$AC : AD = AF : AC$$

et AC^{qu} = Rectg. sub AD et AF i. e. sub $BC - AB$ et $BC + AB$. Hinc (Eukl. Elem. II)[78]

$$AC^{qu} = BC^{qu} - AB^{qu}$$

et

$$AC^{qu} + AB^{qu} = BC^{qu}$$

Q E D.

Г8: Доказательство теоремы Морли[79]

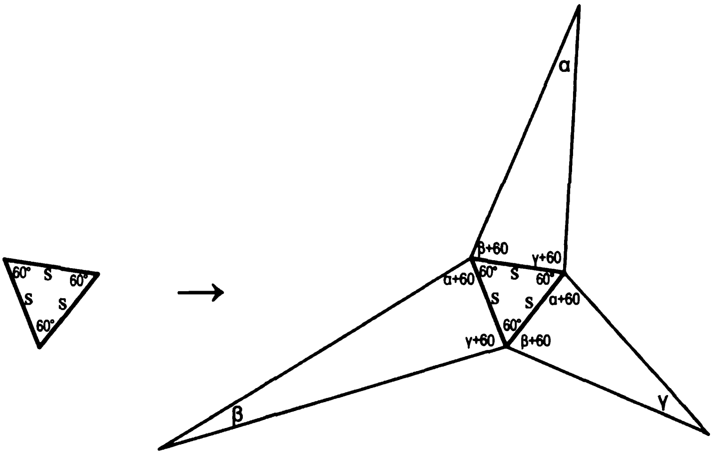
Мы уже говорили (см. Б2) о том удивительном факте, что точки пересечения смежных трисектрис углов *произвольного* треугольника являются вершинами *равностороннего* треугольника. Давайте теперь докажем это. Мы начнем с треугольника Морли, т. е. с равностороннего треугольника, сконструируем на нем три треугольника и покажем, что они формируют треугольник с трисектрисой углов. Потом можно, идя в «обратную сторону», убедиться, что каждый треугольник имеет внутри равносторонний треугольник.

---

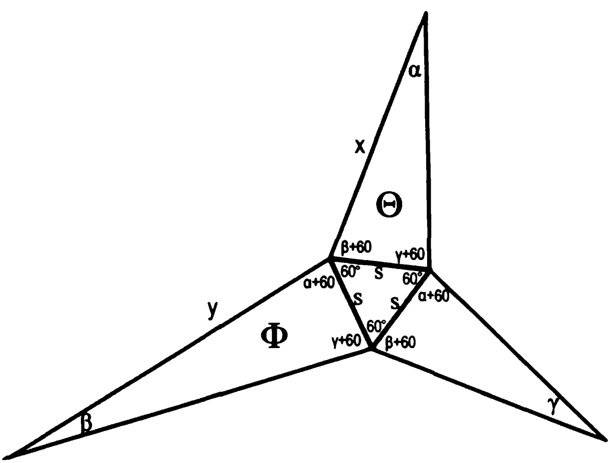
78 Гаусс применяет здесь предложение 5 из второй книги Евклида: «Если прямая линия рассечена на равные и неравные отрезки, то прямоугольник, заключенный между неравными отрезками всей прямой, вместе с квадратом на отрезке между сечениями равен квадрату на половине».

79 Есть целый ряд доказательств. Мы применяем в основном доказательство от: Newman D. J. The Morley miracle // The Mathematical Intelligencer 18, 1996. P. 31–32. Больше информации о теореме Морли см. в: Oakley C. O., Baker J. C. The Morley trisector theorem // American Mathematical Monthly 85, 1978. P. 737–745.

Пусть нам дан равносторонний треугольник со сторонами длиной s. На нем мы построим три треугольника с углами α, β, γ, $\alpha + 60$, $\beta + 60$, $\gamma + 60$, т. е. $\alpha + \beta + \gamma = 60°$. Эти углы α, β, γ — произвольные, только их сумма должна быть равна 60°. (В нашем рисунке мы выбрали $\alpha = 20°$, $\beta = 15°$, $\gamma = 25°$.)



В треугольнике Θ мы назовем одну сторону x и в треугольнике Φ мы назовем одну сторону y.

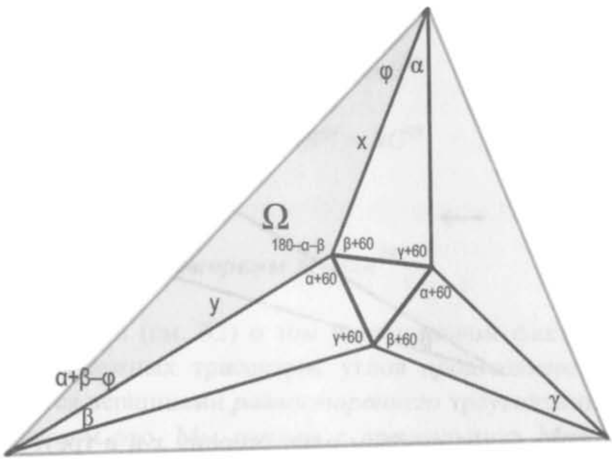


Теперь мы можем два раза применить теорему синусов:

Треугольник Θ: $\frac{x}{s} = \frac{\sin(\gamma + 60)}{\sin\alpha}$, Треугольник Φ: $\frac{y}{s} = \frac{\sin(\gamma + 60)}{\sin\beta}$

Из этих двух уравнений мы получаем уравнение (I) $\frac{x}{y} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Теперь мы дополняем фигуру, образуя треугольник Ω



и снова применяем теорему синусов: $\frac{x}{\sin(\alpha + \beta - \phi)} = \frac{y}{\sin\phi}$. Отсюда мы получаем уравнение (II) $\frac{x}{y} = \frac{\sin(\alpha + \beta - \phi)}{\sin\phi}$. Наконец, из (I) и (II) мы получим решающее уравнение

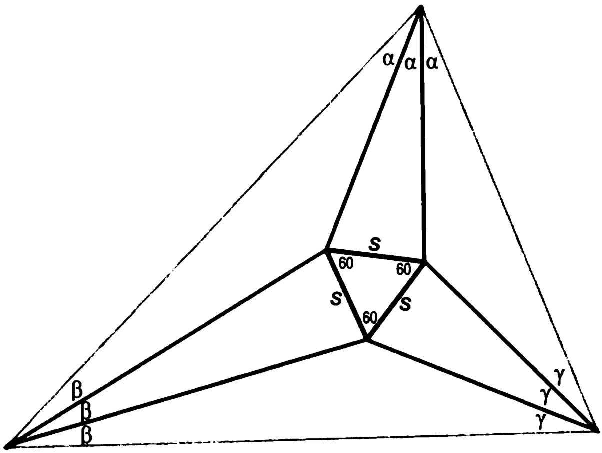
$$\text{(III)} \quad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\alpha + \beta - \phi)}{\sin\phi}.$$

Решением этого уравнения является $\phi = \alpha$; отсюда мы получаем другой угол $(\alpha + \beta - \phi) = \alpha + \beta - \alpha = \beta$.[80] И если мы проделаем то же

---

[80] Чтобы доказательство было совершено, надо доказать, что φ = α – это единственное решение. Это видно из того, что правая сторона уравнения (III) является строго монотонной в интервале [0; α + β].

с другими внешними треугольниками, то мы докажем, что получили следующую фигуру:



Мы видим, что наша конструкция, начиная с треугольника Морли с произвольной стороной *s*, привела к треугольнику с разделенными на три части углами. И так как гомотетия сохраняет все углы, начиная от треугольника Морли, мы всегда получим нашу большую фигуру с трисектрисой углов, и наоборот.

Г9: Пример чисто аксиоматической дедукции

В параграфе 2.11 мы говорили, что платоновские диалоги по своей структуре часто аналогичны математическим дедукциям, и разъясняли это с помощью схемы, где левая сторона демонстрировала один из примеров математической дедукции. Изложим здесь эту дедукцию подробнее.

Суть аксиоматического метода состоит в том, что сначала определяется фундамент: перечисляются все аксиомы и все правила, необходимые для сооружения теории. Решить, какие именно аксиомы и правила являются подходящими и достаточными, — обычно довольно сложное дело, но предположим, что нам дан этот фундамент. Тогда построение предложений на нем является в принципе заданием, которое можно решать машинным способом. Мы поставляем машине аксиомы и правила, а она дает нам результаты.

Рассмотрим сейчас кусочек такого «машинального» хода аксиоматической дедукции. Наши предпосылки: три *аксиомы* A1, A2, A3, одна *дефиниция* DS и одно *соглашение* V:

A1:	$\boldsymbol{a+b = b+a}$	коммутативная *аксиома*
A2:	$\boldsymbol{(a+b)+c = a+(b+c)}$	ассоциативная *аксиома*
A3:	$\boldsymbol{a=b \Leftrightarrow a+c = b+c}$	*аксиома* равенства
DS:	$\boldsymbol{(a-b)+b = a}$	*дефиниция* субтракции
V:	$\boldsymbol{(a-b)+c = a-b+c}$	*соглашение*, что можно убирать скобки

Из этих пяти предпосылок можно дедуцировать правило

K: $\boldsymbol{a-(b-c) = a-b+c}$.

Как это возможно? Сначала мы скажем машине, чтобы она выбрала DS и подставила вместо $\boldsymbol{b}$ выражение $\boldsymbol{(b-c)}$. Машина автоматически заменяет вторые скобки квадратными:

$$① \qquad \boldsymbol{[a-(b-c)]+(b-c) = a}.$$

Сейчас она должна применить A3 и сложить $\boldsymbol{c}$ на левой и на правой стороне уравнения ①. Машина запишет

$$② \qquad \boldsymbol{[a-(b-c)]+(b-c)+c = a+c}.$$

Следующее задание: машина должна найти в уравнении ② выражение с той же структурой, как в левой части дефиниции DS, т. е. структуру $\boldsymbol{(a-b)+b}$, и «сократить» ее согласно DS. Машина находит в уравнении ② термин $\boldsymbol{(b-c)+c}$, сокращает его на $\boldsymbol{b}$, и пишет уравнение ② в сокращенной форме

$$③ \qquad \boldsymbol{[a-(b-c)]+b = a+c}.$$

Теперь машина должна заменить термин $\boldsymbol{a}$ на правой стороне уравнения ③ на термин $\boldsymbol{(a-b)+b}$ согласно DS. Машина делает это и пишет

$$④ \qquad \boldsymbol{[a-(b-c)]+b = [(a-b)+b]+c}.$$

Следующий шаг: применить аксиому А2. Но где и как? Машина уже опытна: она видит, что структура правой стороны уравнения ④ совпадает с левой стороной формулы А2, т. е. она идентифицирует $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ в уравнении ④ как $\boldsymbol{a}$ в А2. Она записывает результат как:

$$⑤ \qquad [\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})] + \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).$$

Теперь надо заменить термин $(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ в уравнении ⑤ согласно аксиоме А1. Это легко:

$$⑥ \qquad [\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})] + \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}).$$

Теперь снова применим аксиому А2. Где именно? На правой стороне уравнения ⑥. А как? Ну, пусть $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ примем за *один* термин. Тогда машине понятно, что надо делать, и она пишет

$$⑦ \qquad [\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})] + \boldsymbol{b} = [(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}] + \boldsymbol{b}.$$

Что же дальше? Машина сама догадается, что можно применить аксиому А3, тогда слагаемое $\boldsymbol{b}$ «исчезнет», и получается

$$⑧ \qquad [\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})] = [(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}].$$

И так как машина умна, она сразу уберет квадратные скобки, потому что они очевидно не нужны:

$$⑨ \qquad \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}.$$

Последний шаг: согласно соглашению V, мы можем упростить скобки на правой стороне уравнения ⑨. Машине это понятно, и она пишет:

$$⑩ \qquad \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}.$$

А это то, что мы хотели вывести.

Внимательный философ, однако, не совсем удовлетворен. Да, машина безупречно выполнила каждый приказ, и нет сомнения, что на основании наших предпосылок действительно получится теорема ⑩. Математическое заключение, до тех пор пока речь идет только о вытекающих из него результатах, можно заменить «на чисто формальное действие по определенным правилам, из которого совершенно исключено настоящее мышление»[81]. И это выгодно, экономятся силы для «собственных задач» мышления. Эрнст Мах особо подчеркивал значение такой «экономии мышления», как в математике, так и в физике. Поэтому уже в школе учат вычислять и применять формулы без излишних размышлений — если каждый шаг потребует мысленных усилий, то ничего не получится. То же самое с аксиомами и правилами: мы определяем и обосновываем их один раз, а потом просто применяем. Получается своего рода «механическое мышление», или, по словам одного критика, «постоянный грохот мельницы формул»[82]. И иногда кажется, что эта машина «умна», — как выразились и мы, — но на самом деле *это не так*. Мы можем, конечно, запрограммировать машину так, что она будет самостоятельно обрабатывать все возможные термины, используя наши предпосылки, но это бесконечная работа, как и почти все результаты, несмотря на их «истинность», является просто бессмысленной. Конечно, если мы располагаем бесконечным временем, то теорема ⑩ когда-то появится, но когда? Выхода нет: фактически *мы сами* должны додумывать каждый шаг; машина просто не сможет догадаться, что следует начать с уравнения $[\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})] + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}$. И не сможет догадаться, что потом надо сложить $\boldsymbol{c}$, и т. д. Даже опытный математик не сразу видит, какие именно шаги ведут к цели, — мы уже знаем про Гаусса, как он мучился много лет и не мог найти правильный путь. Поэтому неудивительно, если гуманитарий, посмотрев на нашу дедукцию, скажет, что он никогда бы не догадался, каким должен быть каждый следующий шаг. Чисто аксиоматический метод «выгоден» только при условии значительной помощи человеческого разума и опыта.

---

[81] Bernays. Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik. S. 12.

[82] Becker. Mathematische Existenz. S. 516. Следует помнить, однако, что формализм Гильберта стремится не только гарантировать надежность мышления, но и хочет разгрузить его, вследствие чего мысль сможет обратиться к своим «подлинным», важным вещам. В физике значение такой «экономии мышления» подчеркивал Эрнст Мах.

Г10: Примеры использования абсолютной логики

В Г9 мы видели не только преимущества, но и ограничения, которые на нас накладывает чисто формальное, «машинальное» мышление: без творческого духа математика практически ничего не получается. Раньше мы говорили о еще более глубокой неполноте формальных дедукций: согласно Курту Геделю, в каждой формальной и непротиворечивой арифметической системе неизбежно существует тезис, который нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Поэтому, как подчеркивал Пауль Финслер, формальная логика может быть только вспомогательной дисциплиной; в науке нужна *мысль*, которая опирается на «чистую» или «абсолютную» логику и возвышается *над* формальной логикой, *над* логическими формулами. Нужно, можно сказать, «содержательные» умозаключения, «содержательное» мышление.

Но как выглядит такое мышление? Финслер привел конкретные примеры, доказывающие что неразрешимые при чисто формальном подходе проблемы могут быть решены при использовании «абсолютной логики» или «содержательного мышления». Приведем три случая.

Сначала мы обсудим парадокс лжеца и роль абсолютной логики в разрешении этой кажущейся антиномии. Затем рассмотрим довольно наглядный пример содержательного, а не чисто формального мышления; это упражнение не столь сложно и вполне доступно для философов. А в конце приведем уже чисто логико-математический пример, данный Финслером в сокращенной форме; при его обсуждении с гуманитариями потребуется, наверное, помощь и объяснения со стороны математиков.

1

Существуют выражения, утверждающие свою ложность. К ним относится, например, парадокс лжеца. Допустим, я говорю: «То, что я сейчас скажу, это ложь». Или пишу на бумаге: «Написанное здесь утверждение ложно». Такие выражения называются парадоксами, и обычно думают, что надо их запретить или считать нонсенсом. И это понятно, если мы остаемся на «формальном уровне», т. е. только на уровне самого выражения, потому что тогда мы неизбежно попадаем в заколдованный круг: если *правда*, что я лгу, тогда мое утверждение *ложно*, и следовательно, я *не* лгу! А если я *не* лгу, тогда мое утверждение «Я лгу» *правда*, а значит, я лгу!.. Из этой клетки противоречия, кажется, нет выхода. А на самом деле есть. Используя миф Платона о пещере, мы можем сказать: проблема в том, что при такой чисто формальной логике мы остаемся в пещере формализма и смотрим недвижно на стену, где видим лишь этот порочный логический круг. Но если мы отбросим цепи и уйдем из этой пещеры, «свет» покажет нам истину, другими словами: тогда мы сможем использовать настоящую, «абсолютную» логику. В нашем примере: мы больше не останемся внутри выражения «Я лгу», а посмотрим на него *с обзорной площадки*, и тогда заметим: каждое утверждение настаивает на том, что сказанное является *правдивым*. Это значит: если я утверждаю, что я лгу, то — с высшей точки зрения — сказанное *правильно*. А сказанное, само по себе, говорит, что это *ложно*. Значит, мы *одновременно* получаем высказывание A и высказывание *non-A*. Но выражение «A и *non-A*» является всегда *ложным*, независимо от смысла высказывания A. Следовательно, утверждение «Я лгу» — это не нонсенс, и оно не содержит парадокса, оно *ложно*. Результат использования абсолютной логики в нашем примере такой: Выражение «Я лгу» — это *ложь*. Просто ложь, и все.

2

Возьмем классную доску (или хотя бы представим ее). На доске мы напишем четыре текста (в сокращенной форме): доказательство, что $\sqrt{1}$ — рациональное число; доказательство, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число; доказательство, что $\sqrt{3}$ — иррациональное число; доказательство, что $\sqrt{4}$ — рациональное число. А потом еще следующий пятый текст:

> Определение: Пусть m будет самое маленькое натуральное число, о котором на этой доске не представлено доказатедьство, рационален или иррационален $\sqrt{m}$.

Утверждение: $\sqrt{m}$ иррационален.

Доказательство: На доске приведены доказательства рациональности или иррациональности для чисел 1, 2, 3, 4. Поэтому $m > 4$. Далее: на доске находятся доказательства для не более чем 5 чисел, поэтому верно, что m < 9. Значит 4 < m < 9, значит $2 < \sqrt{m} < 3$. А квадратный корень из натурального числа — либо целое число, либо иррациональное число. Но $\sqrt{m}$ не может быть целым числом, поэтому он — нерациональное число. *q.e.d.*

Значит, на доске находятся следующие тексты:

Утверждение: √1 рациональное число! Доказательство:	Утверждение: √2 иррациональное число! Доказательство:	Утверждение: √3 иррациональное число! Доказательство:	Утверждение: √4 рациональное число! Доказательство:	Определение: Пусть *m* будет самое маленькое натуральное число, о котором на этой доске не представлено доказательство, рационален или иррационален √*m*. Утверждение: √*m* иррациональное число! Доказательство: На доске решено рациональность или иррациональность для чисел 1, 2, 3, 4. Поэтому *m*>4. Далее: на доске находятся доказательства для не больше чем 5 чисел, поэтому верно m<9. Значит 4<m<9, значит 2<√*m*<3. А квадратный корень из натурального числа - либо целое число, либо иррациональное число. Но √*m* не может быть целое число, поэтому он - нерациональное число. *q.e.d.*

Сейчас мы можем сделать вывод, что $m = 5$, потому что, если бы m было >5, то оно не было бы самым маленьким числом, для которого не решено (посредством написанных на доске доказательств), рационально его корень или нет. Но если $m = 5$, то *ясно*, рационален или иррационален $\sqrt{m}$ — в противоречии с его определением! Другими словами, пятое доказательство не безупречно: оно требует, чтобы оно не было написано на доске, а на самом деле оно там написано. Значит, на *формальном* уровне (т. е. учитывая лишь то, что написано на доске), мы ничего не можем сказать о значении числа m. Но если мы *покидаем* этот уровень, убираем пятое доказательство с доски и используем его лишь мысленно, «чисто логически», то все в порядке, и действительно, $m = 5$. — Результат всего размышления: мы дали утверждение («$\sqrt{m}$ — иррациональное число»), которое невозможно подтвердить формальными средствами, но можно с помощью «абсолютной логики».[83]

3

«Вопрос о том, содержится ли в определенной двойственной дроби бесконечное количество нулей или нет, решается для определенных двойственных дробей формально. Связанные доказательства (и, следовательно, эти сами двойственные дроби) можно в рамках точного формализма представить в виде счетного ряда. Диагональный процесс дает двойственную дробь δ, таким образом, что предложение: "δ не содержит бесконечно много нулей" формально не решаемо, и таким образом формально непротиворечиво. Но оно точно ошибочно, так как можно решить вопрос для дроби 0,111111... бесконечно многими формальными доказательствами, и им соответствует в δ каждый раз один ноль. Это доказательство абсолютной логики нельзя представить формально; каждая попытка ведет к невыполнимому кругу»[84].

Г11: Платоновская арифметика

Вспомним, что Платон требовал заниматься числами не ради купли-продажи, а для того, чтобы созерцать природу чисел[85]. Такое созерцание позволяет сделать первые шаги на пути к философскому созерцанию бытия. Мы мало знаем о конкретных арифметических упражнениях, бытовавших в Академии для достижения этой цели, но вероятно, стоит обратить внимание на натуральные и особенно на простые числа, так как у них существуют

---

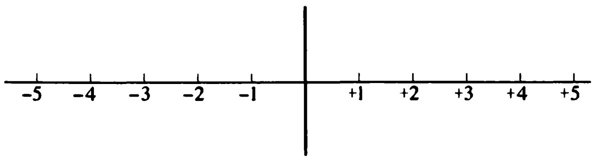
[83] Этот пример взят из: Finsler. Formale Beweise und die Entscheidbarkeit. S. 681–682.

[84] Finsler. Über die Grundlegung der Mathematik. S. 18. Если понадобится, то можно найти подробное изложение в статье: Finsler. Formale Beweise und die Entscheidbarkeit. S. 678–680.

[85] Государство. 525c.

некоторые удивительные, а иногда даже странные или загадочные свойства. В конце параграфа 3.1 мы уже упоминали о некоторых из них; здесь же мы сначала поставим для обсуждения ряд вопросов о числах в целом, необходимых, чтобы не просто использовать их «по-торгашески», а подумать об их природе; а потом мы более подробно займемся простыми числами.

(1) Числа мы делим на положительные и отрицательные, и кажется, что они являются зеркальным отражением друг друга:



На самом деле это не совсем так. Если мы применяем прямые операции (сложение, умножение, возведение в степень) к положительным числам, мы всегда будем оставаться в плюсе, а отрицательная зона будет для нас недостижима. Но из отрицательной зоны можно перешагнуть в положительную:

$$(-5)+(+8)=+3\,,\quad (-5)\cdot(-8)=+40\,,\quad (-5)^2=(+25)\,.$$

Положительная и отрицательная зоны как-то отличаются в самой их сути. И если нам захочется помедитировать об этом, следует просто заменить «положительное» на «доброе», а «отрицательное» на «злое»... Похожим образом можно задуматься и над следующими вопросами:

(2) Нас учат, как можно перешагнуть от одной числовой области к другой: натуральные → целые → рациональные → действительные → комплексные числа. Вопрос: можно ли перешагнуть и дальше? И если да, то что мы выиграем и что потеряем от этого?

(3) Нас учат, что деление на ноль «запрещено». Кто запретил это? Как можно «запретить» что-то в математике? Что произойдет, если мы просто проигнорируем этот запрет?

(4) Существуют числа, вряд ли доступные на эмоциональном уровне, но, по-видимому, фундаментальные. Одно из них — знаменитое число Эйлера e = 2,7182818284... Оно настолько странно, что кажется недостижимым, но при этом все равно остается фундаментальным и полезным...

(5) Знак равенства = повсеместно используется в математике. Но значение этого знака варьируется в зависимости от контекста, и часто не заметно. Можно посмотреть и исследовать следующие примеры:

$$z = z$$
$$(2+z)^2 = z(4+z)+4$$
$$(2+z)^2 = z(4+z)+5$$
$$(2+z)^2 = z(5+z)+5$$

Теперь обратимся специально к простым числам[86]. В этой области есть воистину удивительные и загадочные явления, которые позволят смотреть на числа в смысле Платона. В конце параграфа 3.1 мы уже упоминали совершенные числа, дружественные числа, проблему близнецов, проблему Ферма и разбиение натуральных чисел. Добавим еще несколько фактов и вопросов.

Возьмем ряд простых чисел <100: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Бросается в глаза, что они появляются в нерегулярных интервалах: 1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 6, 4, 6, 8. Кажется, что эти интервалы всегда малы, но существуют и сколь угодно большие: рассмотрим, например, произведение всех натуральных чисел от 1 до 10001 и назовем результат буквой Z. Потом напишем ряд чисел $Z + 2$, $Z + 3$, $Z + 4$, ..., $Z + 10001$. Все эти десять тысяч последовательных чисел не простые, так как $Z + 2$ делится на 2, $Z + 3$ делится на 3, и так далее. Значит, существуют сколь угодно

---

[86] Я использую, главным образом, подборку примеров из книги: Locher-Ernst. Die Reihe der natürlichen Zahlen als Geistkunstwerk.

большие интервалы между двумя простыми числами, и при этом все равно есть всегда новые, еще большие простые числа...

Возникает вопрос: существует ли *закономерность*, по которой появляются простые числа? Эта проблема мучила многих великих математиков, что неудивительно, если мы обратим внимание на такие феномены, как следующий: бывает, что почти одинаковые натуральные числа образуются из совсем разных простых множителей, например:

$$\begin{aligned} 370\,273 &= 43 \cdot 79 \cdot 109 \\ 370\,277 &= 17 \cdot 23 \cdot 947 \\ 370\,279 &= 7 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 313 \end{aligned}$$

И все же кое-что в этой связи сказать мы можем. Обозначим, например, количество простых чисел от 1 до n знаком $A(n)$. Тогда, воспользовавшись таблицей, можно найти, допустим, $A(100) = 25$, $A(200) = 46$, $A(300) = 62$. Никакой точной закономерности здесь, кажется, нет. Но двадцатилетний Гаусс предполагал, что есть хотя бы аппроксимация, которая тем лучше, чем больше число n. Аппроксимация такая:

$$A(n) \sim n : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

Это значит: если n растет, то значение выражения

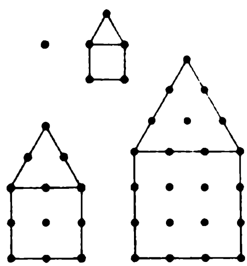
$$\frac{1}{n} \cdot A(n) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

устремляется к числу 1. Рассмотрим следующую таблицу:

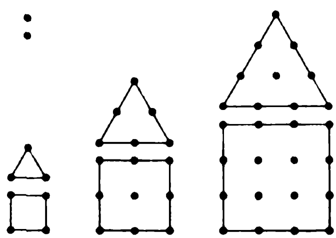
n	$A(n)$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n} \cdot A(n) \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$
1 000	168	6,4854...	1,089...
10 000	1 229	8,7876...	1,080...
100 000	9 592	11,0901...	1,063...
1 000 000	78 498	13,3927...	1,051...
10 000 000	664 579	15,6953...	1,043...
100 000 000	5 761 455	17,9978...	1,036...
1 000 000 000	50 847 478	20,3004...	1,032...

Утверждение Гаусса указывает на некую закономерность, хотя она описывает только группы простых чисел. Но существует и закон, описывающий структуру отдельных простых чисел. Это так называемая пентагональная теорема Эйлера, о которой трудно сказать, что в ней больше удивляет: сама теорема или ее находка Эйлером. Важную роль в ней играют «пентагональные числа». Они определяются следующим алгоритмом:

$$
\begin{aligned}
&1^2 &&= 1\\
&1 + 2^2 &&= 5\\
&1 + 2 + 3^2 &&= 12\\
&1 + 2 + 3 + 4^2 &&= 22\\
&1 + 2 + 3 + 4 + 5^2 &&= 35\\
&1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6^2 &&= 51\\
&\ldots
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
&0^2 &&= 0\\
&1 + 1^2 &&= 2\\
&1 + 2 + 2^2 &&= 7\\
&1 + 2 + 3 + 3^2 &&= 15\\
&1 + 2 + 3 + 4 + 4^2 &&= 26\\
&1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 5^2 &&= 40\\
&1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6^2 &&= 57\\
&\ldots
\end{aligned}
$$



Первые пентагональные числа, соответственно, следующие:

1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77...

А сейчас покажем саму пентагональную теорему Эйлера на конкретных примерах. Мы выберем какое-то натуральное число n и используем его в *двух разных* вариантах. Допустим, что $n = 12$.

Первое вычисление:

Шаг ①: Мы определим все делители числа 12, это: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Шаг ②: Мы образуем сумму этих делителей, она равна 1 + 2 + 3 + + 4 + 6 + 12 = **28**.

Второе вычисление:

Шаг ①: Мы образуем разность между n и всеми пентагональными числами не больше n; в нашем примере это разность между 12 и 1, 2, 5, 7, 12. Мы получим $12-1=\underline{11}$, $12-2==\underline{10}$, $12-5=\underline{7}$, $12-7=\underline{5}$, $12-12=\underline{0}$.

Шаг ②: Для каждого результата $\underline{11}$, $\underline{10}$, $\underline{7}$, $\underline{5}$, $\underline{0}$ мы определим сумму S его делителей: $S(\underline{11}) = 1 + 11 = 12$, $S(\underline{10}) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$, $S(\underline{7}) = 1 + 7 = 8$, $S(\underline{5}) = 1 + 5 = 6$. Если последний результат равен 0, как в нашем примере, то мы выберем число n как сумму его делителей, т. е. $S(\underline{0}) = 12$.

Шаг ③: Эти результаты 12, 18, 8, 6, 12 мы сложим и вычтем по рецепту **+ + – – + + – –** ..., в нашем примере это $+12 + 18 - 8 - 6 + 12 = \mathbf{28}$.

Мы видим, что оба вычисления дают один и тот же результат, хотя есть принципиальная разница в алгоритмах, особенно из-за того, что второе вычисление использует пентагональные числа, а первое — нет.

Еще три примера:

$n = 15$ // Делители: 1, 3, 5, 15. Их сумма: **24**. // Разности: $15-1=14$, $15-2=13$, $15-5=10$, $15-7=8$, $15-12=3$, $15-15=0$. Суммы делителей: $T(14) = 1+2+7+14 = 24$, $T(13) = 1+13 = 14$, $T(10) = 1+2+5+10 = 18$, $T(8) = 1+2+4+8 = 15$, $T(3) = 1+3 = 4$, $T(0) = 15$. Сумма этих сумм по рецепту: $+24 + 14 - 18 - 15 + 4 + 15 = \mathbf{24}$.

$n = 14$ // Делители: 1, 2, 7, 14. Их сумма: **24**. // Разности: $14-1=13$, $14-2=12$, $14-5=9$, $14-7=7$, $14-12=2$. Суммы делителей: $T(13) = 1+13 = 14$, $T(12) = 1+2+3+4+6+12 = 28$, $T(9) = 1+3+9 = 13$, $T(7) = 1+7 = 8$, $T(2) = 1+2 = 3$. Сумма этих сумм по рецепту: $+14 + 28 - 13 - 8 + 3 = \mathbf{24}$.

$n = 6$ // Делители: 1, 2, 3, 6. Их сумма: **12**. // Разности: $6-1=5$, $6-2=4$, $6-5=1$. Суммы делителей: $T(5) = 1+5 = 6$, $T(4) = 1+2+4 = 7$, $T(1) = 1$. Сумма этих сумм по рецепту: $+6 + 7 - 1 = \mathbf{12}$.

Эйлер заметил эту таинственную связь и предположил, что она действительна для всех натуральных чисел n. Его предположение было доказано позже, но осталось ощущение, что в царстве натуральных чисел существуют глубокие связи, о которых мы до сих пор мало знаем. Эти числа представляют, с одной стороны, твердо определенное переплетение отношений, в котором каждое число имеет свое определенное место, с другой стороны, числа и их отношения обладают некой «индивидуальностью», и хотя они — существа из мира необходимости, но все же «существа». Поэтому Лохер-Эрнст не стеснялся говорить: «Если бы у молодежи проснулось чувство, что числа являются "сущностями" — сущностями "из другого мира", — представьте себе, какое бы это имело большое значение! Тот, кто однажды обрел такой взгляд на эту область, больше не будет злоупотреблять числовым рядом для недостойных занятий»[87].

Добавим два результата из сферы элементарной теории чисел, занимающейся сложением и умножением целых чисел. Один из них получил, как мы уже отмечали, Гедель[88]. Он состоит в следующем: мы можем применять все возможные способы доказательств, но несколько верных предположений в данной теории всегда останутся недоказуемыми. Дело в том, что всегда можно создать такое предположение, которое можно доказать тогда и только тогда, когда оно ложно. Но оно не может быть ложным, если его можно доказать. Следовательно оно верно, но недоказуемо.

Второй результат мы упоминали в Приложении B14: знаменитое доказательство Туральфа Скулема, согласно которому невозможно охарактеризовать ряд натуральных чисел посредством конечного или счетно-бесконечного количества утверждений с исключительно числовыми переменными.

Такие результаты показывают, что уже наши знакомые и кажущиеся «ординарными» числа представляют сферу, которую мы не можем полностью охватить с помощью доступных для нас доказательств. Похоже на то, что невозможно объяснить жизнь чисто рациональными средствами. А область чисел — это не хаос, а некая «умная структура» в смысле Платона.

---

87 Locher-Ernst. Die Reihe der natürlichen Zahlen als Geistkunstwerk. S. 16.

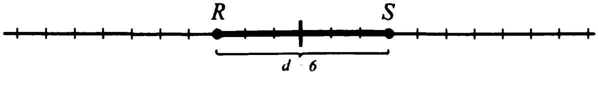
88 См. выше, с. 384–385.

Г12: Платоновская геометрия

Наряду с арифметикой Платон считал и геометрию хорошей подготовкой к «пути вверх»: она «помогает душе человека обратиться к той области, в которой заключено величайшее блаженство бытия»[89].

Речь идет здесь не о геометрии, которая используется успешно «при устройстве лагерей, занятии местностей, стягивании и развертывании войск и разных других военных построениях как во время сражения, так и в походах», а о преобладающей части геометрии, имеющей «более широкое применение: направлена ли она к нашей цели, помогает ли она нам созерцать идею блага?» К сожалению, мы не знаем содержания и методов геометрических уроков в Академии, но существуют и современные подходы, которые смотрят на геометрические феномены новым взглядом, притом не статично, а динамично, что позволяет дать волю воображению и приблизиться, например, к решению вопроса о динамичном переходе от платоновских идеей к чувственным феноменам.

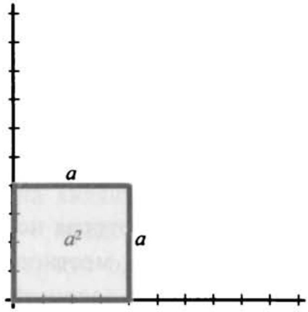
Здесь нам придется, конечно, ограничиться одним нетрудным примером; для этого мы выбрали овалы Кассини. Это, по определению, геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до двух заданных фокусов R и S постоянно и равно квадрату некоторого числа a. (Это определение звучит сложнее, чем оно есть на самом деле.) Предположим, что расстояние d между фокусов R и S равно 6:



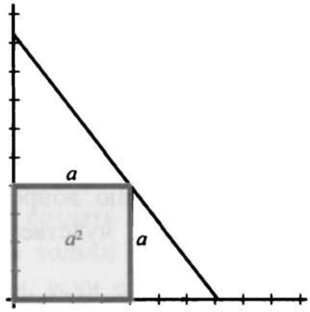
и число a равно 4. Сначала мы нарисуем квадрат со сторонами 4:

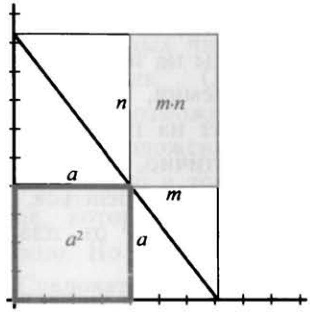
---

[89] Государство. 526d.

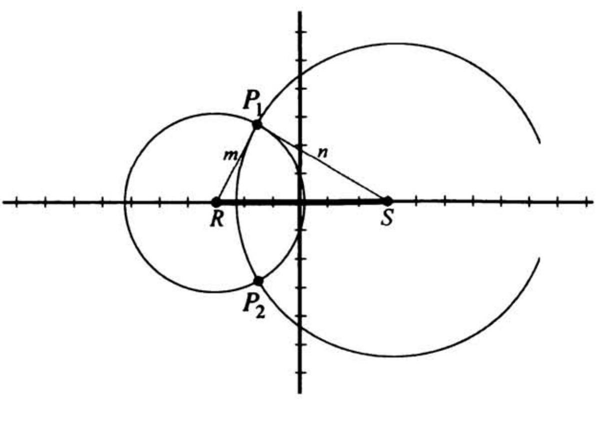


Потом добавим отрезки следующим образом:

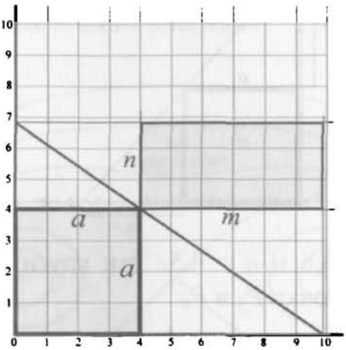




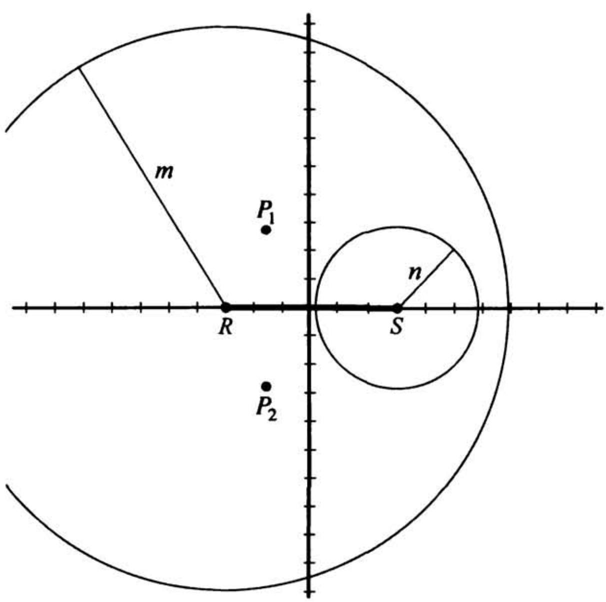
Очевидно $m \cdot n = a^2$, значит, отрезки $m \approx 3{,}2$ и $n \approx 5{,}3$ соответствуют определению. Нарисуем теперь один круг с радиусом m и центром R, и один круг с радиусом n и центром S. Если эти два круга пересекаются, мы получаем две точки P_1 и P_2 искомой кривой:



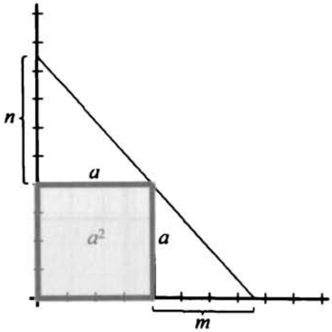
Потом мы выбираем другую косую линию и получаем другие m и n, в нашем примере $m \approx 9{,}9$ $n \approx 2{,}8$:



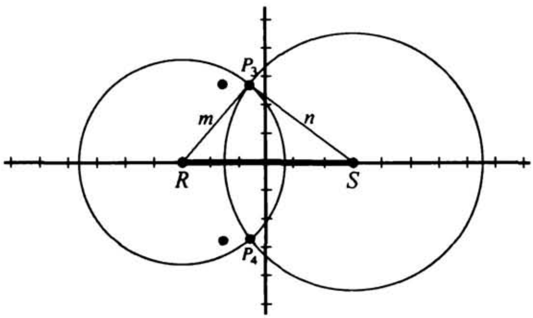
С этими m и n круги не пересекаются, поэтому новых точек нет:



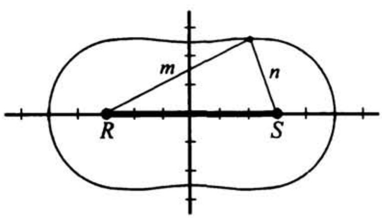
Выбираем другую конфигурацию:



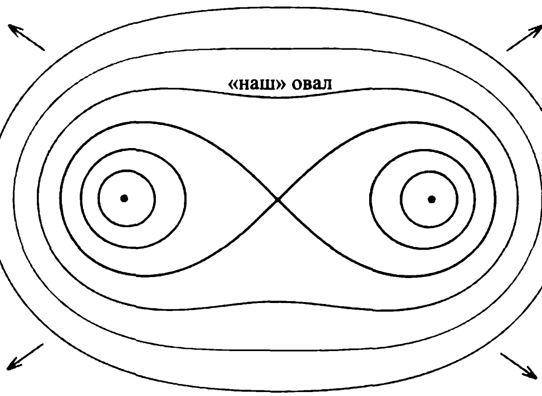
Мы получаем $m \approx 3{,}6$ и $n \approx 4{,}5$. Эти круги пересекаются, и мы получим две новых точки P_3 и P_4:



И далее, таким же образом — чтобы получить достаточно много точек, требуется лишь усидчивость; тогда можно рисовать кривую в целом. В нашем примере расстояние между R и S равно 6, и $a^2 = m \cdot n = 16$, и получается какой-то «овал»:



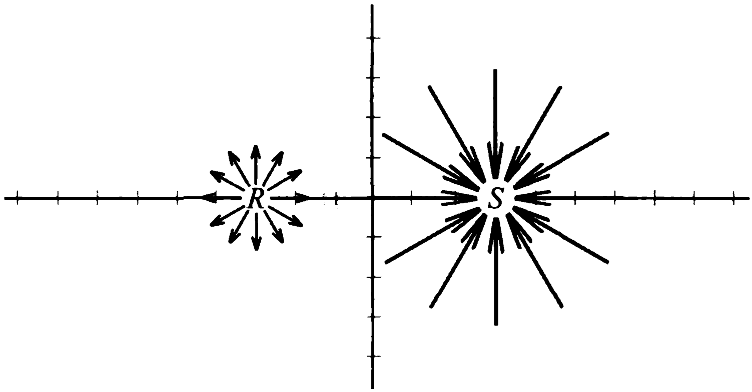
Интересен, конечно, вопрос: как «овал» меняется, если (при неизменном расстоянии между R и S) число a принимает разные значения, и как он изменится, если (при неизменном числе a) расстояние между R и S станет больше или меньше. Пусть каждый участник семинара нарисует один возможный случай, а потом можно сравнить получившиеся результаты. В литературе находятся рисунки, где описан сразу ряд вариантов, и в результате получаются так называемые «овалы Кассини»:



Но это только то, что обычно проходят в школе. И если мы остановимся на этом рисунке, то останемся в пределах «школьной геометрии». А «платоновская геометрия» требует дополнительных шагов: мы должны *оживлять* рисунок, приводить его в *чувство*. Чтобы сделать это, заметим, что отрезки m и n связаны: для одного особенного овала число a является неизменным, следовательно неизменны и a^2, и $m \cdot n = a^2$, и последнее уравнение означает: если m растет, то n уменьшается, и наоборот. Попробуем в динамике увидеть, что происходит:

– Представим, что сначала отрезок m очень мал, следовательно мал и круг с радиусом m, он является почти точкой. Тогда другой отрезок n, наоборот, очень велик, и круг с радиусом n тоже велик настолько, что уже не умещается на бумаге, он лежит «где-то в бесконечности». Значит, *эти* два круга не пересекаются, и следовательно, точки кривой *не существует*.

– Потом m растет, и с ним растет и левый круг. Этот рост выглядит, как будто центр R является «источником растущих кругов», один круг как будто раздувается. В то же время другой отрезок *n* уменьшается, а с ним уменьшается и правой круг, и это выглядит, как будто центр *S* «тянет» этот круг к себе, сокращая его размер, или, скажем, круг «сжимается» в точку *S*.



– А что будет, если этот процесс продолжится? На левой стороне, где круг исчез в бесконечности, он вдруг появится в точке *R*, потом станет маленьким кругом, а затем вырастет вновь… А на правой стороне, где круг исчез в точке *S* и сам стал точкой, он, в одно мгновение, появится в бесконечности как огромный круг, который в ходе процесса опять начнет сжиматься…

– Но это еще не все. Что происходит в это время с *овалом*? Его сначала нет, потому что круги не пересекаются. Но когда левый круг растет, а правый уменьшается, вдруг, «на одну миллисекунду», в фокусе *R* появляется точка, которая сразу раздваивается на две симметричные точки, и эти точки начинают рисовать овал. Наконец они приближаются, совпадают в фокусе *S*... и исчезают. Куда? Как будто в невидимую сферу: от точки *S* в бесконечность, и из бесконечности «обратно» в точку *R*. Или из видимой сферы в невидимую, и обратно…

Таким образом, овал Кассиди — это не просто мертвый орнамент на бумаге, скорее он появляется как «дышащее существо», существующее одновременно в видимом и невидимом.

Во всем этом нет никакой «мистики», это чистая геометрия. Мы лишь смотрим на феномен другими глазами и расширяем при этом наши силы воображения. Можно идти по этому пути и дальше, занимаясь уже более сложными упражнениями[90]. И с помощью таких личных, даже немного эмоциональных переживаний, мы можем хотя бы краем глаза заглянуть в мир невидимых идеей и почувствовать их живую связь с нашим видимым миром...

Г13: Дедукция уравнения Эйнштейна $E = mc^2$

Закончим наш ряд возможных упражнений одним примером из физики, чтобы увидеть конкретно, как математика используется для выяснения свойств природы. С помощью этого примера философ сможет получить какое-то представление о том, как можно дедуцировать новую формулу из некоторых естественных и математических предпосылок.

Эйнштейн опубликовал эту дедукцию в 1946 г.[91] По его собственным словам, у нее есть преимущества по сравнению с первым доказательством 1905 г. Хотя она предполагает специальную теорию относительности, при этом она не использует формальное оснащение теории, как раньше, а только алгебру и тригонометрию и три известных закона физики. Поэтому здесь мы считаем эту дедукцию подходящей для того, чтобы продемонстрировать гуманитариям теоретические основания этой формулы. Только надо сразу отметить, что Эйнштейн предложил очень смелый тезис, гласивший, что энергия может превращаться в массу и наоборот, — тезис, который позже подтвердился множественными экспериментами, но все равно принципиально удивляет. Далее, надо знать определение импульса: если какое-то тело имеет массу m и скорость v, то его импульс I равен произведению массы на его скорость: $I = m \cdot v$. Наконец, мы предлагаем следующие два закона (которые можно отдельно объяснить, если будет нужно):

---

[90] См. список литературы на с. 184–185.

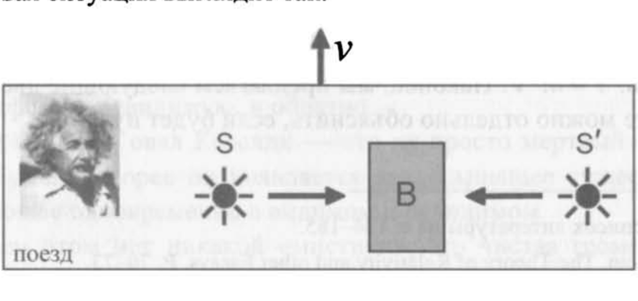
[91] Einstein. The Theory of Relativity and other Essays. P. 70–73.

1. Закон сохранения импульса. Он гласит: при столкновении тел сумма импульсов *до* взаимодействия равна сумме импульсов *после* взаимодействия.

2. Лучи света тоже имеют импульс, он называется давлением электромагнитного излучения. Импульс пучка лучей, имеющий энергию $\frac{E}{2}$ и скорость c, равен $\frac{E}{2c}$.

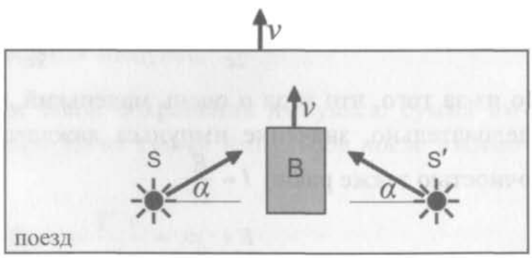
Мы немного изменим рассуждения Эйнштейна, но сохраним, конечно же, главную идею. Она состоит в следующем: Эйнштейн представляет, что два противоположных пучка лучей, S и S', сталкиваются с каким-то телом B, и он описывает, математически и физически, что происходит, или, лучше сказать, что он *видит*. Он делает это *два раза*: первый раз он, так сказать, находится вместе с телом B и с пучками S и S' в поезде, который едет со скоростью v, смотрит на столкновение пучков лучей с телом B и описывает, что он видит. То, что поезд едет, здесь не имеет значения: Эйнштейн видит, что тело B лежит (или висит в воздухе) неподвижно, в покое, и когда пучки лучей сталкиваются с ним, оно не движется, так как лучи сталкиваются с ним симметрично слева и справа. Потом Эйнштейн выходит из поезда и стоит на платформе, между тем как поезд едет мимо него со скоростью v. Эйнштейн смотрит на поезд, в котором пучки лучей опять сталкиваются с телом B, но этот раз он видит что-то другое. Факт столкновения тот же самый, но второе наблюдение отличается от первого. Наконец, он соединяет оба наблюдения — и получает свою формулу.

Первая ситуация выглядит так:

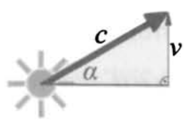


Предположим, что тело В имеет массу m_0. Его скорость равна 0, так как для наблюдателя в поезде оно находится в покое в воздухе. Значит, его импульс равен $m_0 \cdot 0 = 0$. Далее предположим, что оба пучка имеют энергию $\frac{E}{2}$ и, следовательно, импульс $\frac{E}{2c}$. А что происходит, если пучки сталкиваются с телом В? Оно «поглощает» их энергию, и его собственная энергия повышается на $\frac{E}{2} + \frac{E}{2} = E$. Но оно не движется, его скорость остается равной 0, и, следовательно, его импульс также равен 0. Это значит, что энергия пучков E превратилась не в движение тела В, а в его массу. Следовательно, масса тела В повысилась, и его новую массу назовем m_1. Только *насколько* масса повысилась, мы пока не знаем.

Теперь взглянем на то же самое событие, но этот раз с платформы. Поезд едет мимо нас со скоростью v, как и тело В. А частицы лучей мы видим летящими не горизонтально, а под неким углом α:

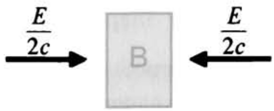


Этот угол α рассчитывается из уравнения $\frac{v}{c} = \sin\alpha$.

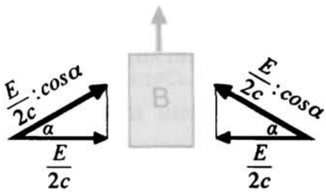


Но c — это очень большая скорость света, а v — сравнительно маленькая скорость поезда, и это значит, что α — очень маленький угол. Тогда $\sin\alpha$ имеет практически то же самое значение, что α. И мы можем записать просто $\frac{v}{c} = \alpha$.

Перед столкновением лучей с телом мы, глядя с платформы, описываем ситуацию таким образом: тело B имеет массу m_0. Его скорость равна v. Значит, импульс тела B равен m_0v. Далее: когда мы сидим в поезде, пучки лучей имеют импульс со значением $\frac{E}{2c}$ и *горизонтальное* направление:

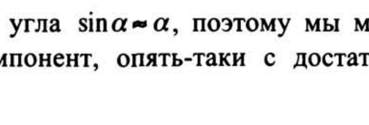


Смотря с *платформы*, мы видим, что направление импульсов больше не горизонтальное, и, следовательно, значение импульса на самом деле не $\frac{E}{2c}$, а $\frac{E}{2c}:\cos\alpha$.



Но из-за того, что угол α очень маленький, получается $\cos\alpha \approx 1$, и, следовательно, значение импульса каждого пучка с достаточной точностью также равно $I = \frac{E}{2c}$.

Вертикальный компонент этого импульса равен $\frac{E}{2c}\cdot\sin\alpha$, но для очень маленького угла $\sin\alpha \approx \alpha$, поэтому мы можем сказать, что вертикальный компонент, опять-таки с достаточной точностью, равен $\frac{E}{2c}\cdot\alpha$.



Раньше мы видели, что $\alpha = \frac{v}{c}$, поэтому вертикальный компонент импульса I каждого пучка равен

$$\frac{E}{2c}\cdot\alpha = \frac{E}{2c}\cdot\frac{v}{c} = \frac{E\cdot v}{2c^2}$$

Следовательно, пучки S и S' имеют вместе вертикальный импульс

$$2\cdot\frac{E\cdot v}{2c^2} = \frac{E\cdot v}{c^2}$$

Значит, система из тела B и пучков лучей S и S' имеет, если мы смотрим на ситуацию с платформы, *перед* столкновением импульс

$$m_0\cdot v + \frac{E\cdot v}{c^2}$$

После столкновения скорость тела B, как мы знаем из первого наблюдения, не изменилась, т. е. она до сих пор, если мы смотрим с платформы, равна v. А масса тела, как мы знаем, увеличилась и имеет новое значение m_1. Следовательно, глядя с платформы, мы определяем импульс тела B как $m_1\cdot v$. А пучки лучей? Их уже нет, поэтому $m_1\cdot v$ — единственный импульс.

Теперь мы применим закон сохранения импульса: сумма импульсов *до* взаимодействия равна сумма импульсов *после* взаимодействия. Мы получаем

$$m_0\cdot v + \frac{E\cdot v}{c^2} = m_1\cdot v$$

Разделим на v и изменим форму уравнения:

$$m_1 - m_0 = \frac{E}{c^2}$$

Разность $(m_1 - m_0)$ означает увеличение массы тела, и если мы обозначим это увеличение буквой m, мы получим $m = \frac{E}{c^2}$ или, наконец, знаменитую формулу

$$\boxed{E = m\cdot c^2}$$

Послесловие

Желательно, конечно, чтобы преподаватель не просто продемонстрировал эту дедукцию, но дал студентам-гуманитариям возможность думать, проверять и ставить вопросы, чтобы они обрели если не полное, то хотя бы приблизительное понимание. Желательно также приободрить студентов, если они признаются, что чувствуют себя в некоторых вопросах дураками. Можно процитировать им высказывание профессора Смилги: «Читая Фейнмана и других великих — Эйнштейна, Дирака, Ферми, — испытываешь смешанное чувство гордости за людей и некоторое грустно-завистливое восхищение. Понять-то их можно, но самостоятельно мыслить на таком уровне тебе, увы, не дано»[92].

Следует указать и на то, что, так как в этом уравнении c означает скорость света, множитель c^2 — это очень большое число, и это значит, что даже из маленькой массы m мы получаем огромную энергию E — один грамм массы позволяет, например, превратить 30 000 тонн воды в пар. И Эйнштейн спросил: «Если каждый грамм материи содержит такую огромную энергию, почему так долго это оставалось незамеченным? Ответ достаточно прост: до тех пор пока никакая энергия не выделяется вовне, она не может быть обнаружена. Это как если бы сказочно богатый человек никогда не потратил или не отдал ни цента; никто не мог бы сказать, насколько он богат»[93].

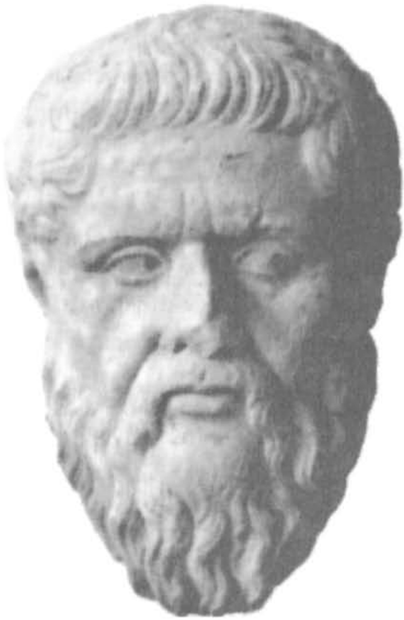
Можно также подискутировать о философско-мировоззренческом значении этой формулы и современной физики в целом. Окажется, что наш видимый, чувственный мир — это только то, что мы воспринимаем с помощью наших органов чувств, а мир физики — «тайное», «загадочное» явление, которое можно описывать только средствами высшей математики. В обыденной жизни мы находимся «в подземном жилище наподобие пещеры», видим только то, что у нас прямо перед глазами, и принимаем тени

---

[92] Смилга. Десять историй о математиках и физиках.

[93] Einstein. The Theory of Relativity and other Essays. P. 14.

за истину. И когда ученые показывают нам «настоящий мир», говорят, что раньше мы видели лишь пустяки, а теперь приблизились к бытию и обратились к более подлинному, — тогда — ну, вспомним, что нам рассказывал Платон…



Список используемой литературы

1. *Августин Блаженный.* О граде божием // Августин Блаженный. Творения: Собрание сочинений в 4-х томах. Т. III–IV. СПб.; Киев: Алетейя, 1998.
2. *Ансельм Кентерберийский.* Прослогион // Ансельм Кентерберийский. Сочинения. М.: Канон, 1995. С. 123–166.
3. *Антипенко Л. Г.* Сущность математического творчества в свете фундаментальной онтологии Хайдеггера // Математика и реальность. М.: Центр стратегической конъюнктуры, 2013. С. 7–10.
4. *Арсеньев Николай.* Об избыточествующей жизни (Мистика и Церковь) // *Путь.* 1926, № 3. С. 148–149.
5. *Аристотель.* Топика. Физика. О небе. О душе. Метафизика. Никомахова этика. Эвдемова этика. Риторика // Аристотель. Собрание сочинений в 4-х томах. М.: Наука, 1976–1983.
6. *Асмус В. Ф.* Платон. М.: Мысль, 1969.
7. *Афиней.* Пир мудрецов в пятнадцати книгах. Книги I–VIII. М.: Наука, 2004.
8. *Афонасин Е. В., Афонасина А. С., Щетников А. И.* Пифагорейская традиция. СПб.: РХГА, 2014.
9. *Баранец Н. Г., Веревкин А. Б.* О судьбе математических конструктивистских школ А. А. Маркова и Э. А. Бишопа // Философия математики: Актуальные проблемы — Математика и реальность. М., 2013. С. 215–218.
10. *Барвин И. И., Фрибус Е. А.* Старинные задачи. М.: Просвещение, 1994.
11. *Башмаков И. Г.* Древняя Греция // История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. М.: Наука, 1970. Т. 1. С. 58–105.
12. *Беркли Дж.* Аналитик, 1734 // Беркли Дж. Сочинения. М.: Мысль, 1978. С. 395–443.
13. *Бесконечность в математике*: философские и исторические аспекты / Под ред. А. Г. Барабашевой. М.: Янус-К, 1997.
14. *Богословский Г. Ю.* Финслерова геометрия и теория относительности. URL: http://kosmos-x.net.ru/publ/nauka/finslerova_geometrija_i_teorija_otnositelnosti/14-1-0-206
15. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М.: URSS, 2010.
16. *Бурлака Д. К.* Мышление и Откровение. СПб.: РХГА, 2007.

17. *Бурлака Д. К.* Метафизика культуры. Опыт систематизации идей русских религиозных мыслителей. (Автореферат). СПб, 2008.
18. *Бурлака Д. К.* Метафизика культуры. СПб.: РХГА, 2009.
19. *Быстров М. В.* Знал ли Платон о «золотой пропорции»? // Доклад. XXI Всероссийская конференция «Универсум платоновской мысли». Санкт-Петербург. 26–27 июня 2013 г.
20. *Ван Хао, Мак-Нотон Р.* Аксиоматические системы теории множеств. М.: Издательство иностранной литературы, 1963.
21. *Ван дер Варден Б. Л.* Пробуждающаяся Наука (Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции). М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.
22. *Вейль Г.* О философии математики. М.: URSS (КомКнига), 2005.
23. *Вечтомов Е. М.* Математическая реальность и действительность // Математика и реальность: Тезисы Третьей всероссийской научной конференции, 27–28 сентября 2013 г. М.: Центр стратегической конъюнктуры, 2013. С. 23–27.
24. *Витгенштейн Л.* Культура и ценность // Философские работы. Ч. I. М.: Гнозис, 1994.
25. *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат // Философские работы. Ч. I. М.: Гнозис, 1994.
26. *Витгенштейн Л.* Замечания по основаниям математики // Философские работы. Ч. II. Кн. 1. М.: Гнозис, 1994.
27. *Выгодский М. Я.* Арифметика и алгебра в древнем мире. Издание второе. М.: Наука, 1967.
28. *Гайденко П. П.* Обоснование научного знания в философии Платона // Платон и его эпоха. К 2499-летию со дня рождения. М.: Наука, 1979. С. 98–143.
29. *Гайденко П. П.* История греческой философии в ее связи с наукой. М.: Наука, 1980.
30. *Гегель Г. В. Ф.* Лекции по истории философии. Сочинения. Т. X. М.: Партийное издательство, 1932.
31. *Гегель Г. Ф. В.* Наука логики. В трех томах. Т. I. М.: Мысль, 1970.
32. *Гегель Г. В. Ф.* Энциклопедия философских наук. Т. 2: Философия природы. М.: Мысль, 1975.
33. *Гейтинг А.* Интуиционизм. М.: Мир, 1965.
34. *Гете И. В.* Судьба печатного текста // Избранные сочинения по естествознанию. Издательство академии наук СССР, 1957.
35. *Гильберт Д.* Основания геометрии. Петроград: Сеятель, 1923.

36. *Гильберт Д.* Основания геометрии (с добавлениями). М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948.

37. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. М.: Наука, 1979.

38. *Гроссман Л.* Мастера слова // Собрание сочинений в пяти томах. Т. IV. М.: Кн-во «Современные проблемы», 1928.

39. *Гуревич Л.* Литература и эстетика. Критические опыты и этюды. М.: Русская мысль, 1912.

40. *Гуссерль Э.* Логические исследования. Т. 1: Пролегомены к чистой логике. М.: Академический Проект, 2011.

41. *Декарт Р.* Геометрия. 1637 // Декарт Р. Геометрия. М.: Гостехиздат, 1938.

42. *Диоген Лаэртский.* О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов. М.: Наука, 1986.

43. *Евклид.* Начала. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948.

44. *Еремеев В. Е.* Теория психосемиозиса и древняя антропокосмология. М.: АСМ, 1996.

45. *Еровенко В. А.* Надо ли студентам-философам изучать идеологию и методологию математики? // Философия математики, 2013. С. 239–242.

46. *Жмудь Л. Я.* Наука, философия и религия в раннем пифагореизме. СПб.: ВГК, 1994.

47. *Жуков А. В.* Прометеева искра. Античные истоки искусства математики. М.: URSS, 2012.

48. *Жуков Н. И.* Философские основания математики. Минск: Университетское, 1990.

49. *Иванова-Гладильщикова Н.* Заниматься математикой — это в некотором смысле воспевать жизнь // Русский Журнал. 18.04.2013. URL: http://www.russ.ru/Mirovaya-povestka/Zanimatsya-matematikoj-eto-v-nekotorom-smysle-vospevat-zhizn

50. *Ивин А. А.* Проблема истины в математике // Философия математики, 2013. С. 45–48.

51. *История математики* с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А. П. Юшкевича. Т. I. М.: Наука, 1970.

52. *Йегер В.* Пайдейя: Воспитание античного грека. Т. 2. М.: Греко-латинский кабинет Ю. А. Шичалина, 1997.

53. *Калужнин Л. А.* Что такое математическая логика? М.: Наука, 1964.

54. *Кант И.* Всеобщая естественная история и теория неба // Сочинения в шести томах. Т. 1. М.: Мысль, 1963.

55. *Кант И.* Критика чистого разума // Сочинения в шести томах. Т. 3. М.: Мысль, 1964.

56. *Кант И.* Критика практического разума // Сочинения в шести томах. Т. 4. Ч. 1. М.: Мысль, 1965.

57. *Кант И.* Пролегомены ко всякой будущей метафизике, могущей появиться как наука // Сочинения в шести томах. Т. 4. Ч. 1. М.: Мысль, 1965.

58. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985.

59. *Карпунин В. А.* Актуальная бесконечность и некоторые традиционные аргументы в пользу бытия Божия // Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты. М.: Янус-К, 1997. С. 345–358.

60. *Катречко С. Л.* Трансцендентальный конструктивизм как программа обоснования математики и как новый тип онтологии // Философия математики. 2013. С. 171–174.

61. *Кереньи К.* Элевсин: Архетипический образ матери и дочери. М.: Рефл-бук, 2000.

62. *Кессиди Ф. Х.* Предисловие // Платон и его эпоха. К 2400-летию со дня рождения. М.: Наука, 1979. С. 3–8.

63. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. I. М.; Л.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП, 1937.

64. *Клюйков С. Ф.* Идеалы. Мариуполь: Новый мир, 2009.

65. *Клюйков С. Ф., Клюйков Р. С.* Идеальная математика Платона. Мариуполь: Копи-Принт, 2011.

66. *Козлова М. С.* Проблемы оснований математики. (К публикации заметок Л. Виттенштейна) // Людвиг Витгенштейн. Философские работы. Ч. II. Кн. 1. М.: Гносис, 1994.

67. *Колмогоров А. Н.* Математика — наука и профессия. М.: Наука, 1988.

68. *Кольман Э. Я.* История математики в древности. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.

69. *Кондратьева Г. В.* К вопросу о строгости курса школьной математики в контексте времени, которое отводится на изучение предмета // Философия математики. 2013. С. 249–254.

70. *Кричевец А. Н.* В какой математике возможны стили математического мышления? // Стили в математике. Социокультурная философия математики. СПб.: РХГИ, 1999.

71. *Куайн У.* С точки зрения логики. М.: Канон⁺, 2010.

72. *Кузанский Николай.* Об ученом незнании // Николай Кузанский. Сочинения в двух томах. Т. 1. М.: Мысль, 1979. С. 47–185.

73. *Кускова С. М.* Проблема единственности натурального ряда // Философия математики. 2013. С. 132–136.

74. *Ламарк Ж.-Б.* Избранные произведения. Т. 2. М.: Издательство академии наук СССР, 1959.

75. *Лаплас П. С.* Изложение системы мира. Л.: Наука, 1982.

76. *Ленин В. И.* Материализм и эмпириокритицизм: Полное собрание сочинений. Т. 18. М.: Издательство политической литературы, 1968.

77. *Ленин В. И.* О значении воинствующего материализма: Полное собрание сочинений. Т. 45. М.: Издательство политической литературы, 1970. С. 23–33.

78. *Лосев А. Ф.* Платоновский объективный идеализм и его трагическая судьба // Платон и его эпоха. К 2400-летию со дня рождения. М.: Наука, 1979. С. 9–57.

79. *Лосев А. Ф., Тахо-Годи А. А.* Платон — Аристотель. М.: Молодая Гвардия, 1993.

80. *Лосский Н.* «Мифическое» и современное научное мышление // Путь. 1928, № 14. С. 31–55.

81. *Маркс К.* Математические рукописи. М.: Наука, 1968.

82. *Медведева Е. Е.* Витгенштейн versus платонизм в математике // Философия математики. 2013. С. 140–144.

83. *Мень А.* История религии. М.: Слово, 1992. Т. IV.

84. *Михайлова Н. В.* Проблема обоснования современной математики в контексте новых философско-метологических кризисов // Философия математики. 2013. С. 186–190.

85. *Молодший В. Н.* Очерки по философским вопросам математики. М.: Просвещение, 1969.

86. *Мордухай-Болтовской Д. Д.* Комментарии к книге I «Начал» // Начала Евклида. Кн. I–VI. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. С. 221–294.

87. *Мордухай-Болтовской Д. Д.* Философия — Психология — Математика. М.: Серебряные Нити, 1998.

88. *Мочалова И. Н.* Метафизика ранней академии и проблемы творческого наследия Платона и Аристотеля // АКАДНМЕIA. 2000, Выпуск 3. С. 226–348.

89. *Нейгебауэр О.* Точные науки в древности. М.: Наука, 1968.

90. *Ницше Ф.* По ту сторону добра и зла // Ницше Ф. Полное собрание сочинений в 13 томах. Т. 5. С. 9–231.

91. *Орлов А. И., Луценко Е. В.* О развитии системной нечеткой интервальной математики // Философия математики, 2013. С. 190–193.

92. *Панов В. Ф.* Математика древняя и юная. М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006.

93. *Паршин А. Н.* Идеальные числа Платона // Выступление на международной конференции «Владимир Соловьев и культура Серебряного века», 14 октября 2003 на Арбате. URL: old.bfrz.ru/news/rus_filos/rezume_organizator/parshin/parshin5.pdf

94. *Перязев Н. А.* О специализации в математическом образовании // Философия математики, 2013. С. 255–257.

95. *Плотин.* Эннеады // Плотин. Эннеады I–VI. СПб.: Издательство Олега Абышко, 2004–2005.

96. *Плутарх.* Сравнительные жизнеописания в двух томах. М.: Правда, 1987.

97. *Поздняков С. Н.* Платон и Элевсинские мистерии. *ИНТЕЛРОС* — Интеллектуальная Россия. 2010. № 3.

98. *Поппер К. Р.* Объективное знание. Эволюционный подход. М.: Эдиториал УРСС, 2002.

99. *Прокл Диадох.* Комментарий к первой книге «Начал» Евклида. М.: Русский фонд содействия образованию и науке, 2013.

100. *Протопопов Ю. К.* Философские проблемы развития математики. М.: Высшая школа, 1983.

101. *Раик А. Е.* Очерки по истории математики в древности. Издание второе. Саранск: Мордовское книжное издательство, 1977.

102. *Рассел Б.* История западной философии и ее связи с политическими и социальными условиями от античности до наших дней. Издание 3-е, исправленное. Новосибирск: Издательство Новосибирского Университета, 2001.

103. *Реале Дж., Антисери Д.* Западная философия от истоков до наших дней: В 4-х тт. Т. I: Античность. СПб.: Петрополис; Пневма, 1997.

104. *Реньи А.* Диалоги о математике. М.: URSS, 2010.

105. *Родин А. В.* Математика Евклида в свете философии Платона и Аристотеля. М.: Наука, 2003.

106. *Рожанский И. Д.* Платон и современная физика // Платон и его эпоха. К 2400-летию со дня рождения. М.: Наука, 1979. С. 144–171.

107. *Розов М. А.* О стиле в науках // Стили в математике. Социокультурная философия математики. СПб.: РХГИ, 1999.

108. *Светлов Р. В.* Русский Платон. Платонизм в русской культуре // Платон: Pro et contra. СПб.: РХГА, 2001.

109. *Светлов Р. В.* Доказательства Бытия Бога в свете проблемы теодицеи // Вестник Русской христианской гуманитарной академии. 2008. Т. 9. № 2. С. 51–61.

110. *Светлов Р. В.* Тувал-Каин, Гиппий, Платон и возможные ближневосточные корни образа софиста в одноименном диалоге Платона // Вестник Русской христианской гуманитарной академии. 2012. Т. 13. № 3. С. 44–51.

111. *Секст Эмпирик.* Против ученых // Секст Эмпирик. Сочинения в двух томах. М.: Мысль, 1976. С. 7–207.

112. *Сенека.* О природе. Философские трактаты. Издание второе. СПб.: Алетейя, 2001.

113. *Смилга В. П.* Десять историй о математиках и физиках // Природа. 1998. № 10–12.

114. *Смилга В. П.* Как начиналась геометрия. URL: http://ega-math.narod.ru/Quant/Smilga.htm

115. *Сокулер З. А.* Интерпретация Виттенштейном теоремы Геделя и диагональной процедуры Кантора // Философия математики. 2013. С. 152–154.

116. *Субботин А. И.* Субстанциальная и операциональная реальности в математических преобразованиях (педагогический аспект) // Философия математики. 2013. С. 260–263.

117. *Султанова Л. Б.* Роль интуиции и неявного знания в формировании стиля математического мышления // Стили в математике. Социокультурная философия математики. СПб.: РХГИ, 1999.

118. *Сухотин А. К.* Философия математики. Учебное пособие. URL: http://ido.tsu.ru/other_res/hischool/filmatem/

119. *Сычева Л. С.* Философия математики на пути от философии к науке // Философия математики. 2013. С. 158–161.

120. *Тахо-Годи А. А.* Миф у Платона как действительное и воображаемое // Платон и его эпоха. К 2400-летию со дня рождения. М.: Наука, 1979. С. 58–82.

121. *Тахо-Годи А. А.* Примечания. Платон. Диалоги. М.: Мысль, 1986.
122. *Тахо-Годи А. А.* Греческая мифология. М.: Искусство, 1989.
123. *Теон Смирнский.* Изложение математических предметов, полезных при чтении Платона // Пифагорейская традиция. СПб.: РХГА, 2014. С. 423–533.
124. *Тит Лукреций Кар.* О природе вещей // Лукреций. О природе вещей: Билингва. М.: Издательство ЛКИ, 2011.
125. *Уайтхед А. Н.* Избранные работы по философии. М.: Прогресс, 1990.
126. *Федин С. Н.* Математики тоже шутят. М.: URSS, 2010.
127. *Философия математики: Актуальные проблемы* — Математика и реальность / Под ред. В. А. Бажанова. М.: Центр стратегической конъюнктуры, 2013.
128. *Фрагменты* ранних греческих философов. От эпических теокосмогоний до возникновения атомистики. М.: Наука, 1989.
129. *Франк С. Л.* Религия и Наука в современном сознании // Путь. 1926. № 4. С. 145–156.
130. *Фрейсинэ Ш. Л.* Очерки по философии математики. М.: URSS, 2010.
131. *Френкель А. А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М.: Мир, 1966.
132. *Хаханян В. Х.* О тезисе Черча и принципе униформизации // Философия математики. 2013. С. 203–206.
133. *Целлеръ Э.* Очеркъ истории греческой философии. М., 1912.
134. *Цофнас А. Ю.* Вопрос о природе числа не имеет значения // Философия математики. 2013. С. 103–106.
135. *Чагров А. В.* Бесконечность, всеведение, теоремы Геделя о неполноте // Философия математики. 2013. С. 206–209.
136. *Чистяков В. Д.* Три знаменитые задачи древности. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1963.
137. *Шапошников В. А.* Математическая мифология и пангеометризм // Стили в математике. Социокультурная философия математики. СПб.: РХГИ, 1999.
138. *Шапошников В. А.* Натурализм и современная философия математики // Философия математики. 2013. С. 161–165.
139. *Шаталович И. В.* Эвристический потенциал эстетических идей Платона в контексте современного естествознания // Доклад на

XXI всероссийской конференции «Универсум платоновской мысли». Санкт-Петербург. 26–27 июня 2013 г.

140. *Шмонин Д. В.* «Поощрение разума и корень наук»: И. С. Рижский и начало преподаваия философии в Санкт-Петербургском горном училище // Вестник Русской христианской гуманитарной академии. 2008. Т. 9. № 2. С. 165–171.

141. *Шопенгауэр А.* Мир как воля и представление (1819) // Собрание сочинений в пяти томах. Т. 1. М.: Московский клуб, 1992.

142. *Шопенгауэр А.* Мир как воля и представление. Т. 2 (1844) // Собрание сочинений в шести томах. Т. 2. М.: Республика, 2001.

143. *Шпенглер О.* Закат Европы. Т. 1. М.: Мысль, 1993.

144. *Штельцер М.* Символика Чисел. СПб.: РХГИ, 1998.

145. *Щетников А. И.* Алгоритм разворачивания всех числовых отношений из отношения равенства и идеальные числа Платона // *ΣΧΟΛΗ*. 2008. Vol. II. 1. 2008.

146. *Щетников А. И.* Введение к главе «Теон Смирнский» // Пифагорейская традиция. СПб.: РХГА, 2014. С. 418–423.

147. *Эйлер Л.* Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях. СПб.: Наука, 2002.

148. *Элиаде М.* История веры и религиозных идей: От каменного века до элевсинсих мистерий. М.: Критерион, 2002.

149. *Энгельс Ф.* Анти-Дюринг // Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения. Издание второе. М.: Государственное издательство политической литературы, 1961. Т. 20. С. 5–338.

150. *Энгельс Ф.* Диалектика природы: Заметки и фрагменты // Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения. Издание второе. М.: Государственное издательство политической литературы, 1961. Т. 20. С. 343–626.

151. *Юшкевич А. П.* (ред.). История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В трех томах. М.: Наука, 1970.

152. *Яглом И. М.* Математика и реальный мир. М.: URSS, 2006.

153. *Яшин Б. Л.* Этноматематика и природа базовых понятий математики // Философия математики. 2013. С. 165–169.

---

154. *Artmann B., Mueller I.* Plato and Mathematics // Mathematische Semesterberichte. 44 (1). P. 1–17.

155. *Artmann B., Schäfer L.* On Plato's «Fairest Triangles» (*Timaeus* 54a) // Historia Mathematica. 1993. Vol. 20. P. 255–264.

156. *Baeumker C.* Der Platonismus im Mittelalter // Platonismus in der Philosophie des Mittelalters, hrsg. von Werner Beierwaltes. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1969.
157. *Barrow J. D.* Ein Himmel voller Zahlen. Auf den Spuren mathematischer Wahrheit. Heidelberg; Berlin; Oxford: Spektrum Akademischer Verlag, 1994.
158. *Beck H.* Philosophie der Technik. Trier: Spee Verlag, 1969.
159. *Becker O.* Mathematische Existenz // Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung. 8, 1927. S. 441–809.
160. *Becker O.* Grösse und Grenze der mathematischen Denkweise. Freiburg: Karl Alber, 1959.
161. *Becker O.* Versuch einer neuen Interpretation der platonischen Ideenzahlen // Archiv für Geschichte der Philosophie. 45. 1963. Heft 2. S. 119–124.
162. *Bell E. T.* Die grossen Mathematiker. Düsseldorf: Econ, 1967.
163. *Benecke A.* Ueber die geometrische Hypothesis in Platons Menon. Elbing: C. Meissner, 1867.
164. *Benz A.* Schöpfungserfahrungen in einem sich entwickelnden Universum // Schöpfungsglaube, Naturwissenschaft und Spiritualität im Dialog, hrsg. von C. Rutishauser. Zug CH: Lassalle-Haus, 2008. S. 35–48.
165. *Benz A.* Das geschenkte Universum. 2. Auflage. Ostfildern: Patmos Verlag, 2010.
166. *Benz E.* Die Vision. Stuttgart: Ernst Klett, 1969.
167. *Berger M.* Proportion bei Platon. Trier: Wissenschaftlicher Verlag, 2003.
168. *Bernays P.* Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik // Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 31, 1922. S. 10–19.
169. *Bernays P.* Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik // Die Naturwissenschaften. 10, 1922. S. 93–99.
170. *Bernays P.* Sur le platonisme dans les mathématiques // L'Enseignement mathématique. 34, 1935.
171. *Bernays P.* Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1976.
172. *Beth E. W.* L'éxistence en mathématiques. Paris: Gauthier-Villars, 1956.

173. *Beth E. W.* The Foundations of Mathematics. Amsterdam: North Holland, 1968.

174. *Beyel Ch.* Der mathematische Gedanke in der Welt. Meiringen: Walter Loepthien, o.J.

175. *Bolzano B.* Paradoxien des Unendlichen. Leipzig: C. H. Reclam, 1851.

176. *Breger H.* A Restoration that Failed: Paul Finsler's Theory of Sets // Donald Gillies (ed.). Revolutions in Mathematics. Oxford: Clarendon Press, 1992. P. 249–264.

177. *Bretschneider C. A.* Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Leipzig: B. G. Teubner, 1870.

178. *Brisson L.* Platon. Lettres. Paris: Flammarion, 1987.

179. *Brouwer L. E. J.* Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie // Crelles Journal. Bd. 154. 1925. S. 1–7.

180. *Brouwer L. E. J.* Mathematik, Wissenschaft und Sprache // Monatshefte für Mathematik und Physik. 36, 1929. S. 153–164.

181. *Brown J. R.* Philosophy of Mathematics. Second Edition. New York: Routledge, 2008.

182. *Brown M.* Plato on Doubling the Cube: Politicus 266ab // Plato, Time and Education. Essays in Honour of Robert S. Brumbaugh. Albany: State University of New York Press, 1987. P. 43–60.

183. *Brumbaugh R. S.* Plato's Mathematical Imagination. The Mathematical Passages in the Dialogues and Their Interpretation. Bloomington: Indiana University Press, 1954.

184. *Buber M.* Die Geschichten des Rabbi Nachman. Gütersloh: Gütersloher Verlagshaus, 1999.

185. *Burckhardt J. J.* Zur Neubegründung der Mengenlehre // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 48. 1938. S. 146–165; 49, 1939. S. 146–155.

186. *Burnyeat M. F.* The Philosophical Sense of Theaetetus' Mathematics // Isis. 69, 1978. P. 489–513.

187. *Burnyeat M. F.* Platonism and Mathematics // Mathematics and Metaphysics in Aristotle. Ed. by Andreas Graeser. Bern; Stuttgart: Paul Haupt, 1987. P. 213–240.

188. *Bury R. G.* Plato VII. London: William Heinemann, 1966.

189. *Cantor G.* Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten // Georg Cantor. Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Hildesheim: Georg Olms, 1966.

190. *Capra F.* Wendezeit — Bausteine für ein neues Weltbild. Bern; München; Wien: Scherz Verlag, 1983[6].

191. *Carnap R.* Grundlagen der Logik und Mathematik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1975.

192. *Carrier M., Mittelstrass J.* Johannes Kepler (1571–1630) // Klassiker der Naturphilosophie, hrsg. von Gernot Böhme. München: C. H. Beck, 1989.

193. *Cherniss H.* The Riddle of the Early Academy. Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1945.

194. *Cherniss H.* Plato as Mathematician // The Revue of Metaphysics. Vol. IV. No. 3. March 1951. P. 395–425.

195. *Cohen H.* Platons Ideenlehre und die Mathematik. Marburg: N. G. Elwert'sche Verlagsbuchhandlung, 1879.

196. *Colerus E.* Von Pythagoras bis Hilbert. Wien: Paul Zsolnay Verlag, 1951.

197. *Colloud-Streit M.* Fünf platonische Mythen im Verhältnis zu ihren Textumfeldern. Fribourg: Academic Press, 2005.

198. *Courant R.* Über die allgemeine Bedeutung des mathematischen Denkens // Die Naturwissenschaften. 16. Jahrgang, 1928. Heft 6. S. 89–94.

199. *Dantzig D.* Is $10^{10^{10}}$ a finite number? // Dialectica. 9. 1955. P. 273–277.

200. *Davis P.* Fidelity in Mathematical Discourse: Is One and One really Two? // American Mathematical Monthly. Vol. 79, 1972.

201. *Dedekind R.* Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig: Friedrich Vieweg, 1893.

202. *Dewdney A. K.* Reise in das Innere der Mathematik. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser Verlag, 2000.

203. *Diels H.* Die Fragmente der Vorsokratiker. Berlin: Weidmannsche Buchhandlung, 1906.

204. *Dimou N.* Über das Unglück, ein Grieche zu sein. München: Antje Kunstmann, 2012.

205. *Dönt E.* Platons Spätphilosophie und die Akademie. Wien: Hermann Böhlaus Nachf., 1967.

206. *Dürr H., Oesterreicher M.* Wir erleben mehr als wir begreifen. Quantenphysik und Lebensfragen. Freiburg im Breisgau: Herder, 6. Auflage, 2013.

207. *Eggimann E.* Jesus-Texte. Zürich: Arche, 1972.

208. *Einstein A.* An Elementary Derivation of the Equivalence of Mass and Energy. Technion Journal, New York 1946. Переиздание: Einstein A. The Theory of Relativity and other Essays. New York: Carol Publishing Group, 1996. P. 70–73.

209. *Euler L.* Rettung der Göttlichen Offenbahrung wider die Einwürfe der Freygeister. Berlin: Haude und Spener, 1747.

210. *Feldhaus F. M.* Die Maschine im Leben der Völker. Basel: Birkhäuser Verlag, 1954.

211. *Feyerabend P.* Über Erkenntnis. Frankfurt am Main: Campus, 1992.

212. *Feyerabend P.* Die Torheit der Philosophen. Hamburg: Junius, 1995.

213. *Finsler P.* Gibt es Widersprüche in der Mathematik? // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 34. 1925. S. 143–155.

214. *Finsler P.* Formale Beweise und die Entscheidbarkeit // *Mathematische Zeitschrift* 25, 1926. S. 676–682.

215. *Finsler P.* Über die Grundlegung der Mengenlehre I // Mathematische Zeitschrift. 25. 1926. S. 683–713.

216. *Finsler P.* Über die Grundlegung der Mathematik // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 36. 1927.

217. *Finsler P.* Über die Lösung von Paradoxien // Philosophischer Anzeiger. 2, 1927/28. S. 183–192, 202–203.

218. *Finsler P.* Die Existenz der Zahlenreihe und des Kontinuums // Commentarii Mathematici Helvetici. 5. 1933. S. 88–94.

219. *Finsler P.* Diskussionsvotum. A propos de la discussion sur les fondements de mathématiques // Les Entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6–9 décembre 1938. Zürich: Leemann, 1941. P. 157–159.

220. *Finsler P.* A propos de la discussion sur les fondements de mathématiques // Les Entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6–9 décembre 1938. Zürich: Leemann, 1941. P. 162–180.

221. *Finsler P.* Gibt es unentscheidbare Sätze? // Commentarii Mathematici Helvetici. 16. 1943–1944. S. 310–320.

222. *Finsler P.* Die Unendlichkeit der Zahlenreihe // Elemente der Mathematik. 9. 1954. S. 29–35.

223. *Finsler P.* Der platonische Standpunkt in der Mathematik // Dialectica. 10. 1956. S. 250–255.

224. *Finsler P.* Und doch Platonismus. Dialectica. 10. 1956. S. 266–270.

225. *Finsler P.* Briefwechsel mit Paul Lorenzen. Dialectica. 10. 1956. S. 271–277.

226. *Finsler P.* Vom Leben nach dem Tode. Neujahrsblatt auf das Jahr 1958. Zum Besten des Waisenhauses Zürich herausgegeben von der Gelehrten Gesellschaft. 121. Stück. Zürich: Beer & Co., 1958.

227. *Finsler P.* Über die Grundlegung der Mengenlehre. Zweiter Teil: Verteidigung. *Commentarii Mathematici Helvetici* 38, 1963/64. S. 172–218.

228. *Finsler P.* Über die Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese // Dialectica. 23. 1969. S. 67–78.

229. *Forster T.* Review of «Finsler Set Theory» // Studia Logica. 1997. P. 1–4.

230. *Fowler D.* The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction. Second Edition. Oxford: Clarendon Press, 2003.

231. *Fraenkel A.* Das Problem des Unendlichen in der neueren Mathematik // Blätter für deutsche Philosophie. Band 4. 1930/31. S. 279–297.

232. *Fraenkel A.* Sur la notion d'existence dans les mathématiques // L'Enseignement mathématique. 34. 1935.

233. *Fraenkel A.* Philosophie der Mathematik // Die Philosophie im XX. Jahrhundert, hrsg. von Fritz Heinemann. Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 1959. S. 334–357.

234. *Frank E.* Die Philosophie von Jaspers // Karl Jaspers in der Diskussion, hrsg. von Hans Saner. München: R. Piper Verlag, 1973. S. 111–124.

235. *Frede M.* Wissen und Bildung in der Antike // Zeitschrift für philosophische Forschung. Band 66. 2012. Heft 2. S. 169–186.

236. *Frege G.* Was ist eine Funktion? // Gottlob Frege. Funktion, Begriff, Bedeutung. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1962. S. 79–88.

237. *Frege G.* Grundgesetze der Arithmetik I–II. Hildesheim: Georg Olms, 1962.

238. *Frege G.* Begriffsschrift und andere Aufsätze. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1964.

239. *Fries J. F.* Platons Zahl, de Republica 1.8. p. 546. Steph. Eine Vermuthung. Heidelberg: Christian Friedrich Winter, 1823.

240. *Fritz K.* Platon, Theaetet und die antike Mathematik // Philologus. Bd. LXXXVII. 1932. Neudruck Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1969.

241. *Fritz K.* The Philosophical Passage in the Seventh Platonic Letter and the Problem of Plato's "Esoteric" Philosophy // Essays in ancient Greek philosophy. I. 1971. P. 408–450.

242. *Fritz K.* Zur Frage der "esoterischen" Philosophie Platons // Kurt von Fritz. Schriften zur griechischen Logik. Band 1: Logik und Erkenntnistheorie. Stuttgart: Friedrich Frommann, 1978.

243. *Fritz K.* Philologische und philosophische Interpretation philosophischer Texte. Schriften zur griechischen Logik. Band 1: Logik und Erkenntnistheorie. Stuttgart: Friedrich Frommann, 1978.

244. *Fritz K.* Western philosophy — Ancient Greek and Roman Philosophy — Epistemology of Appearance // Encyclopædia Britannica.

245. *Froese N.* Pythagoras & Co. — Griechische Mathematik vor Euklid. 2010. Доступ: http://www.antike-griechische.de

246. *Gaiser K.* Platons Menon und die Akademie // Archiv für Geschichte der Philosophie. Vol. 46. 1964. S. 241–292.

247. *Gauss C. F.* Werke. Bd. X/1. Leipzig: B. G. Teubner, 1917.

248. *Gigon O.* Die Unseligkeit des Tyrannen in Platons Staat (577c–588a) // Museum Helveticum. 45. 1988. S. 129–153.

249. *Gödel K.* Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I // Monatshefte für Mathematik. Vol. 38. 1931. S. 173–198.

250. *Gray J.* Plato's Ghost. The Modern Transformation of Mathematics. Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2008.

251. *Gronau D.* Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik. Graz: Institut für Mathematik der Karl-Franzens-Universität, 2009.

252. *Gross H.* Nachruf auf Paul Finsler // Elemente der Mathematik. 26. Jahrgang 1971. Heft 1. S. 19–20.

253. *Grundlagen der modernen Mathematik*; hrsg. von Herbert Meschkowski. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1972.

254. *Gut B. J.* Inhaltliches Denken und formale Systeme. Oberwil bei Zug (CH): Verlag Rolf Kugler, 1979.

255. *Haase R.* Der messbare Einklang. Grundzüge einer empirischen Weltharmonik. Stuttgart: Ernst Klett, 1976.

256. *Hamilton W.* Ueber den Werth und Unwerth der Mathematik als Mittel der höheren geistigen Ausbildung. Cassel: Verlag von J. J. Bohné, 1836.

257. *Harris W.* Plato — Mathematician or Mystic? URL: www.middlebury.edu/~harris

258. *Hausdorff F.* Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen // Mathematische Annalen. 75. Bd. 1914, 3. Heft. S. 428–433.

259. *Hausdorff F.* Gesammelte Werke Band II: Grundzüge der Mengenlehre. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 2002.

260. *Heath T. L.* The Thirteen Books of Euclid's Elements, Vol. 1. New York: Dover Publications, 1925^2.

261. *Heath T. L.* A History of Greek Mathematics. Vol. 1: From Thales to Euclid. Mineola, New York: Dover Publications, 1981.

262. *Hegel G. W. F.* Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundrisse. 3. Auflage 1830. Berlin: Holzinger, 2013.

263. *Hegel G. W. F.* Wissenschaft der Logik. Berlin: Duncker und Humboldt, 1841.

264. *Heiberg L.* Eine neue Archimedeshandschrift // Hermes: Zeitschrift für Philologie. Bd 42. 1907. S. 235–303.

265. *Heidegger M.* Platon: Sophistes. Gesamtausgabe II. Abteilung, Band 19. Frankfurt am Main: Vittorio Klostermann, 1992.

266. *Heisenberg W.* Die Plancksche Entdeckung und die philosophischen Grundfragen der Atomlehre. Die Naturwissenschaften. Jahrgang 45. 1958. Heft 10. S. 227–234.

267. *Heisenberg W.* Elementarteilchen und Platonische Philosophie // Werner Heisenberg. Der Teil und das Ganze. München: Piper Verlag, 1969.

268. *Heisenberg W.* Rede zur 100-Jahrfeier des Max-Gymnasiums // Werner Heisenberg. Schritte über Grenzen. München; Zürich: R. Piper, 1977^4.

269. *Heisenberg W.* Die Bedeutung des Schönen in der exakten Naturwissenschaft // Werner Heisenberg. Schritte über Grenzen. München; Zürich: R. Piper, 1977^4.

270. *Heisenberg W.* Das Naturgesetz und die Struktur der Materie // Werner Heisenberg. Schritte über Grenzen. München; Zürich: R. Piper, 1977^4.

271. *Heitler W.* Der Mensch und die naturwissenschaftliche Erkenntnis. Braunschweig: Vieweg, 1966^4.

272. *Heitler W.* Der Bildungswert der Naturwissenschaft // Walter Heitler. Naturphilosophische Streifzüge. Braunschweig: Vieweg, 1970.

273. *Heitler W.* Wahrheit und Richtigkeit in den exakten Wissenschaften // Akademie der Wissenschaften und der Literatur — Abhandlungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse. Jahrgang 1972. Nr. 3.

274. *Heitler W.* Die Natur und das Göttliche. Zug: Klett & Balmer, 1974.

275. *Heitler W.* Schöpfung — Die Öffnung der Naturwissenschaft zum Göttlichen. Zürich: Verlag Die Arche, 1979.

276. *Heitsch E.* Platon, Grösserer Hippias, Übersetzung und Kommentar. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 2011.

277. *Heitsch W.* Mathematik und Weltanschauung. Berlin: Akademie-Verlag, 1976.

278. *Held D.* Die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen // Forschungsmagazin der Johannes Gutenberg-Universität Mainz. 1/86.

279. *Hellwig D.* Adikia in Platons «Politeia». Interpretationen zu den Büchern VIII und IX. Amsterdam: B. R. Grüner, 1980.

280. *Hermes H.* Hundert Jahre formale Logik. Opladen: Westdeutscher Verlag, 1977.

281. *Heyting A.* Intuitionism — An Introduction. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1956.

282. *Hilbert D.* Naturerkennen und Logik // Die Naturwissenschaften. 18. 1930. S. 959–963.

283. *Hilbert D.* Über das Unendliche // Hilbertiana. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1964. S. 79–108.

284. *Hobbes T.* Paralogisms. The English Works of Thomas Hobbes. Vol. VII, London: Routledge/Thoemmes Press, 1997.

285. *Holcombe C. J.* Truth in Mathematics. 2007. URL: http://www.textetc.com/theory/truth-in-mathematics.html

286. *Husserl E.* Logische Untersuchungen. Tübingen: Max Niemeyer, 1921^2. Bd II/2.

287. *Hüther G.* Biologie der Angst. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 11. Auflage 2012.

288. *Ingensiep H. W.* Geschichte der Pflanzenseele — Philosophische und biologische Entwürfe von der Antike bis zur Gegenwart. Stuttgart: Kröner, 2001.

289. *Jaeger W.* Paideia – Die Formung des griechischen Menschen. Berlin: Walter de Gruyter. 1. Bd 1936^2; 2. Bd 1944; 3. Bd 1947.

290. *Jonath E.* Quantik. Wiedererwägungen zu Zahl und Zeit. Oberwil: Verlag Rolf Kugler, 1982.

291. *Jungius J.* Über den propädeutischen Nutzen der Mathematik für das Studium der Philosophie // Beiträge zur Jungius-Forschung; Festschrift der Hamburgischen Universität anläßlich ihres zehnjährigen Bestehens, hrsg. von Adolf Meyer. Hamburg: Paul Hartung Verlag, 1929.

292. *Kant I.* Der Streit der Fakultäten. Erster Abschnitt: Der Streit der philosophischen Fakultät mit der theologischen. Anhang: Von einer reinen Mystik in der Religion // Kant. Werke, hrsg. von W. Weischedel. Darmstadt: Wissenschafliche Buchgesellschaft, 1968. Bd 9.

293. *Kennedy J. B.* Plato's Forms, Pythagorean Mathematics, and Stichometry // Apeiron. 43 (2010). Issue 1. P. 1–31.

294. *Kepler J.* Mysterium Cosmographicum (1596).

295. *Kepler J.* Weltharmonik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1971.

296. *Kepler J.* Selbstzeugnisse. Stuttgart: F. Frommann, 1971.

297. *Kirchmann J. H.* Die Metaphysik des Aristoteles. Berlin, 1871.

298. *Knorr W. R.* Infinity and Continuity: The Interaction of Mathematics and Philosophy in Antiquity // Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought, ed. by Norman Kretzmann. Ithaca and London: Cornell University Press, 1982. P. 112–145.

299. *Koechlin F.* Pflanzen-Palaver. Basel: Lenos Verlag, 2013.

300. *Körner S.* Philosophie der Mathematik. München: Nymphenburger Verlagshandlung, 1968.

301. *Krämer H.-J.* Arete bei Platon und Aristoteles. Heidelberg: Winter, 1959.

302. *Krojer F.* Astronomie der Spätantike, die Null und Aryabhata. München: Differenz-Verlag, 2009.

303. *Lichtenberg G. F.* Tag und Dämmerung. Leipzig, 1941.

304. *Livio M.* The Golden Ratio. New York: Broadway Books, 2002.

305. *Locher-Ernst L.* Die Reihe der natürlichen Zahlen als Geist-Kunstwerk. Dornach/Schweiz: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag, 1972.

306. *Locher-Ernst L.* Mathematik als Vorschule zur Geist-Erkenntnis. Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag, 1973^2.

307. *Locher-Ernst L.* Urphänomene der Geometrie. Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag, 1980^2.

308. *Lorenzen P.* Das Aktual-Unendliche in der Mathematik // Philosophia Naturalis. IV, 1957. S. 3–11.

309. *Lorenzen P.* Wie ist Philosophie der Mathematik möglich? // Philosophia Naturalis. IV, 1957. S. 192–208.

310. *Mach E.* Erkenntnis und Irrtum. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1968.

311. *Manin Y.* What then? The Modernist Transformation of Mathematics // Notices of the American Mathematical Society. Vol. 57. 2010. Nr 2. P. 239–243.

312. *Mansfeld J.* Die Vorsokratiker I. Stuttgart: Reclam, 1999.

313. *Martin G.* Platons Lehre von der Zahl und ihre Darstellung durch Aristoteles // Zeitschrift für philosophische Forschung. Bd VII. 1953. Heft 2. S. 191–203.

314. *Marx K., Engels F.* Werke, Band 20. Institut für Marxismus-Leninismus beim ZK der SED. Berlin: Dietz Verlag, 1968.

315. *Mathesius [Paul Henkler].* Weg zu Gott. Zürich: Rascher Verlag, 1959.

316. *Matson W. I.* Zeno Moves! // Essays in Ancient Greek Philosophy. IV, 2001. P. 87–108.

317. *Meschkowski H.* Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie. Braunschweig: Friedrich Vieweg, 1960.

318. *Meschkowski H.* Mathematik als Bildungsgrundlage. Braunschweig: Friedrich Vieweg, 1965.

319. *Meschkowski H.* Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors. Braunschweig: Friedrich Vieweg, 1967.

320. *Meyer-Abich K. M.* Der Holismus im 20 Jahrhundert // Klassiker der Naturphilosophie, hrsg. von Gernot Böhme. München: C. H. Beck, 1989.

321. *Mittelstraß J.* Die geometrischen Wurzeln der platonischen Ideenlehre // Gymnasium. Bd. 92. 1985. S. 399–418.

322. *Mohr R. D.* The Number Theory in Plato's Rep. VII and Philebus // Isis. 72. 1981. P. 620–627.

323. *Mooser P.* Evolution: Gott, Zufall oder Geist? Verlag Monsenstein und Vannerdat, 2008.

324. *Morrow G. R.* Proclus — A Commentary on the First Book of Euclid's Elements. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1970.

325. *Mostowski A.* Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese // Elemente der Mathematik. Bd XIX. 1964. Nr. 6. S. 121–125.

326. *Mourelatos A. P. D.* Knowledge, Speculation, and Myth in Plato's Accounts of the Order and the Distances of Celestial Bodies // Plato, Time and Education. Essays in Honour of Robert S. Brumbaugh. Albany: State University of New York Press, 1987. P. 83–105.

327. *Muck O.* Eigenschaften Gottes im Licht des Gödelschen Arguments // Theologie und Philosophie. Bd. 67. 1992. № 1. S. 60–86.

328. *Müller C. W.* Platons Akademiegründung // Hyperboreus. 1. 1994. S. 56–72.

329. *Nash J.* Interview. Der Tagesspiegel. 24.02.2013.

330. *Natorp P.* Platos Ideenlehre. Hamburg: Felix Meiner, $1961^3 = 1922^2$.

331. *Neidhart L.* Unendlichkeit im Schnittpunkt von Mathematik und Theologie. 2. Band: historischer und theologischer Teil. Göttingen: Cuvillier Verlag, 2007.

332. *Neugebauer O.* The Exact Sciences in Antiquity. Copenhagen: Ejnar Munksgaard, 1951.

333. *Neugebauer O.* The Exact Sciences in Antiquity. Second Edition. Providence, Rhode Island: Brown University Press, 1957.

334. *Newton I.* Die mathematischen Prinzipien der Physik. Übersetzt und herausgegeben von Volkmar Schüller. Berlin: de Gruyter, 1999.

335. *Oehler K.* Der entmythologisierte Platon // Zeitschrift für philosophische Forschung. XIX. 1965.

336. *O'Meara D. J.* Pythagoras Revived. Mathematics and Philosophy in Late Antiquity. Oxford: Clarendon Press, 1989.

337. *Ostwald W.* Die Forderung des Tages. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1910.

338. *Otte M.* Konstruktion und Existenz // Form, Zahl, Ordnung. Festschrift für Ivo Schneider zum 65. Geburtstag. Hrsg. von Rudolf Seising u.a. Stuttgart: Franz Steiner Verlag, 2004. S. 169–191.

339. *Pagès F.* Frühstück bei Sokrates. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1993.

340. *Pappus.* Mathematical collection.

341. *Patzig G.* Vorwort zu Gottlob Frege, Funktion-Begriff-Bedeutung. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1962. S. 3–15.

342. *Petsche H.-J.* Graßmann. Basel: Birkhäuser, 2006.

343. *Pichot A.* Die Geburt der Wissenschaft. Von den Babyloniern zu den frühen Griechen. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1995.

344. *Pickover C. A.* Die Mathematik und das Göttliche. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1999.

345. *Pólya G.* Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. Bern: Francke, 1949.

346. *Pólya G.* Mathematik und plausibles Schliessen. Band 1: Induktion und Analogie in der Mathematik. Basel-Stuttgart: Birkhäuser, 1962.

347. *Portmann A.* An den Grenzen des Wissens. Wien-Düsseldorf: Econ Verlag, 1974[2].

348. *Pritchard P.* Plato's Philosophy of Mathematics. Sankt Augustin: Academia Verlag, 1995.

349. *Procli Diadochi* in primum euclidis elementorum librum commentarii. Ex recognitione Gogofredi Friedlein. Lipsiae M.DCCC.LXXIII.

350. *Purkert W.* Kontinuumproblem und Wohlordnung // Form, Zahl, Ordnung. Festschrift für Ivo Schneider zum 65. Geburtstag. Hrsg. von Rudolf Seising u.a. Stuttgart: Franz Steiner Verlag, 2004. S. 223–242.

351. *Quine W.* Theorien und Dinge. Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1991.

352. *Radke G.* Die Theorie der Zahl im Platonismus. Tübingen-Basel: A. Francke Verlag, 2003.

353. *Rappe G.* Archaische Leiberfahrung: der Leib in der frühgriechischen Philosophie und in aussereuropäischen Kulturen. Berlin: Akademie Verlag, 1995.

354. *Richeson D. S.* Euler's Gem — The Polyhedron Formula and the Birth of Topology. Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2008.

355. *Robinson R.* Plato's Earlier Dialectic. Oxford: Clarendon Press, 1953[2].

356. *Rooney A.* The Story of Mathematics. London: Arcturus Publishing, 2008.

357. *Russell B.* The Principles of Mathematics. New York: W.W. Norton & Company, 1903, 2nd edition 1938.

358. *Russell B.* Philosophie des Abendlandes. Zürich: Europa-Verlag, 2009[2].

359. *Russell B.* Einführung in die mathematische Philosophie. Darmstadt-Genf: Holle Verlag, o.J.

360. *Sachs E.* Die fünf platonischen Körper. Berlin: Weidmannsche Buchhandlung, 1917.

361. *Seeskin K.* Meno 86c–89a: A Mathematical Image of Philosophic Inquiry // Plato, Time and Education. Essays in Honour of Robert S. Brumbaugh. Albany: State University of New York Press, 1987. P. 25–41.

362. *Seneca.* Naturwissenschaftliche Untersuchungen. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1995.

363. *Skolem T.* Über die Grundlagendiskussionen in der Mathematik (1929) // Mengenlehre, hrsg. von Ulrich Felgner. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1979. S. 73–91.

364. *Skolem T.* Über die Nicht-Charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen // Fundamenta mathematicae. XXIII. 1934. S. 150–161.

365. *Skolem T.* The Logical Nature of Arithmetic // Synthese. 9. 1953–1955. P. 375–384.

366. *Sorabji R.* Atoms and Time Atoms // Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought, ed. by Norman Kretzmann. Ithaca and London: Cornell University Press, 1982. P. 37–86.

367. *Spalt D. D.* Vom Mythos der mathematischen Vernunft. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1981.

368. *Speiser A.* Ein Parmenideskommentar: Studien zur platonischen Dialektik. Leipzig: K.F. Köhler, 1937; Stuttgart: Köhler, 1959.

369. *Speiser A.* Über die Freiheit. Rektoratsrede gehalten am 24 November 1950. Basel: Helbing & Lichtenhahn, 1950.

370. *Speiser A.* Elemente der Philosophie und der Mathematik. Basel: Birkhäuser, 1952.

371. *Speiser A.* Platons Ideenlehre und die Mathematik // Andreas Speiser. Die geistige Arbeit. Basel: Birkhäuser, 1955.

372. *Schleiermacher F.* Einführungen zu seinen Platon-Übersetzungen.

373. *Scholz H.* Die Axiomatik der Alten // Heinrich Scholz. Mathesis universalis. Basel: Benno Schwabe, 1961.

374. *Stegmüller W.* Metaphysik — Skepsis — Wissenschaft. Berlin; Heidelberg; New York: Springer Verlag, 1969[2].

375. *Steiner R.* Mythen und Sagen. Okkulte Zeichen und Symbole. Dornach: Rudolf Steiner Verlag, 1987.

376. *Stenzel J.* Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. Zweite erweiterte Auflage, 1933.

377. *Swift R. A.* Platonica — The Anecdotes Concerning the Life and Writings of Plato. Leiden: E. J. Brill, 1976.

378. *Tipler F. J.* The Physics of Immortality. New York: Doubleday, 1994.

379. *Toeplitz O.* Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Platon // Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. I, 1. Berlin, 1929.

380. *Tydecks W.* Mathematik-Visionen aus der Zeit des Faschismus. Kapitel 3: Allmacht der Zahlen. www.tydecks.info/index.html

381. *Unger G.* (Hrsg.). Paul Finsler: Aufsätze zur Mengenlehre. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1975.

382. *Van der Waerden B. L.* Das Erbe der Antike: Naturwissenschaften // Das Erbe der Antike, herausgegeben von Fritz Wehrli. Zürich: Artemis Verlag, 1963.

383. *Van der Waerden B. L.* Einfall und Überlegung. Basel: Birkhäuser, 3. Aufl. 1973.

384. *Van der Waerden B. L.* Die vier Wissenschaften der Pythagoräer. Opladen, 1977.

385. *Van der Waerden B. L.* Stellungnahme zur Auseinandersetzung Finsler — Baer. Handschriften und Autographen der ETH-Bibliothek, 54: Paul Finsler, Hs 648:40. Zürich: Wissenschaftshistorische Sammlungen der ETH-Bibliothek, 1985.

386. *Van der Waerden B. L.* Die Astronomie der Griechen. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1988.

387. *Vorländer K.* Geschichte der Philosophie. Leipzig, 1902.

388. *Walcker-Mayer G.* Die Wiederkehr der Proportion. I. Teil: Orgel und Heil – Auf der Suche nach Harmonia. URL: http://www.walcker.com/walckermagazin/die-wiederkehr-der-proportion.html

389. *Waltershausen W. S. von.* Gauss zum Gedächtnis. Leipzig: S. Hirzel, 1856.

390. *Waugh A.* The House of Wittgenstein. London: Bloomsbury, 2008.

391. *Wedberg A.* Plato's Philosophy of Mathematics. Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1955.

392. *Weiss W.* Gödels Unvollständigkeitssatz, die Vernunft, Metawahrheit(en) und Everetts Vielweltentheorie. Klosterneuburg, 2009. URL: http://www.vabene.at/html/weiss/goedel.pdf

393. *Weizsäcker C. F.* Parmenides und die Quantentheorie // Die Einheit der Natur. München: Carl Hanser Verlag, 1971. S. 466–491.

394. *Weizsäcker C. F.* Die Tragweite der Wissenschaft. Stuttgart: S. Hirzel Verlag, 1976.

395. *Weizsäcker C. F.* Platonische Naturwissenschaft im Laufe der Geschichte // Carl Friedrich von Weizsäcker. Der Garten des Menschlichen. München; Wien: Carl Hanser Verlag, 1977. S. 319–345.

396. *Weizsäcker C. F.* Geist und Natur // Geist und Natur, hrsg. von Hans-Peter Dürr. Bern; München; Wien: Scherz Verlag, 1989^2. S. 17–27.

397. *Weizsäcker C. F.* Die Sterne sind glühende Gaskugeln und Gott ist gegenwärtig. Über Religion und Naturwissenschaft. Freiburg; Basel; Wien: Herder, 1995[4].

398. *Weyl H.* Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik // Mathematische Zeitschrift. 10, 1921. S. 39–79. Neudruck Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1965.

399. *Whitehead A. N.* Process an Reality. Corrected Edition. New York: The Free Press, 1978.

400. *Wiegand W.* Platon. Sämtliche Werke, Dritter Band. Köln und Olten: Jakob Hegner, 5. Auflage 1967.

401. *Wiesel E.* Gesang der Toten. München; Esslingen: Bechtle Verlag, 1967.

402. *Wittenberg A. I.* Vom Denken in Begriffen — Mathematik als Experiment des reinen Denkens. Basel: Birkhäuser Verlag, 1957.

403. *Wolf-Gazo E.* Alfred North Whitehead (1861–1947) // Klassiker der Naturphilosophie, hrsg. von Gernot Böhme. München: C. H. Beck, 1989.

404. *Zermelo E.* Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung // Mathematische Annalen. 65. Bd, 1907. 1. Heft. S. 107ff.

405. *Ziegler R.* Mathematik und Geisteswissenschaft. Dornach: Philosophisch-Anthroposophischer Verlag am Goetheanum, 1992.

Указатель имен

Указатель цитат из платоновских диалогов

Научное издание

Зеннхаузер Вальтер

Платон и математика

Директор издательства *Р. В. Светлов*
Ответственный редактор *А. А. Галат*
Редактор *В. А. Королев*
Корректор *А. А. Борисенкова*
Дизайн обложки *О. Д. Курта*
Верстка *В. Зеннхаузер*

Подписано в печать 12.05.2016. Формат 60×90 $^{1}/_{16}$
Бум. офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 38,5. Тираж 300 экз.
Зак. № 1345

191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 15,
Издательство Русской христианской гуманитарной академии.
Тел.: (812) 310-79-29, +7(981)699-6595; факс: (812) 571-30-75;
e-mail: rhgapublisher@gmail.com. URL: http://irhga.ru

Отпечатано в типографии «Контраст»
192029 Санкт-Петербург, пр. Обуховской обороны, д. 38